

MODELIZACIÓN DE PROBLEMAS LINEALES Y NO LINEALES DE LÁMINAS DELGADAS USANDO ELEMENTOS CUADRILÁTEROS SIN GRADOS DE LIBERTAD ROTACIONALES

Carlos F. Estrada y Fernando G. Flores

*Departamento de Estructuras, Universidad Nacional de Córdoba, Casilla de Correo 916,
5000 Córdoba-Argentina, y CONICET, cestrada@efn.uncor.edu, fflores@efn.uncor.edu,
<http://www.efn.unc.edu>*

Palabras clave: Elementos finitos, láminas delgadas, sin rotaciones, restricciones multipunto, acoplamiento sólido lámina.

Resumen.

En este trabajo se muestran distintas modelizaciones de problemas de láminas delgadas utilizando elementos cuadriláteros de láminas sin grados de libertad de rotación (rotation-free). Estos elementos son no conformes y las curvaturas se determinan utilizando una parcela de elementos que incluye al elemento y a los vecinos inmediatos. Las aplicaciones que aquí se presentan incluyen la unión de elementos de lámina con elementos de sólido.

En modelización de sólidos en general y de estructuras en particular es muchas veces necesario incluir relaciones de restricción entre distintos grados de libertad. Estas surgen habitualmente cuando se combinan elementos estructurales (viga o lámina) con elementos de sólido. En general estas restricciones conducen a describir la evolución de algunos de los grados de libertad (GdL), a los que se denomina *esclavos* en función de otro a los que se denomina *maestros*. En el caso de utilizar elementos que no incluyen sistemas nodales locales (rotation-free) no es posible introducir restricciones directamente como una relación entre nudos y resulta necesario incluir información sobre la geometría de los elementos involucrados. En este trabajo se presentan algunos desarrollos cuyo objetivo es poder unir elementos de lámina con elementos de sólidos.

Los desarrollos están orientados a su implementación en códigos con integración implícita y explícita de las ecuaciones de movimiento con capacidad para el tratamiento de no-linealidades muy fuertes ya sea geométrica, de material y contacto. Se presentan varios ejemplos que muestran el buen comportamiento de las aproximaciones utilizadas.

1. INTRODUCCIÓN

En la modelización de sólidos en general y de estructuras en particular es mucha veces necesario incluir relaciones de restricción entre distintos grados de libertad. Estas surgen habitualmente en simulaciones diversas cuando se combinan elementos estructurales (viga o lámina) con elementos de sólidos. En general estas restricciones conducen a describir la evolución de algunos grados de libertad (GdL) del modelo, a los que se denominan *esclavos* en función de otros GdL del modelo a los que se denominan *maestros*. Si los problemas a abordar son geoméricamente no lineales las restricciones también lo serán, lo cual requiere una actualización acorde de la geometría y de la relación tangente (incremental) entre GdL esclavos y maestros. En los elementos estructurales estándar (vigas, láminas, conectores diversos, etc), que incluyan sistemas nodales locales asociados en su evolución a GdL rotacionales, estas restricciones se introducen directamente entre nudos y en general en forma independiente de los elementos. En el caso de utilizar elementos que no incluyan sistemas nodales locales (rotation-free) no es posible introducir este tipo de restricción directamente entre nudos y resulta necesario incluir información sobre la geometría de los elementos involucrados (ver Flores (2007)).

En este trabajo se presentan algunos desarrollos cuyo objetivo es poder unir elementos de láminas con elementos de sólidos. Este tipo de restricción es muy utilizada en modelos que responden globalmente al comportamiento de láminas cuando se pretende realizar un análisis local detallado con elementos de sólidos a los fines de captar comportamientos tridimensionales. Los desarrollos que se presentan abajo están orientados a su implementación en un código con integración explícita e implícita de las ecuaciones de movimiento con capacidad para el tratamiento de no-linealidades muy fuertes ya sea geométricas, de material y contacto.

El contenido de este trabajo es el siguiente. En la Sección 2 se realiza una breve introducción de la formulación del elemento NBSQ (mas precisamente del campo de curvaturas) a los fines de poder explicar la unión lámina sólido. Otros aspectos como ser: la evaluación de los esfuerzos membranales, estabilización del campo membranal y flexional, condiciones de contorno y evaluación de fuerzas residuales pueden encontrarse con mayores detalles en Estrada and Flores (2008). En la Sección 3 se presenta una formulación para la imposición de restricciones multi-punto. En la Sección 4 se presenta algunos ejemplos numéricos. Finalmente en la Sección 5 se resumen algunas conclusiones.

2. ASPECTO BÁSICO DEL ELEMENTO DE LAMINA (NBSQ)

2.1. EVALUACIÓN DE LAS CURVATURAS

La geometría del elemento cuadrilátero queda definida por la posición (superficie media φ) de sus cuatro nudos por lo que los únicos grados de libertad a utilizar son las tres componentes de desplazamiento en cada nudo. Dentro de cada elemento la posición de la superficie media resulta de la habitual interpolación bilineal

$$\varphi(\eta_1, \eta_2) = \sum_{I=1}^4 N^I(\eta_1, \eta_2) \varphi^I \quad (1)$$

donde φ^I es la posición de la superficie media en cada nudo y las $N^I(\eta_1, \eta_2)$ son las funciones de interpolación bilineal definidas sobre el elemento maestro en el sistema local (ver por ejemplo Zienkiewicz and Taylor (2000)).

Las curvaturas en términos del sistema local al contorno (\mathbf{n} , \mathbf{s}) son definidas por

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \bar{\kappa}_{11} \\ \bar{\kappa}_{22} \\ 2\bar{\kappa}_{12} \end{bmatrix} &= \frac{-1}{{}^oA} \sum_{k=1}^4 l^k \left\{ \begin{bmatrix} n_1^2 & -n_1n_2 \\ n_2^2 & n_1n_2 \\ 2n_1n_2 & n_1^2 - n_2^2 \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} \varphi_{,n}^{k(M)} \cdot \mathbf{t}^{0(M)} \\ \varphi_{,s}^{k(M)} \cdot \mathbf{t}^{0(M)} \end{bmatrix} \right. \\ &\quad \left. + \begin{bmatrix} n_1^2 \\ n_2^2 \\ 2n_1n_2 \end{bmatrix}^k \lambda_n^{k(M)} \gamma^k \right\} \\ &= \boldsymbol{\kappa}^0 + \boldsymbol{\kappa}^1 \end{aligned} \tag{2}$$

donde

$$\begin{bmatrix} \bar{\kappa}_{11} \\ \bar{\kappa}_{22} \\ 2\bar{\kappa}_{12} \end{bmatrix}^0 = \frac{-1}{{}^oA} \sum_{k=1}^4 l^k \begin{bmatrix} n_1^2 & -n_1n_2 \\ n_2^2 & n_1n_2 \\ 2n_1n_2 & n_1^2 - n_2^2 \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} \varphi_{,n}^{k(M)} \cdot \mathbf{t}^0 \\ \varphi_{,s}^{k(M)} \cdot \mathbf{t}^0 \end{bmatrix} \tag{3}$$

son las curvaturas en el elemento a partir de la interpolación isoparamétrica y

$$\begin{bmatrix} \bar{\kappa}_{11} \\ \bar{\kappa}_{22} \\ 2\bar{\kappa}_{12} \end{bmatrix}^1 = \frac{-1}{{}^oA} \sum_{k=1}^4 l^k \begin{bmatrix} n_1^2 \\ n_2^2 \\ 2n_1n_2 \end{bmatrix}^k \lambda_n^{k(M)} \gamma^k \tag{4}$$

son las curvaturas que provienen del “salto” del gradiente normal. Donde al ángulo γ^k es el ángulo entre los vectores normales al lado en cada elemento

$$\gamma^k = \frac{1}{2} \text{ang} \left(\mathbf{n}_k^{(M)}, \mathbf{n}^{(K)} \right) \tag{5}$$

Para evaluar el ángulo γ^k es necesario realizar un análisis localizado en los puntos medio de cada lado del elemento principal a los efectos de definir los sistemas de referencia. La dirección normal al lado del elemento adyacente se define a partir del lado \mathbf{s}^k y de la normal ${}^o\mathbf{t}^{k(K)}$ correspondiente. Supongamos entonces que en la configuración original exista un ángulo no nulo ${}^o\phi^k$ entre la normal del elemento principal ${}^o\mathbf{n}^{k(M)}$ y la normal entrante al lado del elemento vecino ${}^o\mathbf{n}^{(K)}$. En los puntos medios del lado correspondiente al elemento adyacente se calcula el plano tangente $({}^o\varphi_{\eta_1}^{k(K)}, {}^o\varphi_{\eta_2}^{k(K)})$ y su normal ${}^o\mathbf{t}^{k(K)}$. A cada lado del elemento vecino, sobre el lado común, es posible definir un triedo local con: la normal ${}^o\mathbf{t}^{k(K)}$, el lado común os y la normal al lado en el plano del elemento ${}^o\mathbf{n}^{k(K)} = {}^os \times {}^o\mathbf{t}^{k(K)}$. Notar que ${}^os = \mathbf{s}^{k(M)}$ y $\mathbf{s}^{k(K)}$ están a lo largo de la misma línea pero en sentido contrario. Donde $\mathbf{s}^{k(K)}$ es el lado compartido con el elemento adyacente.

Luego es posible definir el ángulo que forman la normal al elemento principal ${}^o\mathbf{n}^{k(M)}$ y la normal entrante del elemento adyacente ${}^o\mathbf{n}^{k(K)}$ obtenida previamente en el triedo local al lado, como

$$\cos {}^o\phi^k = {}^o\mathbf{n}^{k(M)} \cdot {}^o\mathbf{n}^{k(K)} \tag{6}$$

$$\sin {}^o\phi^k = -{}^o\mathbf{n}^{k(M)} \cdot {}^o\mathbf{t}^{k(K)} \tag{7}$$

donde el ángulo ${}^o\phi^k$ es medido alrededor del lado común os y es positivo en sentido antihorario para su utilización en (4). En la Figura 1 se representa el ángulo medido entre las normales y es negativo según la convención adoptada.

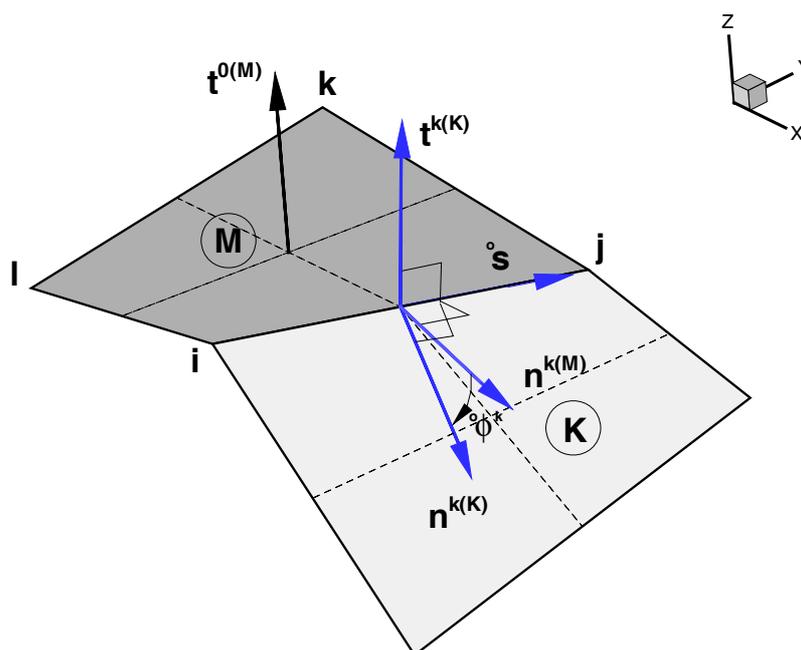


Figura 1: Ángulos entre dos elementos

En la configuración deformada, a partir de la interpolación bilineal de la geometría puede evaluarse el gradiente, es decir el plano tangente en el lado compartido por el elemento adyacente $(\varphi_{,\eta_1}^{k(K)}, \varphi_{,\eta_2}^{k(K)})$ que se completa con la normal en el lado

$$\mathbf{t}^{k(K)} = \frac{1}{\bar{J}_k} \left(\varphi_{,\eta_1}^{k(K)} \times \varphi_{,\eta_2}^{k(K)} \right) \quad \bar{J}_k = \left\| \varphi_{,\eta_1}^{k(K)} \times \varphi_{,\eta_2}^{k(K)} \right\| \quad (8)$$

Existiendo un lado común

$$\varphi_{,s}^{k(M)} = \lambda_s \mathbf{s}^{k(M)} = -\varphi_{,s}^{k(K)} \quad (9)$$

lo cual permite definir el vector normal entrante al lado del elemento adyacente

$$\mathbf{n}^{k(K)} = \frac{-1}{\lambda_s} \varphi_{,s}^{k(K)} \times \mathbf{t}^{k(K)} = \mathbf{s}^{k(M)} \times \mathbf{t}^{k(K)} \quad (10)$$

En la configuración deformada los vectores $\mathbf{n}^{k(M)}$ y $\mathbf{n}^{k(K)}$ ya no formarán un ángulo ${}^o\phi$, sino ϕ en la posición que corresponda

$$\cos \phi^k = \mathbf{n}^{k(M)} \cdot \mathbf{n}^{k(K)} \quad (11)$$

$$\sin \phi^k = -\mathbf{n}^{k(M)} \cdot \mathbf{t}^{k(K)} \quad (12)$$

que representa un cambio respecto a la configuración original

$$\Delta\phi^k = \phi^k - {}^o\phi^k \quad (13)$$

Nótese que el cambio de ángulo (13) que experimenta el elemento en cada borde debe garantizar que la sección normal de cada cuadrilátero en los lados rote con el lado en cuestión, asegurando de esa manera la continuidad de la lámina. Para que las normales $\mathbf{n}^{k(M)}$ y $\mathbf{n}^{k(K)}$ mantengan el ángulo original ${}^o\phi$ puede asociarse a cada elemento una rotación γ relativa a la rotación de la arista s , con la condición

$$\Delta\phi^k = \gamma^{k(M)} + \gamma^{k(K)} \quad (14)$$

donde $\gamma^{k()}$ son las rotaciones relativas de las normales $\mathbf{n}^{k()}$ y cuyo valores interesan para la obtención del campo de curvaturas.

3. UNIÓN DE ELEMENTOS DE LÁMINA SIN ROTACIONES CON ELEMENTOS DE SÓLIDO

Hay tres aspectos que es necesario considerar en el elemento de lámina sobre el lado $K - L$:

1. La evaluación de las deformaciones membranales (primera forma fundamental). Las fuerzas nodales equivalentes resultantes asociadas a los nudos K y L pasan en forma estándar a los nudos 1 - 4 a través de las restricciones impuestas por la condición nudo sobre una arista (ver Flores (2007))
2. La evaluación de la curvatura se realiza como si el lado estuviera empotrado, donde la normal \mathbf{n}_s al plano de empotramiento se actualiza paso a paso en función de las coordenadas de los nudos 1 - 4.
3. La evaluación de fuerzas residuales debidas a flexión.

Podría mencionarse un cuarto aspecto que cobra relevancia cuando se requiere implementar la formulación propuesta en un código implícito: esto es, la variación del ángulo entre $\mathbf{t}^{k(M)}$ (normal al elemento) y \mathbf{t}^s (normal a la cara del sólido), alrededor del lado s que da lugar a una redefinición de la matriz \mathbf{B}_b .

3.1. Definición de la geometría en la unión lámina-sólido

Para la unión de un elemento de lámina con un sólido es necesario que los dos nudos que definen el lado de un elemento de lámina (K y L en la Figura 2) se hayan definidos como nudos esclavos de los nudos que definen la cara (1 - 4 de la figura) del sólido. Es decir que el nudo K se mantendrá a distancia relativas invariantes de los nudos 1 y 2, en tanto que el nudo L se mantendrá a distancias relativas invariantes de los nudos 3 y 4. Lo natural es que los nudos del sólido estén ubicados en la dirección normal al elemento de lámina $\mathbf{t}^{k(M)}$ a una distancia igual a la mitad del espesor. La formulación no impone esta condición pero es deseable. Por otro lado en general es necesario utilizar 2 ó más elementos de sólido en el espesor de la lámina a los fines de captar correctamente la flexión. El desarrollo que sigue supone que la relación se establece con los nudos extremos del sólido es decir aquellos que están ubicados en la superficie inferior y superior de la lámina y que los nudos intermedios del sólido se relacionan a través de restricciones tipo *nudo sobre una arista* (ver Flores (2007).)

Las coordenadas de los nudos K y L sobre la superficie media de la lámina (φ) definen en el plano paramétrico asociado al cuadrilátero coordenadas ξ_K y ξ_L que son constantes durante el proceso de deformación e implican una restricción del tipo *master-slave*. De tal forma que en todo momento se satisfaga

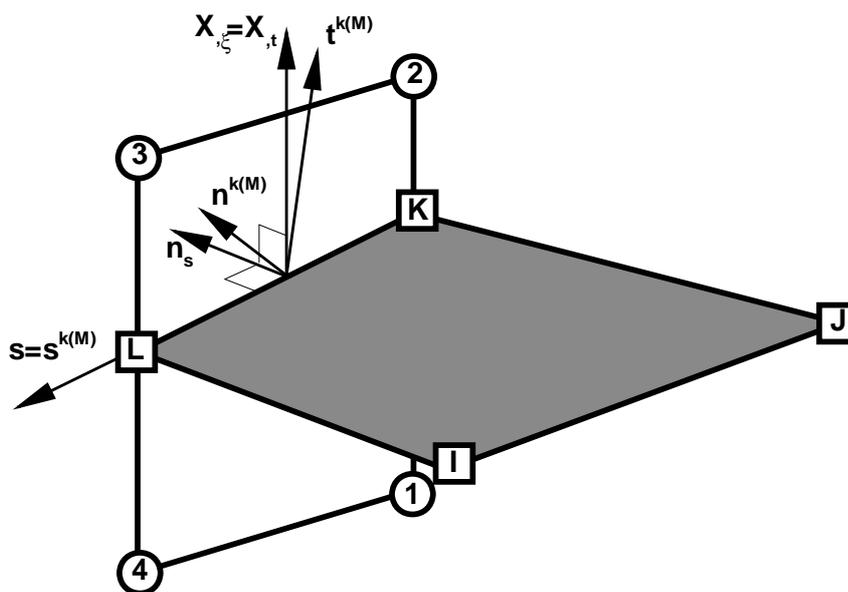


Figura 2: Definición de la geometría en la unión lámina sólido.

$$\varphi^K = \left(\frac{1-\xi_K}{2}\right) \mathbf{x}^1 + \left(\frac{1-\xi_K}{2}\right) \mathbf{x}^2 = a_{K1}\mathbf{x}^1 + a_{K2}\mathbf{x}^2 \tag{15}$$

$$\varphi^L = \left(\frac{1-\xi_L}{2}\right) \mathbf{x}^3 + \left(\frac{1-\xi_L}{2}\right) \mathbf{x}^4 = a_{L3}\mathbf{x}^3 + a_{L4}\mathbf{x}^4 \tag{16}$$

donde \mathbf{x} es la posición actual, con \mathbf{x} la correspondiente a cada nudo del cuadrilátero.

A los fines de no introducir singularidades en el modelo parece altamente recomendable que la posición de los nudos 1 (4) y 2 (3) correspondan a posiciones coincidentes con la superficies inferior y superior de la lámina (es decir separados por una distancia igual al espesor $^o h$), de tal forma que resulten las coordenadas $\xi_K = \xi_L = 0$ y los coeficientes $a_{ij} = \frac{1}{2}$. Más aún, para mantenerse dentro de las hipótesis de la teoría de láminas la configuración original del cuadrilátero debiera ser plana y ortogonal alplano de la superficie media de la lámina. En condiciones ideales (\mathbf{X}^I indica coordenadas originales)

<i>Punto</i>	<i>Posición</i>	
1	$\mathbf{X}^1 = \mathbf{X}^K - \frac{{}^o h}{2} {}^o \mathbf{t}^{k(M)}$	(17)
2	$\mathbf{X}^2 = \mathbf{X}^K + \frac{{}^o h}{2} {}^o \mathbf{t}^{k(M)}$	
3	$\mathbf{X}^3 = \mathbf{X}^L + \frac{{}^o h}{2} {}^o \mathbf{t}^{k(M)}$	
4	$\mathbf{X}^4 = \mathbf{X}^L - \frac{{}^o h}{2} {}^o \mathbf{t}^{k(M)}$	

donde debido a una posible curvatura inicial la normal a la lámina en el contorno ${}^o\mathbf{t}^s$ (medido en el sólido) no coincide con la normal al elemento de lámina ${}^o\mathbf{t}^{k(M)}$.

Naturalmente los desplazamientos incrementales y/o virtuales responden a las expresiones similares

$$\delta\mathbf{u}^K = a_{K1}\delta\mathbf{u}^1 + a_{K2}\delta\mathbf{u}^2 \quad (18)$$

$$\delta\mathbf{u}^L = a_{L3}\delta\mathbf{u}^3 + a_{L4}\delta\mathbf{u}^4 \quad (19)$$

De esta forma las fuerzas nodales equivalentes de los nudos esclavos K y L se reparten en función de los coeficientes a_{ij} sobre los correspondientes nudos maestros.

Lo anterior alcanza para *articular* el elemento de lámina sobre el elemento de sólido. Para *empotrar* uno sobre el otro, i.e. para que haya transmisión de momentos flectores, es necesario evaluar el cambio de ángulo entre la normal $\mathbf{t}^{k(M)}$ al elemento de lámina y la normal \mathbf{n}_s al cuadrilátero (saliente al sólido, entrante a la lámina).

3.2. Evaluación de la curvatura

Recordemos la expresión que define las curvaturas en el elemento de lámina cuadrilátero (2) más precisamente (4)

$$\begin{bmatrix} \bar{\kappa}_{11} \\ \bar{\kappa}_{22} \\ 2\bar{\kappa}_{12} \end{bmatrix}^1 = \frac{-1}{{}^oA} \sum_{k=1}^4 l^k \begin{bmatrix} n_1^2 \\ n_2^2 \\ 2n_1n_2 \end{bmatrix}^k \lambda_n^{k(M)} \gamma^k \quad (20)$$

Donde al ángulo γ_i resulta de comparar la configuración original con la deformada. Usando la normal al contorno $\mathbf{n}^{k(M)} = \mathbf{s} \times \mathbf{t}^{k(M)}$ en la configuración original se tendrá un ángulo inicial:

$$\cos {}^o\phi_i = -{}^o\mathbf{n}^{k(M)} \cdot {}^o\mathbf{n}_s \quad (21)$$

$$\sin {}^o\phi_i = {}^o\mathbf{n}^{k(M)} \cdot {}^o\mathbf{t}^s \quad (22)$$

con la notación previa el ángulo ${}^o\phi_i$ se mide alrededor del lado s en dirección antihoraria desde ${}^o\mathbf{t}^{k(M)}$ a ${}^o\mathbf{t}^s$.

Con la misma definición de ángulo sobre la geometría deformada se tiene

$$\cos \phi_i = -\mathbf{n}^{k(M)} \cdot \mathbf{n}_s \quad (23)$$

$$\sin \phi_i = \mathbf{n}^{k(M)} \cdot \mathbf{t}^s \quad (24)$$

lo cual permite definir a γ_i como el cambio de ángulo:

$$\gamma_i = \phi_i - {}^o\phi_i \quad (25)$$

La normal saliente al cuadrilátero se requiere en el centro del lado C (ver Figura 3), de coordenadas paramétricas:

$$\xi_c = \frac{1}{2}(\xi_K + \xi_L) \quad \eta_c = 0 \quad (26)$$

Usando la habitual interpolación bilineal

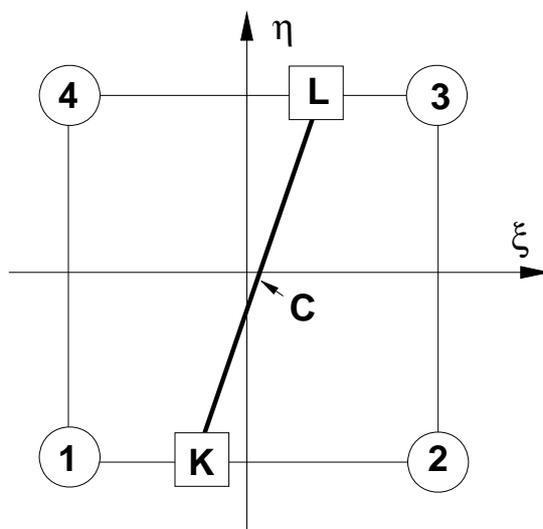


Figura 3: Definición de coordenadas paramétricas.

$$\mathbf{x}(\xi, \eta) = \sum_{I=1}^4 N^I(\xi, \eta) \mathbf{x}^I \tag{27}$$

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi}(\xi, \eta) = \sum_{I=1}^4 N_{,\xi}^I(\xi, \eta) \mathbf{x}^I \tag{28}$$

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \eta}(\xi, \eta) = \sum_{I=1}^4 N_{,\eta}^I(\xi, \eta) \mathbf{x}^I \tag{29}$$

las $N^I(\xi, \eta)$ son las funciones de interpolación bilineal definidas sobre el elemento maestro, cuadrado de lado 2 en $(\xi, \eta) = [-1, 1]$

$$N^I(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi^I \xi)(1 + \eta^I \eta) \tag{30}$$

$$N_{,\xi}^I(\xi, \eta) = \frac{\xi^I}{4}(1 + \eta^I \eta) \tag{31}$$

$$N_{,\eta}^I(\xi, \eta) = \frac{\eta^I}{4}(1 + \xi^I \xi) \tag{32}$$

la normal \mathbf{n}_s resulta de

$$\mathbf{n}_s = \frac{\mathbf{x}_{,\xi} \times \mathbf{x}_{,\eta}}{\|\mathbf{x}_{,\xi} \times \mathbf{x}_{,\eta}\|} \tag{33}$$

En el caso particular (conveniente y consistente) de que el cudrilátero original esté definido por (17) en la configuración original se tiene

$$\mathbf{X}_{,\xi} = \frac{1}{4}(-\mathbf{X}^1 + \mathbf{X}^2 + \mathbf{X}^2 - \mathbf{X}^4) = +\frac{oh}{2} \mathbf{t}^{k(M)} \tag{34}$$

$$\mathbf{X}_{,\eta} = \frac{1}{4}(-\mathbf{X}^1 + \mathbf{X}^2 + \mathbf{X}^2 - \mathbf{X}^4) = +\frac{ol_i}{2} \mathbf{t}^{k(M)} \tag{35}$$

y ambas normales son exactamente opuestas

$$- {}^o\mathbf{n}_s = {}^o\mathbf{s}_i \times {}^o\mathbf{t}^{k(M)} = {}^o\mathbf{n} \quad (36)$$

En forma más general se puede utilizar el lado s y la dirección $\mathbf{x}_{,\xi}$ en el centro del lado ($\eta = 0$) lo cual da lugar a expresiones sencillas tanto para la configuración original como la deformada

$$\mathbf{s} = \mathbf{x}^K - \mathbf{x}^L \quad (37)$$

$$\mathbf{x}_{,\xi} = \frac{1}{4} (-\mathbf{x}^1 + \mathbf{x}^2 + \mathbf{x}^3 - \mathbf{x}^4) \quad (38)$$

3.3. Transferencia de fuerzas equivalentes a los momentos

A partir de los esfuerzos flexionales (m_{ij}) se calculan las fuerzas nodales equivalentes (\mathbf{r}^I) usando las expresiones habituales de la formulación del elemento de lámina, como si el lado estuviese empotrado, y luego se procede de la siguiente manera:

- a) A partir del tensor de momentos en el elemento, se calculan las componentes de momento flector y torsor en las direcciones locales al borde

$$m_n = m_{11}n_1^2 + m_{22}n_2^2 + 2m_{12}n_1n_2 \quad (39)$$

$$m_s = (m_{22} - m_{11})n_1n_2 + m_{12}(n_1^2 - n_2^2) \quad (40)$$

$$\begin{bmatrix} m_n \\ m_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_1^2 & n_2^2 & 2n_1n_2 \\ -n_1n_2 & n_1n_2 & n_1^2 - n_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{11} \\ m_{22} \\ m_{12} \end{bmatrix} \quad (41)$$

donde (n_1, n_2) son las componentes cartesianas locales de la normal al lado

- b) De las fuerzas nodales equivalentes previamente calculadas \mathbf{r} , se eliminan las asociadas al momento torsor. Estas fuerzas son un par aplicado en los nudos K y L en la dirección normal al elemento $\mathbf{t}^{k(M)}$ de valor igual al momento m_s

$$\bar{\mathbf{r}}^K = \mathbf{r}^K - m_s \mathbf{t}^{k(M)} \quad (42)$$

$$\bar{\mathbf{r}}^L = \mathbf{r}^L - m_s \mathbf{t}^{k(M)} \quad (43)$$

El objetivo es reemplazar las fuerzas normales al plano de la lámina que aparecen en la teoría de Kirchoff (asociadas a una parte del corte efectivo) por fuerzas paralelas al plano de la lámina que coincidan con la dirección de las tensiones que producen el momento torsor

- c) Se definen cuatro puntos ficticios ubicados a una distancia $\pm \frac{h}{2} \mathbf{t}^{k(M)}$ sobre y bajo los puntos K y L del lado en los cuales se ubican las siguientes fuerzas (estáticamente equiv-

alentes al momento flector y torsor):

<i>Punto</i>	<i>Posición</i>	<i>Fuerza \mathbf{f}^I</i>	
$1'$	$\mathbf{x}^1 = \mathbf{x}^K - \frac{h}{2} \mathbf{t}^{k(M)}$	$-\frac{oI_s}{2h} (m_n \mathbf{n}_s + m_s \mathbf{s})$	
$2'$	$\mathbf{x}^2 = \mathbf{x}^K + \frac{h}{2} \mathbf{t}^{k(M)}$	$+\frac{oI_s}{2h} (m_n \mathbf{n}_s + m_s \mathbf{s})$	(44)
$3'$	$\mathbf{x}^3 = \mathbf{x}^L + \frac{h}{2} \mathbf{t}^{k(M)}$	$+\frac{oI_s}{2h} (m_n \mathbf{n}_s + m_s \mathbf{s})$	
$4'$	$\mathbf{x}^4 = \mathbf{x}^L - \frac{h}{2} \mathbf{t}^{k(M)}$	$-\frac{oI_s}{2h} (m_n \mathbf{n}_s + m_s \mathbf{s})$	

- d) Estos cuatro puntos ficticios en principio debieran corresponderse con los puntos 1 – 4. Sin embargo a los fines de una mayor generalidad, no se supone esto último y se proyecta cada punto I' sobre el cuadrilátero definido por 1 – 4, dando lugar a posiciones (ξ_I, n_I) con lo cual se transfieren las fuerzas asociada mediante

$$\mathbf{r}_I^N = N^N(\xi_I, n_I) \mathbf{f}^I \quad (45)$$

donde las $N^N(\xi_I, n_I)$ son las habituales funciones de interpolación bilineal y \mathbf{r}_I^N indica la contribución del nodo ficticio I' al nudo del sólido N

3.4. Opciones implementadas en los modelos implícito y explícito

La opción implementada en el modelo explícito sigue los pasos descriptos en la sección anterior, donde la normal \mathbf{n}_s al plano de empotramiento se actualiza paso a paso en función de las coordenadas de los nudos 1 – 4. Para la implementación en el modelo implícito es necesario además de lo anterior evaluar las fuerzas nodales equivalentes en función de la variación de dicha normal.

La contribución del lado coincidente con el sólido a la variación de las curvaturas se obtiene de la siguiente manera:

$$\delta \begin{bmatrix} \bar{\kappa}_{11} \\ \bar{\kappa}_{22} \\ 2\bar{\kappa}_{12} \end{bmatrix}^1 = \frac{-1}{oA} \sum_{k=1}^4 l^k \begin{bmatrix} n_1^2 \\ n_2^2 \\ 2n_1 n_2 \end{bmatrix}^k \delta \left(\lambda_n^{k(M)} \gamma^k \right) \quad (46)$$

lo cual requiere determinar

$$\delta \left(\lambda_n^{k(M)} \gamma^k \right) = \delta \lambda_n^{k(M)} \gamma^k + \lambda_n^{k(M)} \delta \gamma^k \quad (47)$$

El primer término tiene una influencia menor en las ecuaciones de equilibrio y puede en general despreciarse. El segundo término es la variación del ángulo entre $\mathbf{t}^{k(M)}$ (normal al elemento) y \mathbf{t}^s (normal a la cara del sólido), alrededor del lado s

$$\delta \lambda_n^{k(M)} \gamma^k = \frac{\lambda_n}{\lambda_t} \mathbf{n}_s \cdot \delta \mathbf{x}_{,t} + \mathbf{t}^{k(M)} \cdot \delta \varphi_{,n} \quad (48)$$

Recordar que $\mathbf{x}_{,t} \simeq \mathbf{t}^s$ es la "normal" a la lámina medida sobre la cara del sólido y \mathbf{n}_s es la normal saliente al sólido. Donde $\delta \mathbf{x}_{,t}$ es la variación de las coordenadas en la dirección \mathbf{t}^s . Para el caso ideal, la dirección \mathbf{t}^s en el plano paramétrico coincide con la dirección $+\xi$

$$\mathbf{t}^s = \frac{1}{\lambda_t} \mathbf{x}_{,t} = \frac{-\mathbf{x}^1 + \mathbf{x}^2 + \mathbf{x}^3 - \mathbf{x}^4}{\|-\mathbf{x}^1 + \mathbf{x}^2 + \mathbf{x}^3 - \mathbf{x}^4\|} = \frac{4\mathbf{x}_{,\xi}}{2h} \quad (49)$$

y

$$\frac{1}{\lambda_t} \delta \mathbf{x}_{,t} = \frac{1}{2h} (4\delta \mathbf{x}_{,\xi}) = \frac{-\delta \mathbf{x}^1 + \delta \mathbf{x}^2 + \delta \mathbf{x}^3 - \delta \mathbf{x}^4}{2h} \quad (50)$$

Finalmente

$$\lambda_n \delta \gamma_i = \mathbf{t}^{k(M)} \cdot \delta \varphi_{,n} + \lambda_n \mathbf{n}_s \cdot \frac{1}{\lambda_t} \delta \mathbf{x}_{,t} \quad (51)$$

La implementación requiere también poder evaluar la matriz $\mathbf{B} = [\mathbf{B}_m, \mathbf{B}_b]$ en forma completa para el cálculo de la matriz de rigidez material. En el caso más general hay que considerar la posibilidad que dos lados del elemento estén asociados a elementos de sólidos (equina), sin embargo un mismo elemento no tendrá simultáneamente un lado sobre arista y un lado ramificado.

Los pasos a seguir son los siguientes:

1. determinar el tamaño de \mathbf{B} y ordenar las conectividades
2. calcular \mathbf{B}_m y con los factores correspondientes transferir los nudos en aristas a los nudos maestros
3. calcular \mathbf{B} con los lados sobre aristas como si estuvieran empotrados y con los factores correspondientes transferir los nudos en aristas a los nudos maestros.
4. Calcular las componentes asociados al segundo término de la expresión (51).

4. EJEMPLOS NUMÉRICOS

4.1. Placa empotrada bajo carga uniforme

Una placa cuadrada empotrada en su contorno es sometida a una carga uniformemente distribuida en toda su superficie. La carga aplicada es de tipo escalón y se analiza el comportamiento en el primer ciclo de movimiento no-amortiguado. El lado de la placa de 10 y el espesor de 0,4. El material se considera elástico lineal con propiedades $E = 0,5 \times 10^6$, $\nu = 0,5$ y $\delta = 1,00$. La carga aplicada $q = 0,8$. Se considera cinemática no-lineal. La discretización en el plano de la placa se realiza en forma uniforme con 20 divisiones por lado sobre un cuarto de la geometría total imponiendo las condiciones de simetría. Se hicieron tres modelos uno exclusivamente con elementos de lámina, otro sólo con elementos de sólido y un tercer modelo acoplado con aproximadamente la mitad de la superficie modelada con elementos de lámina y la otra mitad con elementos de sólido. Para los modelos de sólido se usaron elementos hexahedros de 8 nudos y se utilizaron 3 elementos en el espesor de la lámina. En los modelos con sólidos, en los bordes empotrados se permitió la contracción en la dirección normal a la lámina. En la Figura 4a se muestra la discretización utilizada en el caso acoplado y la deformada (5X) para el instante $t = 0,1$. En la Figura 4b se muestra, para los tres modelos, el desplazamiento vertical del punto central de la placa y del punto correspondiente donde se acoplan los modelos. Puede verse que los tres modelos dan resultados casi coincidentes. El modelo con lámina logra obtener ese mismo desplazamiento con menor cantidad de elementos, la fineza de la malla responde a las limitaciones del elemento de sólido para modelar correctamente el comportamiento flexional.

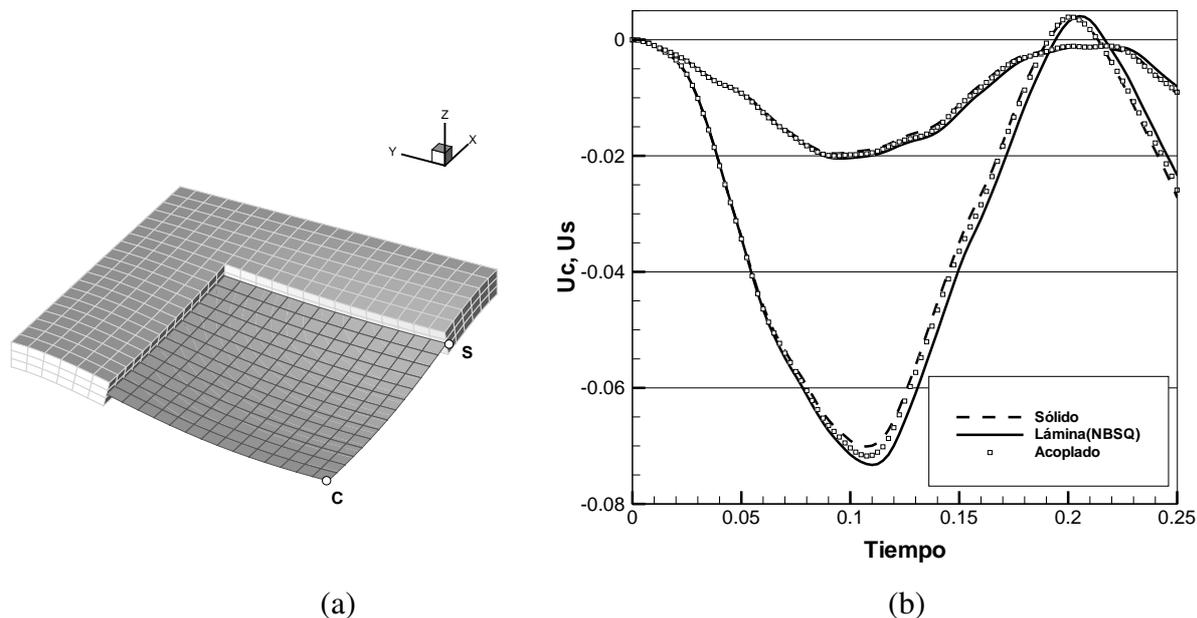


Figura 4: Modelo de la placa acoplado elementos de lámina y sólido. (a) Geometría deformada. (b) Respuesta dinámica.

4.2. Unión de un tubo y una placa

En este caso se analiza la unión entre un tubo y una placa con un código implícito desarrollado por el segundo autor. El tubo de radio 10 mm y espesor 0,75 mm está unido a una placa cuadrada de 100 mm de lado y 1 mm de espesor. El radio del filete de la intersección es de 1mm. Debido a la simetría del problema se modela sólo la mitad. Tanto el tubo como la placa están hechos de aluminio con $E = 69 \times 103 \text{ MPa}$, $\nu = 0,3$, y $\rho = 2740 \text{ Kg/m}^3$.

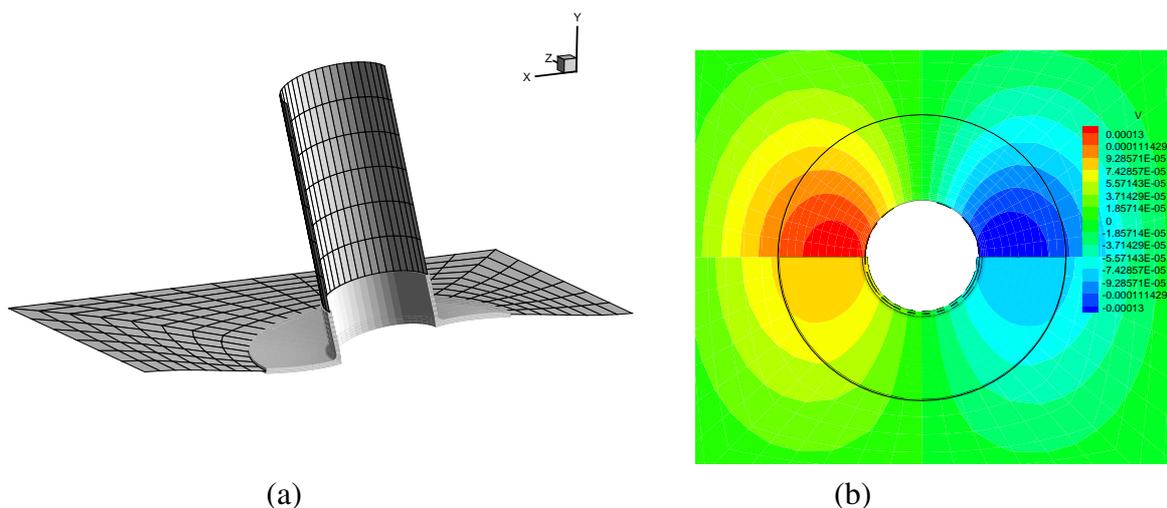


Figura 5: Unión de un tubo con una placa. (a) Configuración deformada (20X) para el modelo acoplado. (b) Contornos de desplazamiento transversal en la superficie media de la placa para ambos modelos: sólo lámina (arriba) y modelo acoplado (abajo)

Se consideraron dos modelos: uno con sólo elementos de lámina donde se utilizó una malla

fina en la zona de intersección pero sin considerar el radio del filete; y un segundo modelo donde se acoplaron elementos de lámina y elementos de sólido de 8 nudos. La malla de sólidos, que modela detalladamente el filete, se extiende 10 mm a lo largo del tubo y hasta un radio de 25 mm en el plano de la placa. Se usaron 4 elementos en el espesor lo que permite calcular con buena precisión la concentración de tensiones en el filete.

La Figura 5a muestra la configuración deformada (magnificada por 20) para el modelo acoplado. La Figura 5b muestra los contornos de desplazamientos normales a la placa en la zona central (cuadrado de 65 mm) para ambos modelos. El círculo en la figura indica la parte de la placa modelada con elementos de continuo. Los desplazamientos obtenidos con el modelo acoplado son un poco menores debido al comportamiento algo rígido de los elementos de sólido de 8 nudos.

4.3. Ovalamiento de un codo

Un tubo de radio $r = 19,83$ cm y espesor $t = 1,041$ cm, empotrado en un extremo y formado por un tramo recto de 182,9 cm un codo a 90° de radio 60,95 cm y un segundo tramo recto de 60,96 cm, está sometido a un giro impuesto en su extremo libre. Este giro se impone sobre todos los nudos de la sección extrema de tal forma que se mantiene plana y circular. El tubo puede estar sometido a una presión interna y se consideran entonces dos casos a) $p = 0$ y b) $p = 3,45$ MPa.

La flexión produce un ovalamiento principalente en la zona del codo. Las propiedades del material constitutivo son: $E = 194$ GPa, $\nu = 0,264$, $\delta = 7800$ kg/m³ y plasticidad asociada (von Mises) con endurecimiento isótropo gobernado por la relación $\sigma_y = 5,71 \times 10^8 (e_p + 0,006)^{0,1}$

Se consideran dos tipos de modelos uno exclusivamente con elementos de lámina y otro acoplado donde la zona del codo se modeló con elementos de sólido de 8 nudos. Se utilizaron dos discretizaciones para el modelo de láminas, una relativamente gruesa con 336 elementos y una discretización media con 1344 elementos. En ambos casos se utilizaron 7 puntos de integración en el espesor de la lámina a los fines de captar detalladamente la flexión elasto-plástica. Para los modelos con sólidos se utilizaron tres discretizaciones de la superficie, las mismas indicadas para la lámina más una discretización fina de la superficie equivalente a 3024 elementos de lámina. Para la malla gruesa se utilizaron 2 elementos en el espesor, para la malla media se hicieron dos modelos con 3 y 6 elementos en el espesor y para la malla fina se utilizaron 3 elementos en el espesor.

La Figura 6 muestra la geometría final del codo con la malla acoplada más fina. Se han graficados los contornos de deformaciones plásticas efectivas sobre el codo. Los valores máximos son del orden de 0,04. Se ha incluido en el mismo contorno de deformaciones sobre la malla media con sólo elementos de lámina con fines comparativos. En los modelos sólo se ha discretizado la mitad del tubo debido a la simetría.

En la Figura 7 se ha graficado el momento resistente en función de la rotación impuesta para ambos casos de carga (con y sin presión) y para las distintas mallas consideradas. Puede notarse que no hay diferencias significativas entre malla gruesa y media para los modelos de lámina, esto es parte debido al buen comportamiento membranar del elemento NBSQ. El modelo acoplado sobre la malla media dió resultados casi coincidentes al utilizar 3 ó 6 elementos en el espesor. Esto indicó que la limitación del elemento de sólido estaba relacionada con el comportamiento en el plano de la membrana y no con los detalles de la flexión debido al ovalamiento, por ello la malla fina también utilizó 3 elementos en el espesor. Puede notarse que la convergencia con la discretización es mas bien lenta que esto no permite alcanzar resultados similares con los

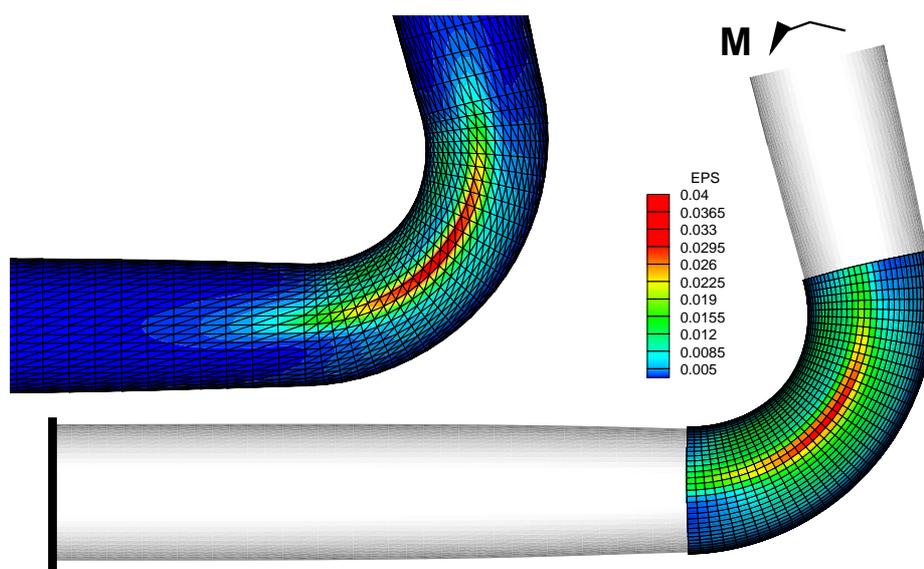


Figura 6: Codo sometido a flexión. Deformada final ($X=1$). Contorno de deformaciones plásticas efectivas sobre la cara externa del codo.

modelos de láminas y los modelos acoplados, sin embargo los resultados cualitativos mostrados en la Figura 6 indican un buen comportamiento de la restricción multipunto propuesta.

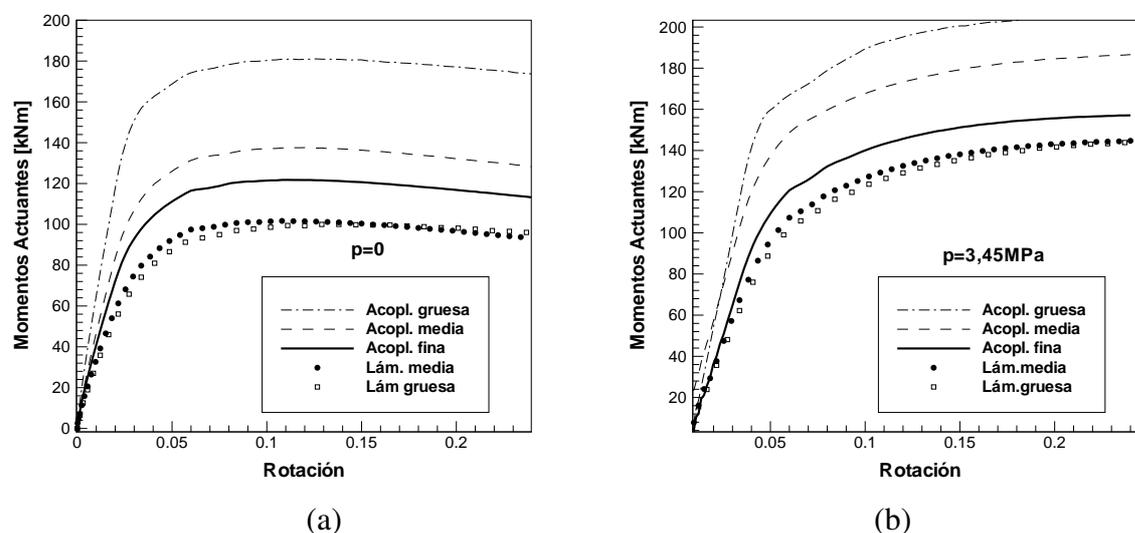


Figura 7: Codo sometido a flexión. Momento resistente en función de la rotación impuesta. (a) sin presión interna. (b) con presión interna.

4.4. Estampado de una lámina con costura

Este último ejemplo corresponde al estampado de una lámina formada por dos tramos de distinto espesor unidos por una costura. La lámina inicialmente es plana con una longitud de 150 mm de largo y está constituida por un tramo de 0,60 mm y otro de 0,80 mm de espesor. Debido a la simetría se modela un cuarto de la geometría y se utiliza una malla regular de 30×16 y 30×14 elementos de lámina correspondiente a cada parte unida. Para la costura se emplean

60 elementos de sólido con un solo elemento en el espesor.

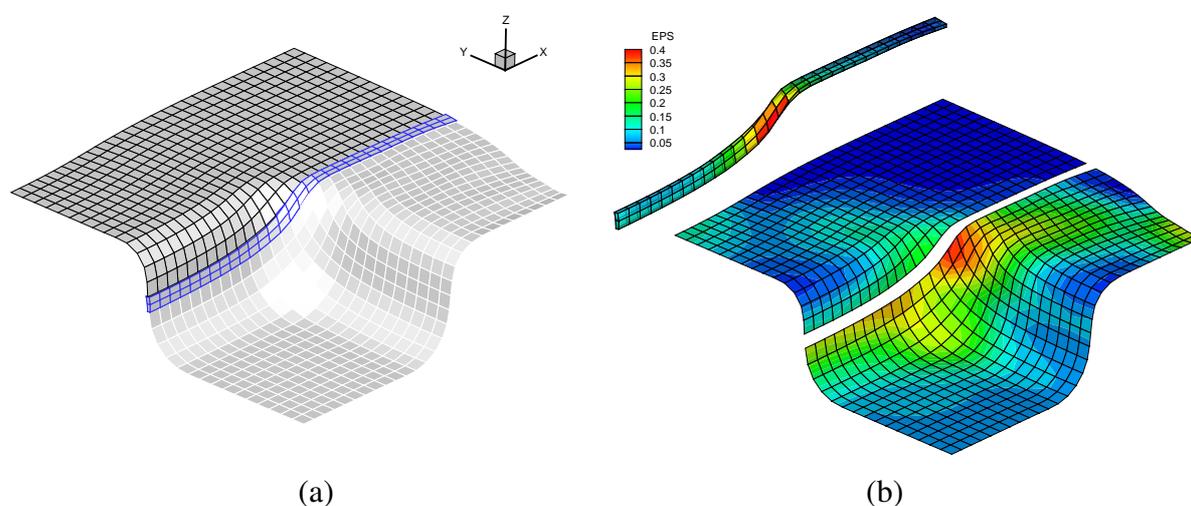


Figura 8: Estampado de una lámina con costura. (a) Deformación final de la lámina obtenida en la simulación. (b) Campo de deformaciones plásticas efectivas.

En la Figura 8a se muestra la geometría final correspondiente a un viaje del punzón de 20 mm y la malla de elementos utilizada. Las herramientas son tratadas como rígidas y los detalles geométricos y el material han sido tomado de la Referencia (NUMISHEET'93 (1993)). El material es acero dulce (IF) con módulo de Young $E = 2,06GPa$ y una relación de Poisson $\nu = 0,3$. Se utiliza la función de fluencia de Von Mises con endurecimiento isotrópico no lineal definido por $\sigma_y(e^p) = 565,32(0,007117 + e^p)^{0,2589} [MPa]$. Se define una fricción uniforme de 0,162 para todas las herramientas. En la simulación se considera la fuerza del pisador de 19,6KN.

En la Figura 8b se han graficado las deformaciones plásticas efectivas sobre la lámina y sobre la costura. Los valores máximos son del orden de 0,4. Nótese como el campo de deformaciones plásticas mantiene cierta continuidad a ambos lados de las láminas a través de la costura.

5. CONCLUSIONES

Se ha presentado una formulación para el tratamiento de restricciones multi-punto cuando se utilizan elementos de lámina sin grados de libertad a rotación. Esta formulación se ha implementado en dos códigos, uno con integración explícita y otro con integración implícita de las ecuaciones de movimiento.

Los ejemplos que acoplan elementos de lámina y de sólido muestran que son suficientes tres elementos de sólidos en el espesor de la lámina. En general la modelización con elementos de sólido requiere de una discretización más fina en la superficie de la lámina. El ejemplo de la palca cuadrada, con una malla fina muestra que la formulación conduce a resultados correctos. Los ejemplos del tubo unido a una placa y el codo muestran el excelente comportamiento del elemento de lámina y nuevamente la necesidad de utilizar mallas finas de elementos de sólido. Finalmente el ejemplo del estampado de la lámina con costura muestra la potencialidad de la formulación propuesta y la posibilidad de modelar el estampado de láminas con diferentes espesores.

6. AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen el apoyo financiero de CONICET (Argentina) y a la Universidad Nacional de Córdoba (a través de SeCyT).

REFERENCIAS

- Estrada C. and Flores F. Avances en la formulación de elementos de lámina cuadrilátero sin grados de libertad rotacional. *Mecánica Computacional*, pages 1085–1110, 2008.
- Flores F. Imposición de restricciones multipunto en la modelización con elementos sin grados de libertad rotacionales. *Mecánica Computacional*, pages 2496–2512, 2007.
- NUMISHEET'93. *Second International Conference and Workshop on Numerical Simulation of 3D Sheet Forming Processes*. A. Makinouchi, E. Nakamachi, E. Oate, R.H. Wagoner (Eds.), Tokyo, Japan, 1993.
- Zienkiewicz O. and Taylor R. *The finite element method. Vol II: Solid Mechanics*. Butterworth-heinemann, 2000.