

SIMULAÇÃO NUMÉRICA TRIDIMENSIONAL EM PEÇAS DE CONCRETO ARMADO ATRAVÉS DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Giuliana F. F. Bono¹ e Américo Campos Filho²

¹ *Núcleo de Tecnologia, Centro Acadêmico do Agreste, Universidade Federal de Pernambuco, BR
104, Km 59, S/N Nova Caruaru, 55.002-970, Caruaru, Pernambuco, Brasil,
giuliana.franca@gmail.com*

² *Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Centro de Mecânica Aplicada e Computacional,
Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Av. Osvaldo Aranha 99, 3º andar, 90035-190
Porto Alegre, Rio Grande do Sul, Brasil, americo@ufrgs.br*

Palavras chave: Concreto Armado, Elementos Finitos, Modelos Constitutivos, Cargas Cíclicas.

Resumo. Este trabalho apresenta um modelo numérico para análise tridimensional de estruturas de concreto armado submetidas a cargas monótonas e cíclicas, utilizando o método dos elementos finitos. O modelo proposto para o concreto é um modelo ortotrópico e utiliza o conceito de deformação uniaxial equivalente. A relação tensão-deformação uniaxial equivalente é generalizada para levar em consideração as condições triaxiais de tensão, conforme proposto por Kwon (2000). Os parâmetros usados na curva tensão-deformação uniaxial equivalente são determinados a partir da superfície de ruptura definida no espaço de tensões principais. A implementação em elementos finitos está baseada na consideração de fissuras distribuídas com as fissuras girando segundo as direções de tensões principais. Implementou-se o modelo de armadura incorporada proposto por Elwi e Hruday (1989) para representar as barras de armadura. Por fim, apresentam-se resultados comparativos com ensaios experimentais e analíticos para demonstrar a validade do modelo numérico.

1 INTRODUÇÃO

Predizer precisamente a resposta do concreto, quando submetido a estados multiaxiais de tensões, tem sido o objetivo de muitas pesquisas, envolvendo estudos analíticos e experimentais. Esta tarefa tem encontrado muitas dificuldades em função da complexidade do comportamento deste material em decorrência de uma série de fatores, entre os quais pode-se citar: o concreto apresenta uma relação tensão-deformação não linear; formam-se fissuras quando o concreto é submetido a tensões de tração; o concreto apresenta deformações por fluência e retração ao longo do tempo; o comportamento do concreto é dependente da história de carga e o concreto apresenta uma expansão volumétrica nas proximidades da ruptura.

Nas últimas décadas, numerosos modelos constitutivos foram desenvolvidos para a análise de estruturas de concreto. Alguns modelos têm capacidade de descrever apenas certos aspectos do comportamento do concreto, ficando suas aplicações limitadas a poucas situações. Dentre as mais importantes características que um modelo para o concreto deve apresentar, podem-se destacar as seguintes: permitir uma representação geral e precisa do comportamento mecânico real do material; ter clareza nas formulações empregadas e viabilizar a implementação de um algoritmo robusto e ao mesmo tempo estável para determinação do comportamento não-linear.

Neste contexto, o objetivo deste trabalho é apresentar um modelo computacional para analisar o comportamento de peças de concreto armado submetidas a cargas monótonas ou cíclicas e a estados multiaxiais de tensões. Os modelos constitutivos foram implementados em um programa computacional, que utiliza o Método dos Elementos Finitos, para estruturas de concreto armado, inicialmente desenvolvido por Hinton (1988). Este programa utiliza elementos isoparamétricos hexaédricos lineares e quadráticos para a modelagem das estruturas de concreto. Para representar as barras de armadura, utiliza-se o modelo incorporado proposto por Elwi e Hruday (1989), estendido para o caso tridimensional.

2 MODELO CONSTITUTIVO PARA O CONCRETO

Neste trabalho, utiliza-se um modelo constitutivo elástico não-linear ortotrópico para representar o comportamento do concreto. O modelo é baseado naquele apresentado por Kwon (2000), tendo a capacidade de capturar a resposta do concreto quando solicitado por estados multiaxiais de tensões. Foram introduzidas algumas modificações no modelo de Kwon (2000), com a finalidade de aprimorá-lo.

2.1 Lei Constitutiva Tridimensional

A lei constitutiva tridimensional é considerada na forma ortotrópica, com os eixos de ortotropia paralelos aos eixos de tensões principais correntes. Então, a equação constitutiva é escrita com relação aos eixos de ortotropia da seguinte maneira:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}_0 \boldsymbol{\varepsilon} \quad (1)$$

onde, os vetores de tensões $\boldsymbol{\sigma}$ e deformações específicas $\boldsymbol{\varepsilon}$ são dados por:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{12} \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \end{Bmatrix} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \end{Bmatrix} \quad (2)$$

A matriz constitutiva para material ortotrópico \mathbf{D}_o é determinada por:

$$\mathbf{D}_o = \frac{1}{\Omega_c} \begin{bmatrix} E_1(1-\nu_{23}\nu_{32}) & E_1(\nu_{21}+\nu_{23}\nu_{31}) & E_1(\nu_{31}+\nu_{21}\nu_{32}) & 0 & 0 & 0 \\ E_2(\nu_{12}+\nu_{13}\nu_{32}) & E_2(1-\nu_{13}\nu_{31}) & E_2(\nu_{32}+\nu_{12}\nu_{31}) & 0 & 0 & 0 \\ E_3(\nu_{13}+\nu_{12}\nu_{23}) & E_3(\nu_{23}+\nu_{13}\nu_{21}) & E_3(1-\nu_{12}\nu_{21}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_{12}\Omega_c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_{23}\Omega_c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{31}\Omega_c \end{bmatrix} \quad (3)$$

onde, $\Omega_c = 1 - \nu_{21}\nu_{12} - \nu_{31}\nu_{13} - \nu_{32}\nu_{23} - \nu_{12}\nu_{23}\nu_{31} - \nu_{21}\nu_{32}\nu_{13}$; E_i é o módulo de elasticidade secante, na direção de ortotropia i (com $i = 1, 2, 3$); ν_{ij} é o coeficiente de Poisson; G_{ij} é o módulo de elasticidade transversal no plano $i-j$, sendo expresso por:

$$G_{ij} = \frac{E_i E_j}{E_i(1+\nu_{ij}) + E_j(1+\nu_{ji})} \quad (4)$$

Se os eixos de ortotropia forem considerados paralelos aos eixos das tensões principais correntes, a relação constitutiva fica reduzida a:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{\Omega_c} \begin{bmatrix} E_1(1-\nu_{23}\nu_{32}) & E_1(\nu_{21}+\nu_{23}\nu_{31}) & E_1(\nu_{31}+\nu_{21}\nu_{32}) \\ E_2(\nu_{12}+\nu_{13}\nu_{32}) & E_2(1-\nu_{13}\nu_{31}) & E_2(\nu_{32}+\nu_{12}\nu_{31}) \\ E_3(\nu_{13}+\nu_{12}\nu_{23}) & E_3(\nu_{23}+\nu_{13}\nu_{21}) & E_3(1-\nu_{12}\nu_{21}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{Bmatrix} \quad (5)$$

Os valores dos módulos de elasticidade secantes E_i e dos coeficientes de Poisson ν_{ij} são obtidos a partir de curvas tensão-deformação uniaxiais para o concreto, utilizando o conceito de *deformação uniaxial equivalente*, como apresentado em Franca (2008).

2.2 Curva Tensão-Deformação Uniaxial Equivalente para Carga Monótona

A combinação dos modelos de Popovics (1973) e Saenz (1964), chamada curva *Popovics-Saenz*, é expressa pela seguinte relação (Kwon, 2000):

$$\sigma_i = f_{ci} \frac{K_i \left(\frac{\varepsilon_{ui}}{\varepsilon_{ci}} \right)}{1 + A_i \left(\frac{\varepsilon_{ui}}{\varepsilon_{ci}} \right) + B_i \left(\frac{\varepsilon_{ui}}{\varepsilon_{ci}} \right)^2 + C_i \left(\frac{\varepsilon_{ui}}{\varepsilon_{ci}} \right)^3 + D_i \left(\frac{\varepsilon_{ui}}{\varepsilon_{ci}} \right)^{R_i}} \quad \text{com } i=1, 2, 3 \quad (6)$$

– Ramo ascendente: Se $\left(\frac{\varepsilon_{ui}}{\varepsilon_{ci}} \right) \leq 1$: $A_i = B_i = C_i = 0$; $D_i = (K_i - 1)$;

– Ramo descendente: Se $\left(\frac{\varepsilon_{ui}}{\varepsilon_{ci}}\right) > 1$: $A_i = C_i + K_i - 2$; $B_i = 1 - 2C_i$;

$$C_i = K_i \frac{(K_{\sigma i} - 1)}{(K_{\varepsilon i} - 1)^2} - \frac{1}{K_{\varepsilon i}}; D_i = 0.$$

onde, $K_i = E_o \frac{\varepsilon_{ci}}{f_{ci}}$; $K_{\varepsilon i} = \frac{\varepsilon_{fi}}{\varepsilon_{ci}}$; $K_{\sigma i} = \frac{f_{ci}}{f_{fi}}$; $R_i = \frac{K_i}{(K_i - 1)}$; E_o é o módulo de elasticidade inicial;

ε_{ui} é a deformação uniaxial equivalente na direção de ortotropia i ; f_{ci} , ε_{ci} são as tensões e deformações específicas do ponto de pico da curva; f_{fi} , ε_{fi} são as tensões e deformações específicas do ponto de controle no ramo descendente da curva, conforme apresentado em Franca (2008).

A curva de *Popovics-Saenz* permite a obtenção de ótimos resultados para o concreto simples. Entretanto, para elementos de concreto armado, esta curva não se mostrou adequada para considerar a colaboração do concreto entre fissuras (efeito de *tension-stiffening*). Assim, no presente trabalho utiliza-se a curva *Popovics-Saenz* para descrever apenas a resposta à compressão do concreto solicitado por cargas monótonas, como ilustrado na Figura 1. Para a resposta à tração do concreto é utilizada a formulação descrita a seguir. Quando $\varepsilon_{ui} \leq \varepsilon_{ci}$ tem-se que:

$$\sigma_i = E_o \varepsilon_{ui} \quad \text{com } i=1,2,3 \quad (7)$$

Porém, quando $\varepsilon_{ui} > \varepsilon_{ci}$, vale a expressão:

$$\sigma_i = \alpha_i f_{ci} \left(1 - \frac{\varepsilon_{ui}}{0,01}\right) \quad \text{com } i=1,2,3 \quad (8)$$

onde, α_i é o coeficiente de redução da tensão de fissuração, cujo valor depende do elemento a ser analisado. Para permitir um melhor ajuste com os resultados experimentais, adotou-se para a deformação ε_{ctu} (Figura 1) o valor 0,01.

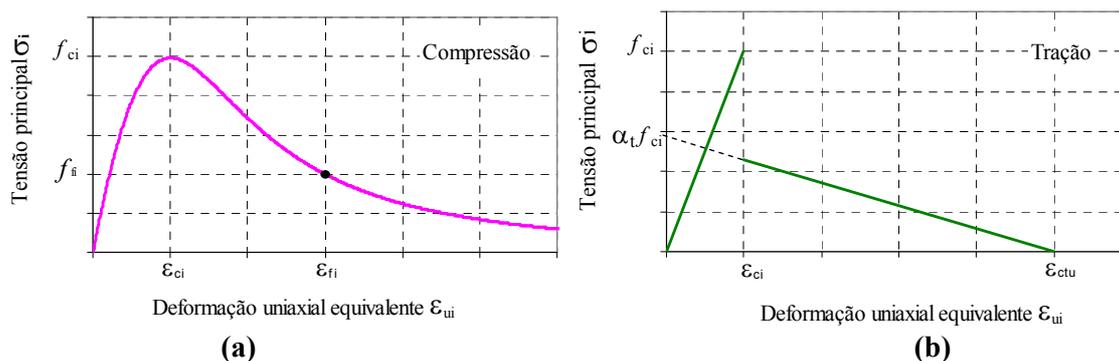


Figura 1 – Curvas tensão-deformação para o concreto submetido a cargas monótonas: (a) resposta à compressão; (b) resposta à tração.

2.3 A Superfície de Ruptura para o Concreto

Para definição das três curvas uniaxiais equivalentes é necessário a determinação das variáveis K_i , $K_{\varepsilon i}$, $K_{\sigma i}$, usadas na equação 6, que são funções das tensões e deformações específicas de pico f_{ci} e ε_{ci} . Estas tensões e deformações específicas de pico são calculadas a

partir de superficies de ruptura no espaço de tensões principais $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$. Entre as superfícies de ruptura mais utilizadas para descrição da resistência triaxial do concreto, têm-se a superfície de quatro parâmetros de Ottosen (1977) e a de cinco parâmetros de Willam-Warnke (1974), as quais foram implementadas neste trabalho, conforme apresentado em Franca (2008).

A partir da superfície de ruptura do concreto, podem-se determinar os valores das tensões de pico (f_{c1}, f_{c2}, f_{c3}) referentes às três direções para um determinado estado de tensões principais correntes $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$. Para calcular estas tensões de pico, utiliza-se o seguinte procedimento: Determina-se uma reta que passa pela origem do sistema de tensões principais e pelo ponto $M_c(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ de tensões correntes. Em seguida, prolonga-se esta reta até atingir a superfície de ruptura no ponto $M_r(f_{c1}, f_{c2}, f_{c3})$, conforme a Figura 2. A equação da reta que passa pela origem e pelo estado de tensões principais correntes $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ pode ser expressa como função das tensões octaédricas σ_{oct} e τ_{oct} , ou seja:

$$\sigma_{oct} - \left(\frac{\sigma_{oct}^c}{\tau_{oct}^c} \right) \tau_{oct} = 0 \quad (9)$$

onde, $\sigma_{oct}^c = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}$ é a tensão normal octaédrica corrente;

$\tau_{oct}^c = \frac{\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2}}{3}$ é a tensão de corte octaédrica corrente. Com a solução numérica do sistema de equações (equação da reta e equação da superfície de ruptura), obtêm-se as tensões octaédricas $(\sigma_{oct}^r, \tau_{oct}^r)$ no ponto de interseção da reta com a superfície de ruptura especificada. Com estas tensões octaédricas, podem-se determinar as tensões de pico através das expressões abaixo:

$$\begin{aligned} f_{c1} &= \sigma_{oct}^r + \sqrt{2} \tau_{oct}^r \cos(\theta) \\ f_{c2} &= \sigma_{oct}^r + \sqrt{2} \tau_{oct}^r \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) \\ f_{c3} &= \sigma_{oct}^r + \sqrt{2} \tau_{oct}^r \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \end{aligned} \quad (10)$$

Após a determinação das tensões de pico, empregam-se as expressões propostas por Bouzaiene e Massicotte (1997) para calcular as deformações específicas de pico $(\varepsilon_{c1}, \varepsilon_{c2}, \varepsilon_{c3})$. Estas expressões são dadas por:

$$\varepsilon_{ci} = \varepsilon_c \left[-1,6 \left(\frac{f_{ci}}{f_c} \right)^3 + 2,25 \left(\frac{f_{ci}}{f_c} \right)^2 + 0,35 \left(\frac{f_{ci}}{f_c} \right) \right], \text{ para } \left(\frac{f_{ci}}{f_c} \right) \leq 1 \quad (11)$$

$$\varepsilon_{ci} = \varepsilon_c \left[3,0 \left(\frac{f_{ci}}{f_c} \right) - 2,0 \right], \text{ para } 1 < \left(\frac{f_{ci}}{f_c} \right) \leq 1,27 \quad (12)$$

$$\varepsilon_{ci} = \varepsilon_c \left[5,312 \left(\frac{f_{ci}}{f_c} \right) - 4,936 \right], \text{ para } \left(\frac{f_{ci}}{f_c} \right) > 1,27 \quad (13)$$

onde, f_c é a resistência à compressão uniaxial do concreto; ε_c é a deformação específica correspondente à f_c .

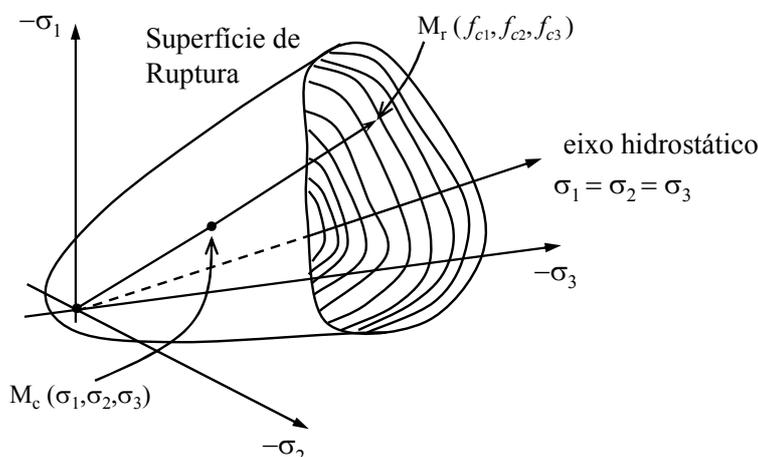


Figura 2 – Determinação das tensões de pico (f_{c1}, f_{c2}, f_{c3}) do concreto.

2.4 Curva Tensão-Deformação Uniaxial Equivalente Para Carga Cíclica

Para a consideração de um carregamento cíclico, utiliza-se a curva de *Popovics-Saenz*, representada pela equação 6, introduzindo-se algumas modificações nas coordenadas da origem e do ponto de pico da curva tensão-deformação uniaxial equivalente para representar as situações de descarga e recarga. Assim, as equações para o *processo de descarga* são as seguintes:

$$\sigma_i = \sigma_{di} - \frac{(\sigma_{di} - \sigma_{oi}) K_i \left(\frac{\varepsilon_{di} - \varepsilon_{ui}}{\varepsilon_{di} - \varepsilon_{oi}} \right)}{1 + A_i \left(\frac{\varepsilon_{di} - \varepsilon_{ui}}{\varepsilon_{di} - \varepsilon_{oi}} \right) + B_i \left(\frac{\varepsilon_{di} - \varepsilon_{ui}}{\varepsilon_{di} - \varepsilon_{oi}} \right)^2 + C_i \left(\frac{\varepsilon_{di} - \varepsilon_{ui}}{\varepsilon_{di} - \varepsilon_{oi}} \right)^3 + D_i \left(\frac{\varepsilon_{di} - \varepsilon_{ui}}{\varepsilon_{di} - \varepsilon_{oi}} \right)^{R_i}} \quad (14)$$

– Ramo ascendente: Se $\left(\frac{\varepsilon_{di} - \varepsilon_{ui}}{\varepsilon_{di} - \varepsilon_{oi}} \right) \leq 1$: $A_i = B_i = C_i = 0$; $D_i = (K_i - 1)$

onde, $K_i = E_{di} \left(\frac{\varepsilon_{di} - \varepsilon_{oi}}{\sigma_{di} - \sigma_{oi}} \right)$; $R_i = \frac{K_i}{(K_i - 1)}$; ε_{di} , σ_{di} são a deformação específica uniaxial equivalente e a tensão principal na direção i no momento em que ocorreu a *descarga*; ε_{oi} , σ_{oi} são a deformação específica e a tensão do *ponto focal* correspondente à direção i ;

– Ramo descendente: Se $\left(\frac{\varepsilon_{di} - \varepsilon_{ui}}{\varepsilon_{di} - \varepsilon_{oi}} \right) > 1$: *curva monótona* – equação 6 ou equação 8.

O *processo de recarga* é obtido pelas seguintes equações:

$$\sigma_i = \sigma_{ri} - \frac{(\sigma_{ri} - \sigma_{di})K_i \left(\frac{\varepsilon_{ri} - \varepsilon_{ui}}{\varepsilon_{ri} - \varepsilon_{di}} \right)}{1 + A_i \left(\frac{\varepsilon_{ri} - \varepsilon_{ui}}{\varepsilon_{ri} - \varepsilon_{di}} \right) + B_i \left(\frac{\varepsilon_{ri} - \varepsilon_{ui}}{\varepsilon_{ri} - \varepsilon_{di}} \right)^2 + C_i \left(\frac{\varepsilon_{ri} - \varepsilon_{ui}}{\varepsilon_{ri} - \varepsilon_{di}} \right)^3 + D_i \left(\frac{\varepsilon_{ri} - \varepsilon_{ui}}{\varepsilon_{ri} - \varepsilon_{di}} \right)^{R_i}} \quad (15)$$

– Ramo ascendente: Se $\left(\frac{\varepsilon_{ri} - \varepsilon_{ui}}{\varepsilon_{ri} - \varepsilon_{di}} \right) \leq 1$: $A_i = B_i = C_i = 0$; $D_i = (K_i - 1)$

onde, $K_i = E_{di} \left(\frac{\varepsilon_{ri} - \varepsilon_{di}}{\sigma_{ri} - \sigma_{di}} \right)$; $R_i = \frac{K_i}{(K_i - 1)}$; ε_{di} , σ_{di} são a deformação específica uniaxial equivalente e a tensão principal na direção i , no momento em que ocorreu a *descarga*; ε_{ri} , σ_{ri} são a deformação específica uniaxial equivalente e a tensão principal na direção i , no momento em que ocorreu a *recarga*;

– Ramo descendente: Se $\left(\frac{\varepsilon_{ri} - \varepsilon_{ui}}{\varepsilon_{ri} - \varepsilon_{di}} \right) > 1$: *curva monótona* – equação 6 ou equação 8.

2.5 Critério de Carga, Descarga e Recarga

Para identificação dos processos de carga e descarga, adota-se uma função de carga, F , conforme apresentado abaixo:

$$\begin{aligned} F &> F_{max}, && \text{Carga} \\ F &\leq F_{max}, && \text{Descarga} \end{aligned} \quad (16)$$

onde, F_{max} – é o valor máximo da função de carga, F , em um determinado passo de carga. No presente trabalho, esta função de carga é definida em termos das deformações uniaxiais equivalentes como sendo:

$$F = \sqrt{\varepsilon_{u1}^2 + \varepsilon_{u2}^2 + \varepsilon_{u3}^2} \quad (17)$$

Para a identificação do processo de descarga e recarga em um determinado ciclo de histerese, necessita-se definir uma outra função de carga local, F_{local} . Segundo Kwon (2000), esta função pode ser calculada pela seguinte equação:

$$F_{local} = \sqrt{(\varepsilon_{u1} - \varepsilon_{d1})^2 + (\varepsilon_{u2} - \varepsilon_{d2})^2 + (\varepsilon_{u3} - \varepsilon_{d3})^2} \quad (18)$$

onde, ε_{di} é a deformação específica onde iniciou a descarga, com $i=1,2,3$. Esta função F_{local} identifica a descarga e a recarga dentro da curva reversível, como se segue:

$$\begin{aligned} \Delta F_{local} &\geq 0, && \text{Descarga} \\ \Delta F_{local} &< 0, && \text{Recarga} \end{aligned} \quad (19)$$

onde, $\Delta F_{local} = F_{local}^j - F_{local}^{j-1}$ é o incremento da função de carga local entre dois passos consecutivos j e $(j-1)$.

3 MODELO CONSTITUTIVO PARA O AÇO

Basicamente, as barras de aço suportam esforços em suas direções axiais, ou seja, as solicitações perpendiculares ao eixo das barras são desprezadas. Neste trabalho, adotou-se para a curva tensão-deformação monótona um diagrama bilinear com endurecimento definido por:

$$\begin{aligned}\sigma_s &= \varepsilon_s E_{so} && \text{se } |\varepsilon_s| < \varepsilon_y \\ \sigma_s &= +f_y + (\varepsilon_s - \varepsilon_y) E_{s1} && \text{se } \varepsilon_y \leq \varepsilon_s \leq \varepsilon_{su} \\ \sigma_s &= -f_y + (\varepsilon_s + \varepsilon_y) E_{s1} && \text{se } \varepsilon_s \leq -\varepsilon_y\end{aligned}\quad (20)$$

onde, ε_{su} é a deformação específica correspondente à tensão última, f_{su} , do aço; σ_s , ε_s são a tensão e a deformação específica na barra de armadura; f_y , ε_y são a tensão e a deformação específica de escoamento; E_{so} é o módulo de elasticidade na origem; E_{s1} é o módulo de elasticidade tangente do trecho de endurecimento.

Para modelagem do comportamento cíclico, implementou-se o modelo desenvolvido por Menegotto e Pinto (1973).

3.1 Modelo Menegotto e Pinto (1973)

Neste modelo cíclico, antes de ocorrer a primeira descarga, utilizam-se as equações (20). A partir da primeira inversão de carga, os trechos de descarga e recarga são definidos como descrito a seguir. Para definição das curvas de descarga e recarga, tem-se, inicialmente, que determinar os valores das deformações específicas e tensões nos pontos A e B, indicados na Figura 3. O ponto A(ε_r , σ_r) é o último ponto antes de ocorrer uma descarga ou recarga no processo cíclico. O ponto B(ε_o , σ_o) é o ponto onde as retas (a) e (b) se interceptam. Com a determinação dos pontos A e B para uma determinada inversão de carga, pode-se definir o comportamento cíclico por:

$$\sigma_s = \sigma_r + \sigma_s^* (\sigma_o - \sigma_r) \quad (21)$$

onde, σ_o , ε_o são a tensão e a deformação específica no ponto B; σ_r , ε_r são a tensão e a deformação específica no ponto A. E as tensões normalizadas σ_s^* são determinadas por:

$$\sigma_s^* = b \varepsilon_s^* + (1-b) \frac{\varepsilon_s^*}{\sqrt[R]{1+(\varepsilon_s^*)^R}} \quad (22)$$

onde, $b = \frac{E_{s1}}{E_{so}}$ é o fator de endurecimento do aço; $\varepsilon_s^* = \frac{\varepsilon_s - \varepsilon_r}{\varepsilon_o - \varepsilon_r}$ é a deformação específica

normalizada, correspondente à σ_s^* ; $R = R_o - \frac{a_1 \xi}{a_2 + \xi}$ é um parâmetro que influencia a forma

da curva de transição e representa o *efeito Bauschinger*; R_o , a_1 , a_2 são parâmetros determinados experimentalmente.

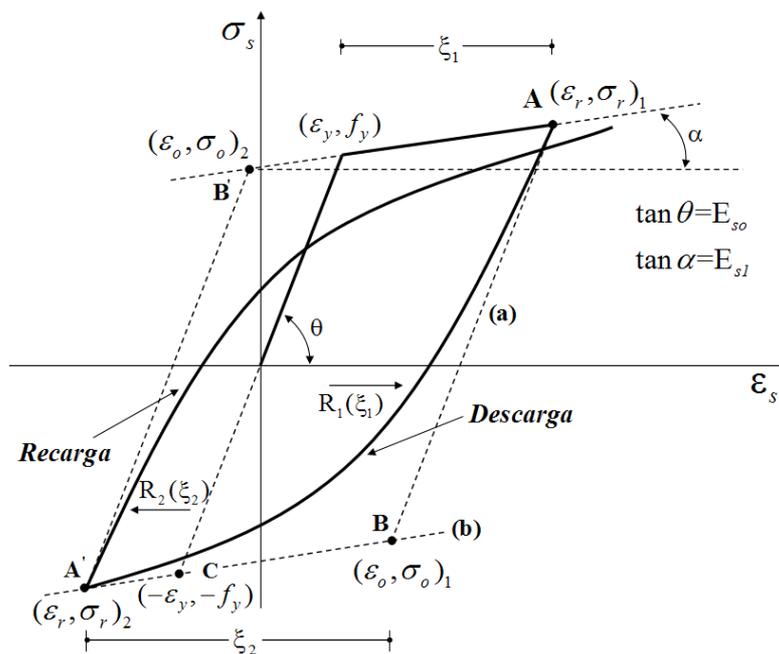


Figura 3 – Diagrama para o aço sob carregamento cíclico.

4 APLICAÇÕES NUMÉRICAS

4.1 Ensaio com Carga Cíclica de Compressão em Concreto Simples

Para validar o modelo de concreto solicitado por carga cíclica, utilizou-se um ensaio experimental realizado por Sinha et al. (1964) e comparado com o resultado numérico obtido pelo modelo adotado para situações com carga cíclica (Figura 4). Neste ensaio utilizou-se um concreto de resistência à compressão uniaxial $f_c = 2.65 \text{ kN/cm}^2$ e coeficiente de Poisson inicial $\nu_o = 0,20$. Observou-se que o modelo adotado para o concreto consegue representar bem a degradação da rigidez e da resistência do concreto quando submetido a diversos processos de carga, descarga e recarga. Pode-se dizer que este modelo numérico apresenta uma boa precisão frente aos valores experimentais apresentados por Sinha et al. (1964).

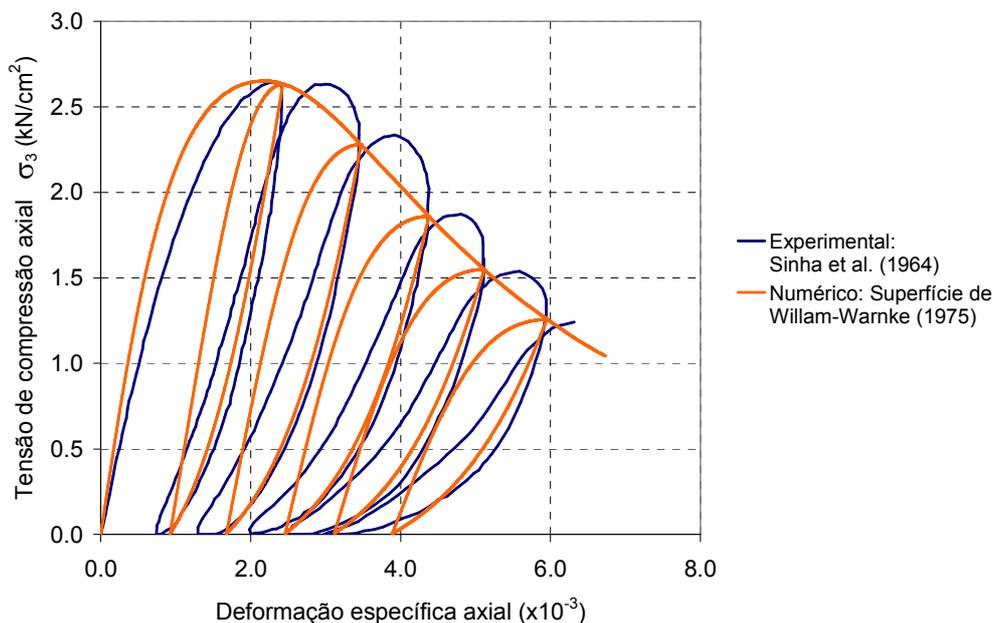


Figura 4 – Ensaio experimental e numérico com carga cíclica: $f_c = 2.65 \text{ kN/cm}^2$ e $\nu_o = 0,20$.

4.2 Vigas de Concreto Armado

Neste item, comparam-se os resultados obtidos através do modelo computacional com valores determinados experimentalmente para vigas de concreto armado. Estes resultados experimentais foram apresentados por Bresler e Scordelis (1963) e refere-se a um estudo sobre o comportamento, a fissuração e as cargas de rupturas de doze vigas de concreto armado submetidas ao cisalhamento.

Todas as vigas ensaiadas por Bresler e Scordelis (1963) possuem seção transversal retangular e os detalhes destas seções transversais podem ser observados na Figura 5. Detalhes adicionais são apresentados na Tabela 1. Vale salientar que as vigas da série OA não contêm estribos. As propriedades do material com relação ao concreto, à armadura longitudinal e aos estribos são apresentadas na Tabela 2. Todas as vigas foram submetidas a cargas concentradas monótonas aplicadas no centro das vigas biapoiadas.

Para a validação da análise numérica, foram utilizadas as curvas do tipo carga-deslocamento, como apresentado na Figura 6. Na Tabela 3, apresentam-se os resultados das cargas de ruptura obtidos pelo programa numérico e comparados com os resultados experimentais. De um modo geral obteve-se ótima correlação entre as respostas numéricas e os resultados experimentais de Bresler e Scordelis (1963). As cargas de ruptura obtidas pelo modelo numérico ficaram muito próximas das respostas experimentais para a maioria das vigas analisadas.

Tabela 1 – Detalhes das vigas ensaiadas por Bresler e Scordelis (1963).

Viga	b (cm)	h (cm)	d (cm)	L (cm)	As (cm ²)	As' (cm ²)	Estribos
OA-1	31,0	55,6	46,1	366	25,88 (4 ϕ 28,7mm)	-	-
OA-2	30,5	56,1	46,6	457	32,35 (5 ϕ 28,7mm)	-	-
OA-3	30,7	55,6	46,2	640	38,81 (6 ϕ 28,7mm)	-	-
A-1	30,7	56,1	46,6	366	25,88 (4 ϕ 28,7mm)	2,53 (2 ϕ 12,7mm)	ϕ 6,4mm c / 21cm
A-2	30,5	55,9	46,4	457	32,35 (5 ϕ 28,7mm)	2,53 (2 ϕ 12,7mm)	ϕ 6,4mm c / 21cm
A-3	30,7	56,1	46,6	640	38,81 (6 ϕ 28,7mm)	2,53 (2 ϕ 12,7mm)	ϕ 6,4mm c / 21cm
B-1	23,1	55,6	46,1	366	25,88 (4 ϕ 28,7mm)	2,53 (2 ϕ 12,7mm)	ϕ 6,4mm c / 19cm
B-2	22,9	56,1	46,6	457	25,88 (4 ϕ 28,7mm)	2,53 (2 ϕ 12,7mm)	ϕ 6,4mm c / 19cm
B-3	22,9	55,6	46,1	640	32,35 (5 ϕ 28,7mm)	2,53 (2 ϕ 12,7mm)	ϕ 6,4mm c / 19cm
C-1	15,5	55,9	46,4	366	12,94 (2 ϕ 28,7mm)	2,53 (2 ϕ 12,7mm)	ϕ 6,4mm c / 21cm
C-2	15,2	55,9	46,4	457	25,88 (4 ϕ 28,7mm)	2,53 (2 ϕ 12,7mm)	ϕ 6,4mm c / 21cm
C-3	15,5	55,4	45,9	640	25,88 (4 ϕ 28,7mm)	2,53 (2 ϕ 12,7mm)	ϕ 6,4mm c / 21cm

Tabela 2 – Propriedades dos materiais: vigas ensaiadas por Bresler e Scordelis (1963).

CONCRETO			
Viga	f_c (kN/cm ²)	f_t (kN/cm ²)	f_i (kN/cm ²)
OA-1	2,25	0,396	0,264
OA-2	2,37	0,434	0,289
OA-3	3,76	0,414	0,276
A-1	2,41	0,385	0,257
A-2	2,43	0,372	0,248
A-3	3,50	0,434	0,289
B-1	2,48	0,399	0,266
B-2	2,32	0,376	0,251
B-3	3,87	0,421	0,281
C-1	2,96	0,422	0,281
C-2	2,38	0,393	0,262
C-3	3,50	0,385	0,257
ARMADURA			
	ϕ (cm)	f_y (kN/cm ²)	E_s (kN/cm ²)
estribos	0,64	32,5	18961,3
Longitudinal superior	1,27	34,5	20133,4
Longitudinal inferior – Séries 1 e 2	2,87	55,5	21788,2

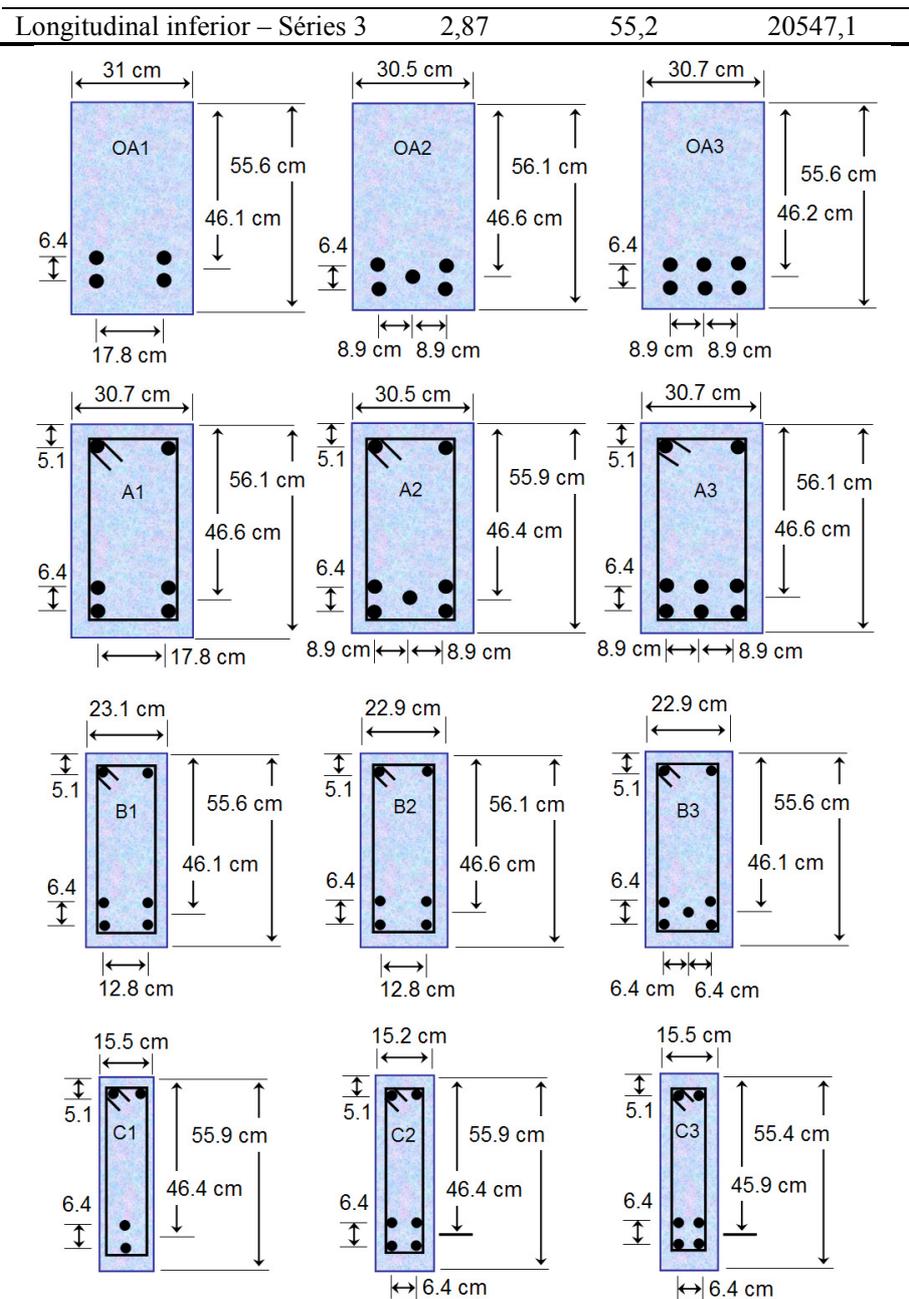


Figura 5 – Detalhes das seções transversais das vigas de Bresler e Scordelis (1963).

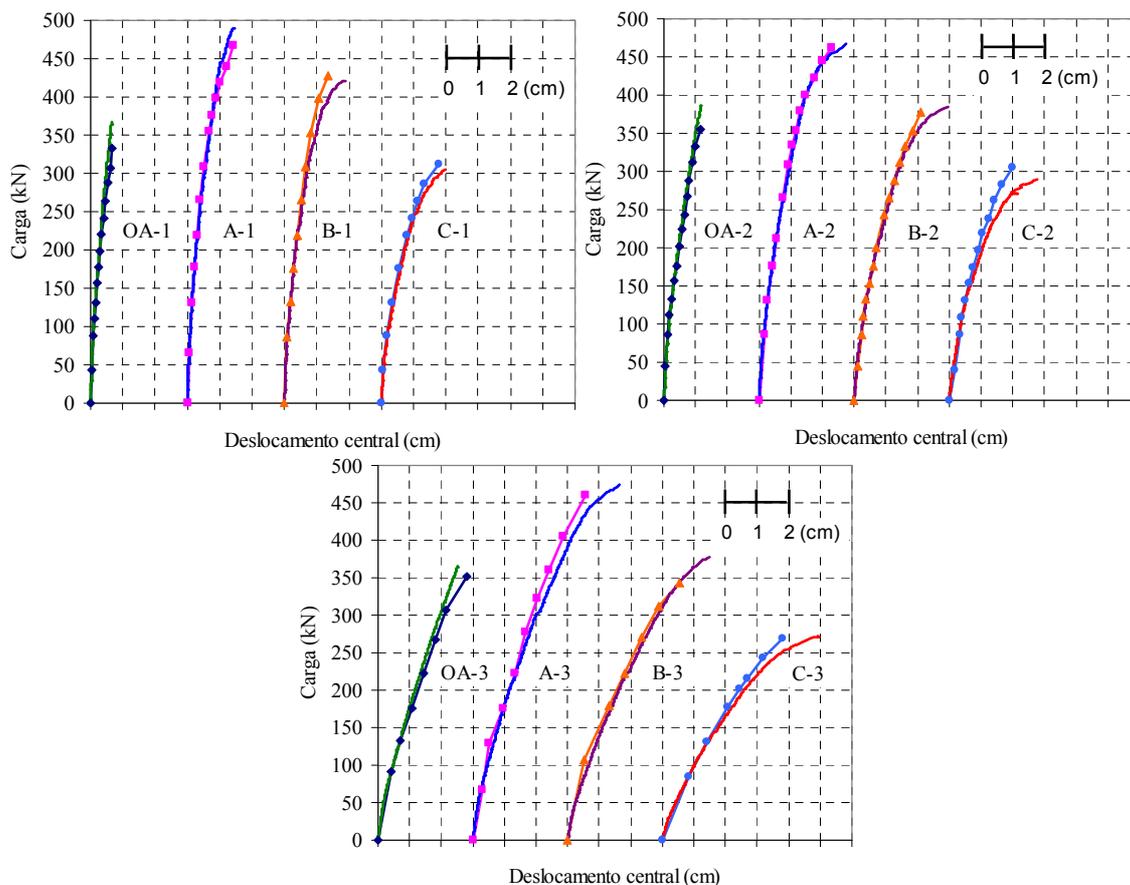


Figura 6 – Resultados comparativos com as vigas ensaiadas por Bresler e Scordelis (1963): Experimental – linha com símbolo ; Numérico – linha contínua.

Tabela 3 – Resultados obtidos nas vigas ensaiadas por Bresler e Scordelis (1963).

Carga de ruptura			
Viga	P_{u-exp} (kN)	P_{u-num} (kN)	P_{u-exp} / P_{u-num}
OA-1	334	368	0,91
OA-2	356	387	0,92
OA-3	378	366	1,03
A-1	467	491	0,95
A-2	489	467	1,05
A-3	468	474	0,99
B-1	443	422	1,05
B-2	400	384	1,04
B-3	354	378	0,94
C-1	311	305	1,02
C-2	325	290	1,12
C-3	269	273	0,99
Média			1,001
Coefficiente de variação (%)			6,39

4.3 Parede submetida a Carregamento Cíclico

Neste item, comparam-se os resultados obtidos através do modelo computacional com valores determinados experimentalmente para uma parede de seção retangular (R2) de concreto armado, para verificar a validade do modelo adotado para simular o comportamento cíclico do concreto armado. Estes resultados experimentais foram apresentados por Elmorsi et al. (1998) e refere-se a um estudo sobre o comportamento cíclico de paredes, realizado por Oesterle et al. (1978). As dimensões da parede de seção transversal retangular (R2) são mostradas na Figura 7. As propriedades dos materiais e taxas de armadura são apresentadas na Tabela 4. A Figura 8 mostra as curvas carga-deslocamento, numérica e experimental, para a parede em estudo. Pode-se dizer que de um modo geral obteve-se ótima correlação entre as respostas numérica e experimental.

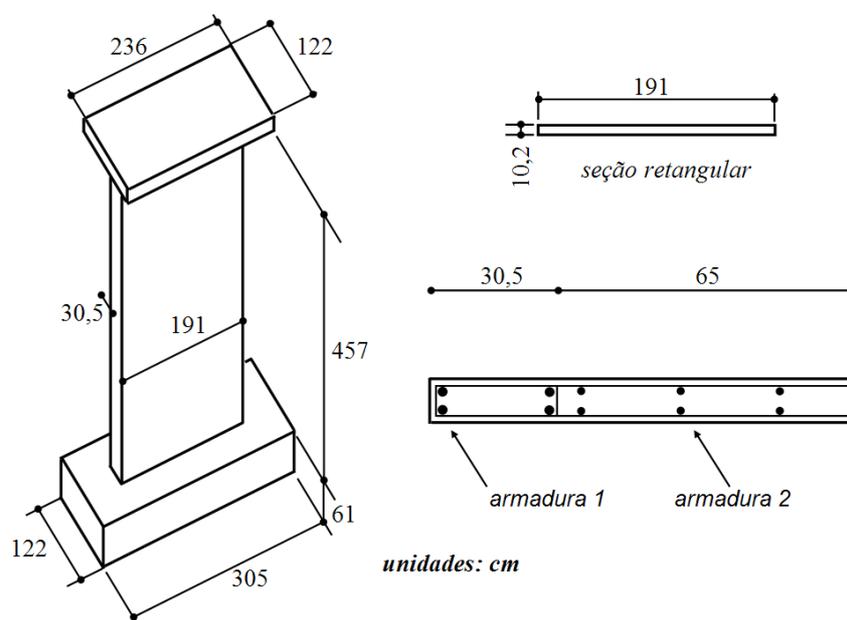


Figura 7 – Detalhes da seção transversal da parede R2 ensaiada por Oesterle et al. (1978).

Tabela 4 – Propriedades dos materiais utilizados na parede R2 ensaiada por Oesterle et al. (1978).

Seção transversal	Parede R2
Resistência à compressão do concreto f_c (kN/cm ²)	4.65
Tensão de escoamento da armadura vertical: <i>armadura 1</i> (kN/cm ²)	45.02
Tensão de escoamento da armadura vertical: <i>armadura 2</i> (kN/cm ²)	53.51
Tensão de escoamento da armadura horizontal (kN/cm ²)	53.51
Taxa de armadura: <i>armadura 1</i> (%)	4.00
Taxa de armadura: <i>armadura 2</i> (%)	0.25
Taxa de armadura horizontal (%)	0.31

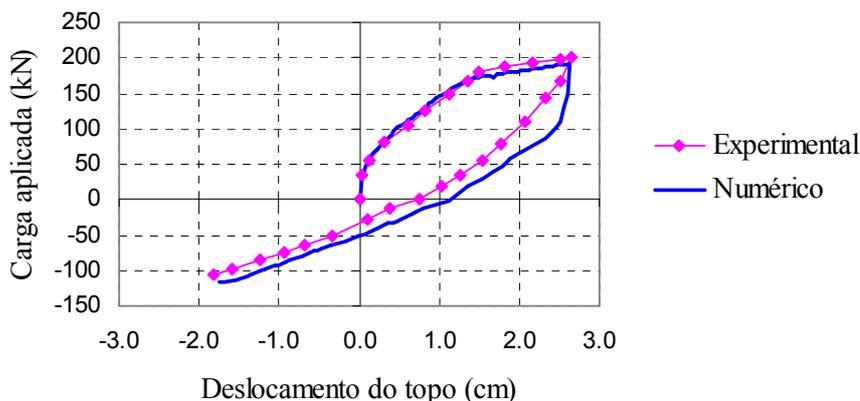


Figura 8 – Resultados comparativos da parede R2 ensaiada por Oesterle et al. (1978).

5 CONCLUSÕES

Apresentou-se, no presente trabalho, uma formulação geral para análise não-linear por elementos finitos de peças de concreto armado solicitadas por cargas monótonas e cíclicas. A lei constitutiva utilizada para o concreto é uma lei ortotrópica com eixos de ortotropia paralelos aos eixos de tensões principais correntes. Para determinação das tensões de pico em cada uma das direções de tensões principais, o programa permite a utilização de dois critérios de ruptura tridimensionais: o critério de Willam-Warke (1974) e o critério de Ottosen (1977). O modelo descreve bem a resposta do concreto submetido a diversos tipos de carregamentos, sendo capaz de representar o esmagamento e a fissuração do concreto. Para consideração do concreto fissurado, utilizou-se o conceito de fissuras distribuídas. Para a simulação de cargas cíclicas, utilizou-se a curva de *Popovics-Saenz* modificada. Introduziram-se modificações nas coordenadas da origem e do pico desta curva, quando o concreto for submetido à descarga ou recarga.

Os modelos foram implementados em um programa em elementos finitos desenvolvido por Hinton (1979). Para introduzir as barras de armadura, no modelo de elementos finitos, estendeu-se o modelo incorporado, proposto por Elwi e Hrudey (1989), para uma situação tridimensional. Como este modelo considera que as barras de aço resistem apenas a esforços axiais, implementou-se um modelo constitutivo uniaxial para representar o comportamento do aço. A curva tensão-deformação monótona adotada para o aço é elástica bilinear com endurecimento. A resposta cíclica do aço é obtida através do modelo proposto por Menegotto e Pinto (1973). Este modelo consegue representar bem o comportamento cíclico do aço. As comparações com resultados de ensaios demonstram uma ótima concordância das previsões do modelo numérico com os valores experimentais.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- T.A. Balan, E. Spacone e M. Kwon. A 3D hypoplastic model for cyclic analysis of concrete structures. *Engineering Structures*, 23: 333-342, 2001.
- A. Bouzaiene e B. Massicotte. Hypoelastic tridimensional model for nonproportional loading of plain concrete. *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, 123(11): 1111-1120, 1997.
- B. Bresler e A.C. Scordelis. Shear strength reinforced concrete beams. *ACI Journal*, 60(1): 51-72, 1963.

- M. Elmorsi, M. Reza Kianoush e W.K. Tso. Nonlinear analysis of cyclically loaded reinforced concrete structures. *ACI Structural Journal*, 95(6): 725-739, 1998.
- A.E. Elwi e M. Hrudey. Finite element model for curved embedded reinforcement. *Journal of Engineering Mechanics*, New York, ASCE, 115(4): 740-754, 1989.
- G.F. Franca. *Modelos Constitutivos para Análise Tridimensional de Estruturas de Concreto Armado através do Método dos Elementos Finitos*. Tese de Doutorado, PPGEC/UFRGS, Porto Alegre, Brasil, Abril, 2008.
- E. Hinton. *Numerical methods and software for dynamic analysis of plates and shells*. Swansea: Pineridge Press, 1988.
- M. Kwon. *Three dimensional finite element analysis for reinforced concrete members*. Thesis – Graduate School, University of Colorado, USA, 2000.
- M. Menegotto e P.E. Pinto. Method of analysis for cyclically loaded reinforced concrete plane frames including changes in geometry and non-elastic behavior of elements under combined normal force and bending. *Symposium on Resistance and Ultimate Deformability of Structures Acted on by Well Defined Repeated Loads*, IABSE Reports, v. 13, Lisboa, 1973.
- R.G. Oesterle, A.E. Fiorato, J.E. Johal, H.G. Carpenter, H.G. Russel e W.G. Corley. *Earthquake resistance structural walls – Tests of isolated walls – Phase II*. SPCA Construction Technology Laboratory / National Science Foundation, Portland Cement Association, Washington, 1978. (*apud* Elmorsi et al., 1998)
- N.S. Ottosen. A failure criterion for concrete. *Journal of Engineering Mechanics Division, ASCE*, 103(EM4): 527-627, 1977.
- S. Popovics. A numerical approach to the complete stress-strain curve of concrete. *Cement and Concrete Research*, 3(5): 583-599, 1973.
- B.P. Sinha, K.H. Gerstle e L.G. Tulin. Stress-strain relations for concrete under cyclic loading. *ACI Journal*, Proceedings, 61(2): 195-211, 1964.
- K.J. Willam e E.P. Warnke. Constitutive models for the triaxial behavior of concrete. *International Association of Bridge Structures*, Proceeding, 19: 1-30, 1975.