

REVISITA AL ELEMENTO DE LÁMINA TLLL. ESTABILIZACIÓN DEL CORTE Y MEJORA MEMBRANAL

Fernando G. Flores

*Departamento de Estructuras, Universidad Nacional de Córdoba, Casilla de Correo 916,
5000 Córdoba-Argentina, y CONICET, fflores@efn.uncor.edu, <http://www.efn.unc.edu>*

Palabras Clave:

Elementos Finitos, Láminas, Estabilización.

Resumen.

En el presente trabajo se vuelve sobre un un viejo elemento triangular (Zárate, Oñate y Flores, IJN-ME, (37), 2569-2582, 1994), deformable por corte con interpolación lineal para desplazamientos, giros y deformación de corte (TLLL). Los desplazamientos se interpolan linealmente a partir de los vértices. Las rotaciones se interpolan a partir de nudos a mitad de cada lado y resultan no conformes. En tanto que para las deformaciones de corte transversal se interpolan linealmente a partir de valores definidos sobre cada lado usando una aproximación de Hu-Washizu. El elemento resulta entonces de deformación membranar y curvatura constante y corte transversal lineal. Sus principales desventajas es que el comportamiento membranar es pobre y que requiere un mayor orden de integración para el corte que para los otros esfuerzos. Esto último limita su uso en problemas con no linealidad material pues al utilizar un punto de integración para todos los esfuerzos (subintegrar el corte) puede aparecer un modo espurio de deformación débilmente propagable entre elementos.

El objetivo de este trabajo se divide en dos partes: (a) Incluir una aproximación membranar en deformaciones impuestas basada en una interpolación no conforme sobre una parcela de cuatro triángulos. (b) presentar una metodología para estabilizar físicamente el elemento cuando se usa un punto de integración para los esfuerzos de corte transversal.

El comportamiento del elemento se evalúa usando ejemplos lineales y no lineales.

1. INTRODUCCIÓN

El desarrollo de elementos finitos de láminas sigue siendo un área de intensa investigación. Tanto en elementos deformables por corte (principalmente en formulaciones basados en la aproximación de "sólido degenerado", como por ejemplo la Referencia Reese (2007)) como en elementos basados en la teoría clásica de láminas donde los modelos sin rotaciones han crecido notablemente. En este último caso las aproximaciones basadas en métodos de Galerkin discontinuos para elementos de alto orden muestran importantes avances [Dung y Wells (2008)]. Sin embargo para aplicaciones industriales se siguen prefiriendo los elementos simples.

En el presente trabajo se vuelve sobre un un viejo elemento triangular [Zárate et al. (1994)], deformable por corte [Simo y Fox (1989)] con interpolación lineal para desplazamientos, giros y deformación de corte (TLLL). Los desplazamientos se interpolan linealmente a partir de los vértices. Las rotaciones se interpolan a partir de nudos a mitad de cada lado y resultan no conformes. En tanto que para las deformaciones de corte transversal se interpolan linealmente a partir de valores definidos sobre cada lado usando una aproximación de Hu-Washizu. El elemento resulta entonces de deformación membranal y curvatura constante y corte transversal lineal. Sus principales desventajas es que el comportamiento membranal es pobre y que requiere un mayor orden de integración para el corte que para los otros esfuerzos. Esto último limita su uso en problemas con no linealidad material pues al utilizar un punto de integración para todos los esfuerzos (subintegrar el corte) puede aparecer un modo espurio de deformación propagable entre elementos. Las ventajas por otro lado son es su sencillez, la posibilidad de considerar relaciones constitutivas que incluyan deformaciones de corte transversal y que el elemento no bloquea por cortante. La motivación de volver sobre este elemento es observar si eliminando las desventajas mencionadas el elemento tiene un buen comportamiento en aplicaciones industriales.

El objetivo de este trabajo se divide en dos partes: (a) presentar una metodología para estabilizar físicamente el elemento cuando se usa un punto de integración para los esfuerzos de corte transversal. (b) Incluir una aproximación membranal en deformaciones impuestas basada en una interpolación no conforme sobre una parcela de cuatro triángulos.

En la siguiente sección se resumen con leves cambios de notación la formulación original del elemento TLLL para problemas elásticos. Luego se presenta una técnica para estabilizar el esfuerzo de corte transversal en problemas con no linealidad material (un punto de integración). En la sección 4 se resume la estrategia para mejorar el comportamiento membranal. En la sección 5 se presentan experimentos numéricos lineales y no lineales a los fines de evaluar las mejoras introducidas. Finalmente se presentan algunas conclusiones.

1.1. Formulación del elemento TLLL

El elemento TLLL es un triángulo de 6 nudos de lados rectos con diferentes grados de libertad en nudos vértices que en nudos sobre los lados. Los nudos vértices definen la posición de la superficie media y las incógnitas nodales son los (3) desplazamientos de dicha superficie, en tanto que los nudos sobre los lados definen el campo director y las incógnitas son las (2) rotaciones en el plano del campo director.

1.1.1. Geometría de la superficie media

La geometría de la superficie media φ queda entonces definida por la posición de los nudos vértices

$$\varphi = \sum_{I=1}^3 L^I \varphi^I \quad (1)$$

donde las L^I son las habituales coordenadas de área triangulares [Zienkiewicz y Taylor (2000)]

$$L^1 = \zeta \quad L^2 = \xi \quad L^3 = \eta \quad (2)$$

luego la interpolación es lineal y la geometría es facetada.

1.1.2. Campo director

El campo director se define en los nudos medios de los lados y se interpola linealmente

$$\tilde{\mathbf{t}} = \sum_{J=4}^6 N^J \mathbf{t}^J \quad (3a)$$

$$\mathbf{t} = \frac{\tilde{\mathbf{t}}}{\|\tilde{\mathbf{t}}\|} \quad (3b)$$

donde (el nudo J se define como el opuesto al nudo vértice $J - 3$, debido a que esto no es estándar, se realiza a nivel interno dentro del código). Las funciones de forma asociadas son:

$$N^4 = 1 - 2\zeta \quad (4a)$$

$$N^5 = 1 - 2\xi \quad (4b)$$

$$N^6 = 1 - 2\eta \quad (4c)$$

y \mathbf{t}^J es el valor del campo director en el nodo J . Esta interpolación es claramente no-conforme ya que en cada lado (interfaz entre elementos) sólo se asegura la continuidad a la mitad del lado.

1.2. Comportamiento membranal:

El comportamiento membranal es estándar. Las deformaciones se calculan directamente a partir de la interpolación lineal (1), corresponde al triángulo de deformación constante (TDC). La configuración original (supraíndice 0), permite evaluar las matrices Jacobianas de la transformación isoparamétrica para la evaluación de las derivadas cartesianas de las funciones de forma. Para lo cual primero se definen \mathbf{t}_1 y \mathbf{t}_2 que son vectores unitarios ortogonales sobre el plano tangente original en las direcciones cartesianas locales convenientemente elegidas. Luego las derivadas cartesianas son.

$$\begin{bmatrix} L_1^I \\ L_2^I \end{bmatrix} = \frac{1}{2A^0} \begin{bmatrix} -b_I \\ a_I \end{bmatrix} \quad (5)$$

donde definiendo el vector "lado"

$$\mathbf{l}_I = \varphi^K - \varphi^J$$

con $I - J - K$ la secuencia de conectividades, sus proyecciones

$$\begin{bmatrix} -b_I \\ a_I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{l}_I \cdot \mathbf{t}_2 \\ \mathbf{l}_I \cdot \mathbf{t}_1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

y $2A^0$ es dos veces el área del elemento

$$2A^0 = a_1b_2 - a_2b_1$$

La definición de las derivadas cartesianas locales de la configuración actual permiten evaluar el tensor métrico

$$\mathbf{g} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_1 \cdot \varphi_1 & \varphi_1 \cdot \varphi_2 \\ \varphi_2 \cdot \varphi_1 & \varphi_2 \cdot \varphi_2 \end{bmatrix} \quad (7)$$

y con él las medidas de deformación membranales que se considere conveniente. Por ejemplo, el tensor de deformaciones de Green-Lagrange

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \varphi_1 \cdot \varphi_1 - 1 & \varphi_1 \cdot \varphi_2 \\ \varphi_2 \cdot \varphi_1 & \varphi_2 \cdot \varphi_2 - 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} g_{11} - 1 & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} - 1 \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$E_{ij} = \frac{1}{2} (g_{ij} - \delta_{ij}) \quad (9)$$

Puesto en la forma matricial habitual del MEF (notación de Voigt)

$$\begin{bmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ 2E_{12} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \varphi_1 \cdot \varphi_1 - 1 \\ \varphi_2 \cdot \varphi_2 - 1 \\ 2\varphi_1 \cdot \varphi_2 \end{bmatrix} \quad (10)$$

cuya variación es sencillamente

$$\delta \begin{bmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ 2E_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_1 \cdot \delta\varphi_1 \\ \varphi_2 \cdot \delta\varphi_2 \\ \varphi_1 \cdot \delta\varphi_2 + \varphi_2 \cdot \delta\varphi_1 \end{bmatrix} \quad (11)$$

La matriz que relaciona variación de deformaciones membranales y desplazamientos $(\mathbf{B}_m)_{3 \times 9}$ es estándar

1.3. Comportamiento flexional

La curvatura

$$\kappa_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\mathbf{t}'_{\alpha} \cdot \varphi'_{\beta} + \mathbf{t}'_{\beta} \cdot \varphi'_{\alpha}) \quad (12)$$

también resulta constante en el elemento y escrito para las tres componente distintas del tensor de curvatura

$$\begin{bmatrix} \kappa_{11} \\ \kappa_{22} \\ 2\kappa_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{t}'_1 \cdot \varphi'_1 \\ \mathbf{t}'_2 \cdot \varphi'_2 \\ \mathbf{t}'_1 \cdot \varphi'_2 + \mathbf{t}'_2 \cdot \varphi'_1 \end{bmatrix} \quad (13)$$

Las derivadas del campo director se escriben en forma simplificada

$$\mathbf{t}'_{\alpha} = \frac{1}{2A^0} \sum_{K=4}^6 L_{\alpha}^K \mathbf{t}^K \quad (14)$$

donde las derivadas cartesianas de las funciones asociadas a los nudos medios L^K ($K = 4, 6$) resultan de:

$$\begin{bmatrix} L_{i_1}^K \\ L_{i_2}^K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{i_1}^2 & L_{i_1}^3 \\ L_{i_2}^2 & L_{i_2}^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_{i_{\xi}}^K \\ L_{i_{\eta}}^K \end{bmatrix} \quad (15)$$

con lo cual

K	4	5	6
L'_{i1}^K	$-2L_{i1}^1$	$-2L_{i1}^2$	$-2L_{i1}^3$
L'_{i2}^K	$-2L_{i2}^1$	$-2L_{i2}^2$	$-2L_{i2}^3$

resultando

$$\begin{bmatrix} L'_{i1}^K \\ L'_{i2}^K \end{bmatrix} = -2 \begin{bmatrix} L_{i1}^{K-3} \\ L_{i2}^{K-3} \end{bmatrix} \quad (16)$$

en forma explícita las derivadas del campo director son:

$$[\mathbf{t}'_{i\alpha}] = \sum_{I=1}^3 -2L_{i\alpha}^I \mathbf{t}^{I+3} \quad (17)$$

La matriz tangente \mathbf{B}_b que relaciona cambios de curvatura con los incrementos de desplazamientos tiene la forma (relaciona con los desplazamientos virtuales del nudo I ($\delta \mathbf{u}^I$) y las rotaciones virtuales del nudo opuesto $I + 3$ ($\delta \mathbf{T}^{I+3}$))

$$\mathbf{B}_b^I = \begin{bmatrix} \mathbf{t}'_{i1} L_{i1}^I \\ \mathbf{t}'_{i2} L_{i2}^I \\ \mathbf{t}'_{i1} L_{i2}^I + \mathbf{t}'_{i2} L_{i1}^I \end{bmatrix} \delta \mathbf{u}^I - 2 \begin{bmatrix} \varphi'_{i1} L_{i1}^I \\ \varphi'_{i2} L_{i2}^I \\ \varphi'_{i1} L_{i2}^I + \varphi'_{i2} L_{i1}^I \end{bmatrix} \bar{\Lambda}^{I+3} \delta \mathbf{T}^{I+3} \quad (18)$$

1.4. Tratamiento del corte transversal

El tratamiento de corte transversal se realiza en base al principio de Hu-Washizu usando una aproximación en deformaciones impuestas.

Particularizando la aproximación del elemento triangular cuadrático completo [Oñate et al. (1992)], imponiendo un valor constante sobre cada lado de la deformación transversal de corte tangente al lado resulta en coordenadas naturales del elemento:

$$\begin{bmatrix} \gamma'_{i\xi} \\ \gamma'_{i\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\eta & -\eta & 1 - \eta \\ \xi & \xi - 1 & \xi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2}\gamma_t^4 \\ -\gamma_\eta^5 \\ \gamma_\xi^6 \end{bmatrix} = \mathbf{A}\gamma' \quad (19)$$

donde las deformaciones de corte tangentes a los lados en los puntos de muestreo son

$$\begin{bmatrix} \sqrt{2}\gamma_t^4 \\ -\gamma_\eta^5 \\ \gamma_\xi^6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{t}^4 \cdot (\varphi^3 - \varphi^2) \\ \mathbf{t}^5 \cdot (\varphi^1 - \varphi^3) \\ \mathbf{t}^6 \cdot (\varphi^2 - \varphi^1) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{t}^4 \cdot (\varphi^3 - \varphi^2) \\ \mathbf{t}^5 \cdot (\varphi^1 - \varphi^3) \\ \mathbf{t}^6 \cdot (\varphi^2 - \varphi^1) \end{bmatrix}^0 \quad (20)$$

donde por simplicidad de la formulación e implementación se ha preferido utilizar en γ' los valores $\sqrt{2}\gamma_t^4$, $-\gamma_\eta^5$ y γ_ξ^6 que son sencillamente la proyección del director sobre los vectores "lado" recorriendo los lados en sentido antihorario. Notar que la deformación natural en un sentido (por ej. $\gamma'_{i\xi}$) depende de las deformaciones naturales en el otro sentido evaluadas en los puntos de muestreo ($\sqrt{2}\gamma_t^4, -\gamma_\eta^5$).

Expresando el corte en en sistema cartesiano local en el elemento

$$\begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} \gamma'_{i\xi} \\ \gamma'_{i\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi'_{i1} & \eta'_{i1} \\ \xi'_{i2} & \eta'_{i2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma'_{i\xi} \\ \gamma'_{i\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{i1}^2 & L_{i1}^3 \\ L_{i2}^2 & L_{i2}^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma'_{i\xi} \\ \gamma'_{i\eta} \end{bmatrix} \quad (21)$$

La matriz $\bar{\mathbf{B}}_s$ sustituta resulta de evaluar primero en los puntos de muestreo

$$\mathbf{B}'_s \delta \mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}^T & -\mathbf{t}^4 & \mathbf{t}^4 \\ \mathbf{t}^5 & \mathbf{0}^T & -\mathbf{t}^5 \\ -\mathbf{t}^6 & \mathbf{t}^6 & \mathbf{0}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \mathbf{u}^1 \\ \delta \mathbf{u}^2 \\ \delta \mathbf{u}^3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (\varphi^3 - \varphi^2) \cdot \bar{\Lambda}^4 & \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0}^T & (\varphi^1 - \varphi^3) \cdot \bar{\Lambda}^5 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T & (\varphi^2 - \varphi^1) \cdot \bar{\Lambda}^6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \mathbf{T}^4 \\ \delta \mathbf{T}^5 \\ \delta \mathbf{T}^6 \end{bmatrix} \quad (22)$$

y luego interpolando

$$\begin{aligned} [\bar{\mathbf{B}}_s]_{2 \times 15} &= \begin{bmatrix} L_{r1}^2 & L_{r1}^3 \\ L_{r2}^2 & L_{r2}^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\eta & -\eta & 1-\eta \\ \xi & \xi-1 & \xi \end{bmatrix} [\mathbf{B}'_s]_{3 \times 15} \\ &= \mathbf{J}^{-1} \mathbf{A} [\mathbf{B}'_s]_{3 \times 15} \end{aligned} \quad (23)$$

Con lo cual las fuerzas nodales equivalentes se expresan como

$$\begin{aligned} \mathbf{r}^T &= \int_A \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix}^T [\bar{\mathbf{B}}_s]_{2 \times 15} dA = \int_A \mathbf{Q}^T \mathbf{J}^{-1} \mathbf{A} [\bar{\mathbf{B}}_s]_{2 \times 15} dA \\ &= \int_A [Q_1, Q_2] \begin{bmatrix} L_{r1}^2 & L_{r1}^3 \\ L_{r2}^2 & L_{r2}^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\eta & -\eta & 1-\eta \\ \xi & \xi-1 & \xi \end{bmatrix} dA [\mathbf{B}'_s]_{3 \times 15} \\ &= \bar{\mathbf{Q}}^T [\mathbf{B}'_s]_{3 \times 15} \end{aligned} \quad (24)$$

donde las fuerzas generalizadas se corte $\bar{\mathbf{Q}}$ se definen como:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{Q}}_{3 \times 1} &= \int_A \begin{bmatrix} -\eta & \xi \\ -\eta & \xi-1 \\ 1-\eta & \xi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_{r1}^2 & L_{r2}^2 \\ L_{r1}^3 & L_{r2}^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} dA \\ &= \int_A \mathbf{A}^T \mathbf{J}^{-T} \mathbf{Q} dA \end{aligned} \quad (25)$$

en el caso elástico lineal

$$\bar{\mathbf{Q}}_{3 \times 1} = \int_A \begin{bmatrix} -\eta & \xi \\ -\eta & \xi-1 \\ 1-\eta & \xi \end{bmatrix} \bar{\mathbf{D}}_s \begin{bmatrix} -\eta & -\eta & 1-\eta \\ \xi & \xi-1 & \xi \end{bmatrix} dA \begin{bmatrix} \sqrt{2}\gamma_{rt}^4 \\ -\gamma_{rn}^5 \\ \gamma_{r\xi}^6 \end{bmatrix} \quad (26)$$

con

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{D}}_s &= \mathbf{J}^{-T} \mathbf{D}_s \mathbf{J}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} L_{r1}^2 & L_{r1}^3 \\ L_{r2}^2 & L_{r2}^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{s1} & D_{s12} \\ D_{s12} & D_{s2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_{r1}^2 & L_{r2}^2 \\ L_{r1}^3 & L_{r2}^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & c \\ c & b \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (27)$$

Integrando explícitamente en el área

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{Q}}_{3 \times 1} &= \frac{A}{6} \begin{bmatrix} a+b-c & a-b+c & -a+b+c \\ & a+3b+3c & -a-b-3c \\ & & 3a+b+3c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2}\gamma_{rt}^4 \\ -\gamma_{rn}^5 \\ \gamma_{r\xi}^6 \end{bmatrix} \\ &= \bar{\mathbf{D}}_s \begin{bmatrix} \sqrt{2}\gamma_{rt}^4 \\ -\gamma_{rn}^5 \\ \gamma_{r\xi}^6 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (28)$$

De esta forma la matriz de rigidez material asociada al corte resulta:

$$\mathbf{K}_s^M = (\mathbf{B}'_s)^T \tilde{\mathbf{D}}_s \mathbf{B}'_s \quad (29)$$

Por otro lado la matriz de rigidez geométrica resulta de

$$\delta \mathbf{U}^T \mathbf{K}_{sG} \Delta \mathbf{U} = \delta \mathbf{U}^T \Delta [\mathbf{B}'_s]_{15 \times 3}^T \bar{\mathbf{Q}} \quad (30)$$

donde

$$\Delta (\mathbf{B}'_s \delta \mathbf{U}) \bar{\mathbf{Q}} = \bar{\mathbf{Q}}^T \left\{ \begin{aligned} & \begin{bmatrix} \mathbf{0}^T & -\mathbf{t}^4 & \mathbf{t}^4 \\ \mathbf{t}^5 & \mathbf{0}^T & -\mathbf{t}^5 \\ -\mathbf{t}^6 & \mathbf{t}^6 & \mathbf{0}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \mathbf{u}^1 \\ \delta \mathbf{u}^2 \\ \delta \mathbf{u}^3 \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} (\varphi^3 - \varphi^2) \cdot \bar{\Lambda}^4 & \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0}^T & (\varphi^1 - \varphi^3) \cdot \bar{\Lambda}^5 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T & (\varphi^2 - \varphi^1) \cdot \bar{\Lambda}^6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \mathbf{T}^4 \\ \delta \mathbf{T}^5 \\ \delta \mathbf{T}^6 \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

que por ejemplo para el primer lado conduce a una contribución:

$$\bar{Q}_4 \left\{ (\delta \mathbf{u}^3 - \delta \mathbf{u}^2) \cdot \bar{\Lambda}^4 \Delta \mathbf{T}^4 + (\bar{\Lambda}^4 \delta \mathbf{T}^4) \cdot (\Delta \mathbf{u}^3 - \Delta \mathbf{u}^2) - [(\varphi^3 - \varphi^2) \cdot \mathbf{t}^4] (\delta \mathbf{T}^4)^T \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Delta \mathbf{T}^4 \right\} \\ [\delta \mathbf{u}^2, \delta \mathbf{u}^3, \delta \mathbf{T}^4] \bar{Q}_4 \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & -\bar{\Lambda}^4 \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \bar{\Lambda}^4 \\ (-\bar{\Lambda}^4)^T & (\bar{\Lambda}^4)^T & -\mathbf{1}_{2 \times 2} ((\varphi^3 - \varphi^2) \cdot \mathbf{t}^4) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{u}^2 \\ \Delta \mathbf{u}^3 \\ \Delta \mathbf{T}^4 \end{bmatrix} \quad (32)$$

2. ESTABILIZACIÓN DEL CORTE

En el caso elasto-plástico, la evaluación de las tensiones de corte se realiza sólo en el centro del elemento. Para evitar un elemento excesivamente flexible debido a la subintegración, que conduce a la aparición de un modo espurio de corte, es conveniente utilizar algún tipo de estabilización. Para ello primero pueden escribirse las deformaciones naturales de corte como la suma

$$\begin{bmatrix} \gamma'_{\xi} \\ \gamma'_{\eta} \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\eta + \frac{1}{3} & -\eta + \frac{1}{3} & \frac{1}{3} - \eta \\ \xi - \frac{1}{3} & \xi - \frac{1}{3} & \xi - \frac{1}{3} \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} \sqrt{2} \gamma'_{it} \\ -\gamma'_{in} \\ \gamma'_{\xi} \end{bmatrix} \\ = [\mathbf{A}_C + \mathbf{A}_H] \gamma' = \begin{bmatrix} \gamma'_{\xi} \\ \gamma'_{\eta} \end{bmatrix}_C + \begin{bmatrix} \gamma'_{\xi} \\ \gamma'_{\eta} \end{bmatrix}_H \quad (33)$$

La primera componente corresponde a evaluar en el centro del elemento (subíndice “C”) y la segunda componente (subíndice “H”), que se anula en el centro y varía linealmente puede utilizarse para realizar la estabilización requerida. Las las fuerzas generalizadas se corte en el caso elasto-plástico se dividen similarmente

$$\bar{\mathbf{Q}}_{3 \times 1} = \bar{\mathbf{Q}}_{3 \times 1}^C + \bar{\mathbf{Q}}_{3 \times 1}^H \quad (34)$$

con la componente evaluada en el centro

$$\bar{\mathbf{Q}}_{3 \times 1}^C = A \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L'_{r1} & L'_{r2} \\ L'_{r1} & L'_{r2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix}_C \\ = A \mathbf{A}_C \mathbf{J}^{-1} \mathbf{Q}_C \quad (35)$$

La componente de de deformación de corte γ'_H puede utilizarse de diversas formas para realizar la estabilización. Dentro de un esquema de avance implícito, donde se conoce la matriz elastoplástica tangente \mathbf{D}_s^{EP} se puede integrar $\bar{\mathbf{Q}}_{3 \times 1}^H$. En cada paso el incremento resulta:

$$\begin{aligned} \Delta \bar{\mathbf{Q}}_{3 \times 1}^H &= \int_A \begin{bmatrix} -\eta & \xi \\ -\eta & \xi - 1 \\ 1 - \eta & \xi \end{bmatrix} \mathbf{J}^{-T} \mathbf{D}_s^{EP} \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} -\eta + \frac{1}{3} & -\eta + \frac{1}{3} & \frac{1}{3} - \eta \\ \xi - \frac{1}{3} & \xi - \frac{1}{3} & \xi - \frac{1}{3} \end{bmatrix} dA \Delta \begin{bmatrix} \sqrt{2}\gamma'_{it} \\ -\gamma'_{in} \\ \gamma'_{i\xi} \end{bmatrix} \\ &= \int_A \mathbf{A}^T \bar{\mathbf{D}}_s^{EP} (\mathbf{A} - \mathbf{A}_C) dA \Delta \gamma' = \int_A (\mathbf{A} - \mathbf{A}_C)^T \bar{\mathbf{D}}_s^{EP} \mathbf{A}_C dA \gamma' \end{aligned} \quad (36)$$

Integrando explícitamente en el área

$$\begin{aligned} \Delta \bar{\mathbf{Q}}_{3 \times 1}^H &= \frac{A(a+b+c)}{18} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \text{sim.} & & 1 \end{bmatrix} \Delta \begin{bmatrix} \sqrt{2}\gamma'_{it} \\ -\gamma'_{in} \\ \gamma'_{i\xi} \end{bmatrix} \\ &= \tilde{\mathbf{D}}^H \Delta \begin{bmatrix} \sqrt{2}\gamma'_{it} \\ -\gamma'_{in} \\ \gamma'_{i\xi} \end{bmatrix} = \frac{A(a+b+c)}{18} \Delta \left(\sqrt{2}\gamma'_{it} - \gamma'_{in} + \gamma'_{i\xi} \right) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (37)$$

De esta forma la matriz de rigidez asociada a la estabilización del corte resulta:

$$\mathbf{K}_s^H = (\mathbf{B}'_s)^T \tilde{\mathbf{D}}^H \mathbf{B}'_s \quad (38)$$

En tanto que la matriz de rigidez correspondiente a utilizar un punto de integración es:

$$\mathbf{K}_s^C = (\mathbf{B}'_s)^T \tilde{\mathbf{D}}^C \mathbf{B}'_s \quad (39)$$

con

$$\tilde{\mathbf{D}}_s^C = \tilde{\mathbf{D}}_s - \tilde{\mathbf{D}}^H = \frac{A}{9} \begin{bmatrix} a+b-2c & a-2b+c & -2a+b+c \\ & a+4b+4c & -2a-2b-5c \\ & & 4a+b+4c \end{bmatrix} \quad (40)$$

En el caso de realizar una integración explícita de las ecuaciones de movimiento, en general no se dispone de \mathbf{D}_s^{EP} , por lo cual para integrar $\bar{\mathbf{Q}}_{3 \times 1}^H$ con pocas operaciones deben hacerse algunas hipótesis simplificativas. En general para láminas delgadas la consistencia de estas hipótesis no es capital debido a la influencia menor de los esfuerzos de corte, una vez que el bloqueo numérico ya ha sido resuelto a través de la aproximación en deformaciones impuestas.

Una segunda posibilidad es utilizar un parámetro $\alpha \leq 1$ sobre la contribución $\bar{\mathbf{Q}}_{3 \times 1}^H$ como factor de disminución de dicha componente estabilizante. Esto por un lado permite evaluar la influencia de dicha componente en problemas elásticos y por otro lado permite utilizar una aproximación sencilla cuando se utilizan códigos con integración explícita de las ecuaciones de movimiento. En este último caso podría utilizarse directamente una fracción pequeña de la componente elástica

$$\bar{\mathbf{Q}}_{3 \times 1}^H = \alpha \int_A \mathbf{A}^T \bar{\mathbf{D}}_s (\mathbf{A} - \mathbf{A}_C) dA \gamma' \quad (41)$$

donde $\bar{\mathbf{D}}_s$ es el tensor constitutivo elástico inicial.

3. FORMULACIÓN MEMBRANAL EN DEFORMACIONES IMPUESTAS

Para ello se utiliza la aproximación propuesta en Flores y Oñate (2005) donde se utiliza una parcela de cuatro elementos formada por el elemento y sus tres adyacentes. Sobre la parcela se define una aproximación cuadrática de la geometría de la superficie media. Visto en el espacio isoparamétrico se mantienen los vértices del triángulo principal (triángulo lineal estándar), los cuales ocupan las posiciones

- nudo 1: $(\xi, \eta) = (0, 0)$
- nudo 2: $(\xi, \eta) = (1, 0)$
- nudo 3: $(\xi, \eta) = (0, 1)$

de esta forma el resto de los nudos que forman la parcela ocupan las posiciones

- nudo 7: $(\xi, \eta) = (1, 1)$
- nudo 8: $(\xi, \eta) = (-1, 1)$
- nudo 9: $(\xi, \eta) = (1, -1)$

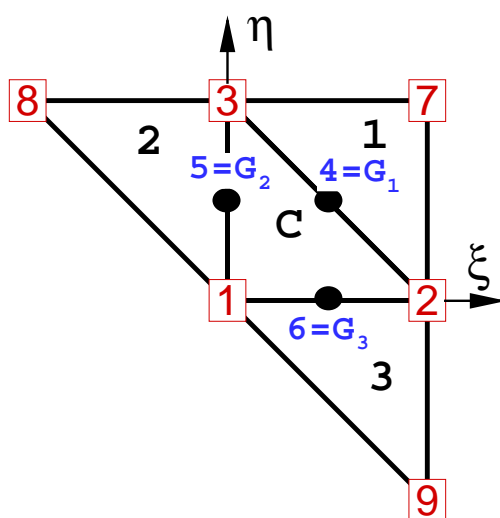


Figura 1: Parcela de elementos en coordenadas naturales

Las funciones de forma sobre este elemento cuadrático no-estándar son

$$\begin{aligned} N^1 &= \zeta + \xi\eta & N^7 &= \frac{\zeta}{2}(\zeta - 1) \\ N^2 &= \xi + \eta\zeta & N^8 &= \frac{\xi}{2}(\xi - 1) \\ N^3 &= \eta + \zeta\xi & N^9 &= \frac{\eta}{2}(\eta - 1) \end{aligned} \quad (42)$$

Luego se evalúa el tensor métrico $g_{ij}^{(k)}$ sobre la mitad de cada lado k del elemento indicados como puntos G_1 , G_2 y G_3 (coincidentes con los nudos 4, 5 y 6) en la Figura 1 y estos se interpolan linealmente sobre el elemento.

$$\mathbf{g}(\xi, \eta) = (1 - 2\zeta) \mathbf{g}^1 + (1 - 2\xi) \mathbf{g}^2 + (1 - 2\eta) \mathbf{g}^3 \quad (43)$$

A partir de la definición de los gradientes en los tres puntos sobre los lados del triángulo, es posible interpretar la aproximación membranal como una en **deformaciones impuestas**. Los gradientes en dichos puntos dependen exclusivamente de los nudos asociados a los dos triángulos adyacentes al lado. Esto puede verse calculando las derivadas de las funciones de forma y evaluándolas a la mitad de los lados. A su vez si se utiliza un único punto de integración en el centro del elemento, es equivalente a promediar los tensores métricos evaluados a la mitad de cada lado.

En los puntos del contorno donde no existe el elemento adyacente, el gradiente se define sencillamente como el gradiente del elemento principal. Mayores detalles respecto a la matriz B_m correspondiente o la matriz de rigidez geométrica pueden verse en la Referencia [Flores y Oñate \(2005\)](#).

4. RESULTADOS

El comportamiento lineal del elemento original puede verse en la Referencia [Zárate et al. \(1994\)](#) donde también se muestra que la formulación satisface las pruebas de la parcela flexional. Similarmente en la Referencia [Flores y Oñate \(2005\)](#) se muestra que la formulación membranal satisface la prueba de la parcela correspondiente. A continuación se presentan ejemplos que muestran la influencia del término lineal del corte a través del valor del parámetro α , la mejora introducida en la formulación membranal y el comportamiento del elemento en el rango no lineal geométrico en pequeñas y grandes deformaciones. Cuando se utiliza la mejora membranal el elemento presentado se denomina TLLLQ.

4.1. Placa cuadrada empotrada bajo carga uniforme

En este primer ejemplo se analiza una placa cuadrada empotrada en sus contornos y sometida a una carga uniforme. El lado de la placa es $L = 10$ y el espesor es $h = 0,1$. Es decir que se trata de una placa relativamente delgada. El objetivo de la presente evaluación es observar la velocidad de convergencia del elemento en el caso puramente flexional y la influencia de integrar en forma completa la componente de corte asociada al valor del coeficiente α . Se han considerado 6 mallas estructuradas con 1,2,4,8,16 y 32 elementos por lado. Por otro lado se han considerado 4 valores del coeficiente de estabilización: $\alpha = 1,00$, $\alpha = 0,10$, $\alpha = 0,01$ y $\alpha = 0,00$. El primero corresponde a una integración completa de los términos de corte, en tanto que el último es equivalente a integrar con un punto de integración en el centro del elemento. Por otro lado se han considerado sobre los lados condiciones de contorno de tipo “soft” y “hard”, es decir sin y con restricción a rotar alrededor de la normal al lado.

En la Figura 2 se muestra el desplazamiento vertical del centro de la placa para las mallas consideradas y para cada valor de α . Puede verse que para las mallas gruesas (hasta 4 elementos por lado) los resultados son indistinguibles. En tanto que las diferencias se van haciendo sensibles a medida que se refina la malla. Es posible observar que para la malla más fina un valor de $\alpha = 0,1$ no modifica sustancialmente los desplazamientos. Las cuatro curvas indicadas corresponden al modelo con condiciones de contorno “hard”. En el caso que se utilicen condiciones de contorno “soft” los resultados para los dos valores más altos de α son indistinguibles entre sí. Para el caso $\alpha = 0,01$ (indicado con símbolos) el comportamiento es sensiblemente más flexible pero las diferencias disminuyen al refinar la malla. En tanto que para el caso $\alpha = 0,00$ (no mostrado en la Figura) los desplazamientos del centro de la placa son del orden del doble de los resultados correctos. Esto último indica que si se consideran condiciones de contorno “soft” y se utiliza un punto de integración en el elemento es imprescindible incluir algún tipo

de estabilización.

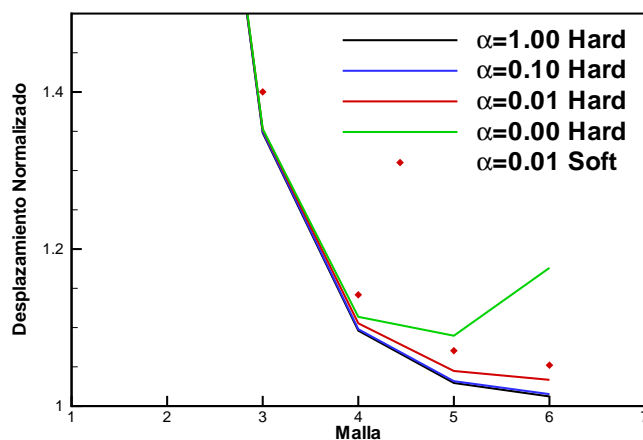


Figura 2: Desplazamiento normalizado del centro de la placa

En la Figura 3 se grafica el momento flector M_{xx} para la malla más fina (32 elementos por lado) para los tres valores no nulos de α . Puede observarse que las diferencias entre la integración completa y la integración con un punto son bajas. Al ir disminuyendo α se nota una lenta modificación del patrón de los momentos. Se incluye como referencia la distribución de momentos obtenida para la misma malla con el elemento "BST"[Flores y Oñate (2001)]

En la Figura 4 se grafica el esfuerzo de corte transversal Q_x para la malla más fina para los tres valores no nulos de α . Puede observarse una mayor sensibilidad del esfuerzo de corte con el factor α . Estas diferencias son notoriamente más importantes en el contorno de la placa e incluso ya son sensibles para el valor de $\alpha = 0,10$.

4.2. Techo cilíndrico rebajado

La geometría de una cubierta cilíndrica bajo peso propio se muestra en la figura 5. Está apoyada sobre diafragmas rígidos en sus extremos. Se modela sólo un cuarto de la geometría debido a las condiciones de simetría. Se consideran mallas estructuradas con las dos posibles orientaciones (la figura muestra la orientación A). El presente problema está fuertemente gobernado por el comportamiento membranar por lo que interesa comprobar la mejora en el comportamiento membranar. La figura 6 incluye los desplazamientos verticales a la mitad del borde libre (punto A) para las dos posibles orientaciones de mallas estructuradas. El valor de referencia es $u_A = -0,301$ y fue tomado de la Referencia Huang (1989).

Se realizaron los cálculos para dos valores del coeficiente, $\alpha = 1,00$ y $\alpha = 0,1$, con una diferencia relativa máxima del 0.08 % por lo que estos resultados no se han incluido en el gráfico. Puede verse la excelente convergencia de la versión con formulación membranar en deformaciones impuestas. Se han incluido los resultados obtenidos con el elemento sin rotaciones EBST donde se la mejora membranar fue originalmente desarrollada.[Flores y Oñate (2005)]

4.3. Semiesfera abierta bajo cargas puntuales

El problema principal de los elementos con geometría inicial curva es el denominado "bloqueo membranar". La aproximación membranar en deformaciones impuestas propuesta inter-

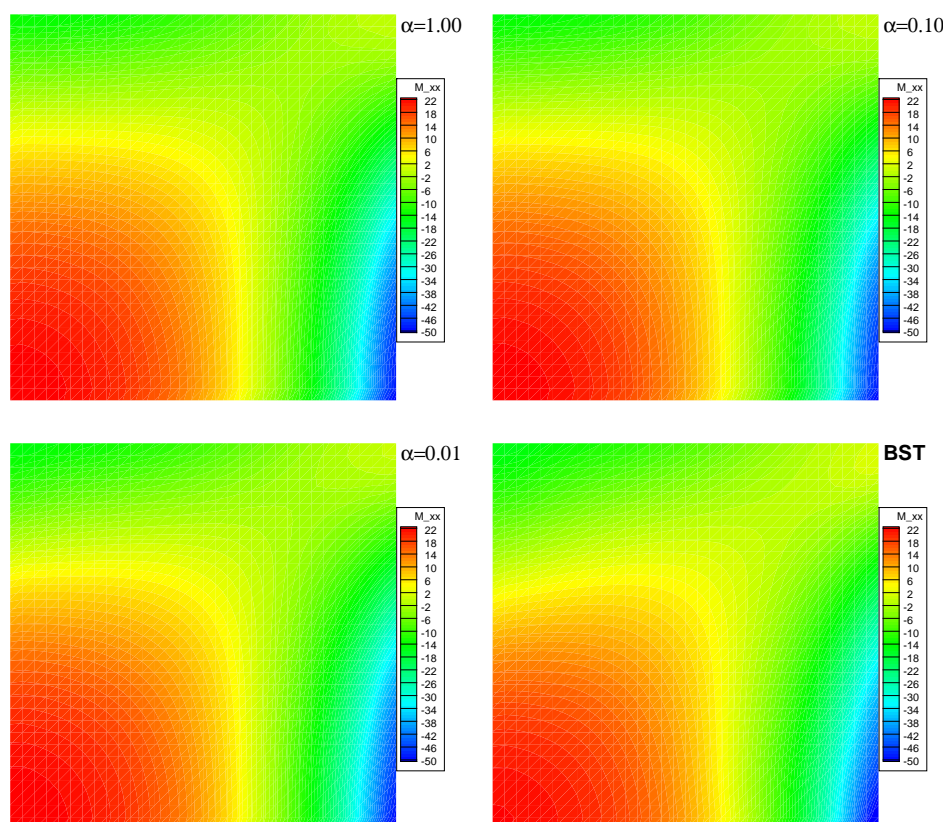


Figura 3: Momento Flector M_{xx} para los tres valores de α

pola la geometría en forma cuadrática por lo cual puede sufrir de este problema. Sin embargo como se muestra en la Ref. Flores y Oñate (2005) esto no ocurre cuando se utiliza un punto de integración. Para mostrar esto y evaluar el comportamiento en el rango no lineal geométrico se recurre a un problema de flexión inextensional. Se trata de una semi-esfera de radio $r = 10$ y espesor $h = 0,04$ con un agujero de 18° en el polo sometida a carga puntuales entrantes y salientes a 90° una de la otra. Todos los bordes están libres y se discretiza un cuarto de la geometría. Las propiedades del material son $E = 6,825 \times 10^7$ y $\nu = 0,3$. La figura 7.a muestra la geometría discretizada y una vista deformada al finalizar la simulación.

En la Figura 8 se ha graficado el desplazamiento (valor absoluto) de los puntos de aplicación de la carga versus el factor de carga. Se ha utilizado una malla de densidad media con 8 elementos por lado (128 en total). Se han considerado ambas formulaciones membranales y 1 y 0,1 como valores para el parámetro α . Este último no tiene influencia visible en los resultados. Puede verse que ninguna que no hay bloqueo membranal, y como se viera en el primer ejemplo, debido a que el campo director es no conforme el comportamiento global es un poco flexible lo cual desaparece al refinar la malla.

4.4. Ejemplos de embutición

Los dos ejemplos presentados a continuación son dos conocidos “benchmark” de ediciones anteriores de reuniones NUMISHEET. Para comparación se han simulado los ejemplos con otros dos elementos además del aquí presentado, estos son los elementos triangulares: (a) de tres nudos BBST (Flores y Oñate (2007)) que sólo incluye desplazamientos como grados de libertad y está basado en la teoría de láminas delgadas; (b) de 6 nudos TQQL (Flores et al. (1995))

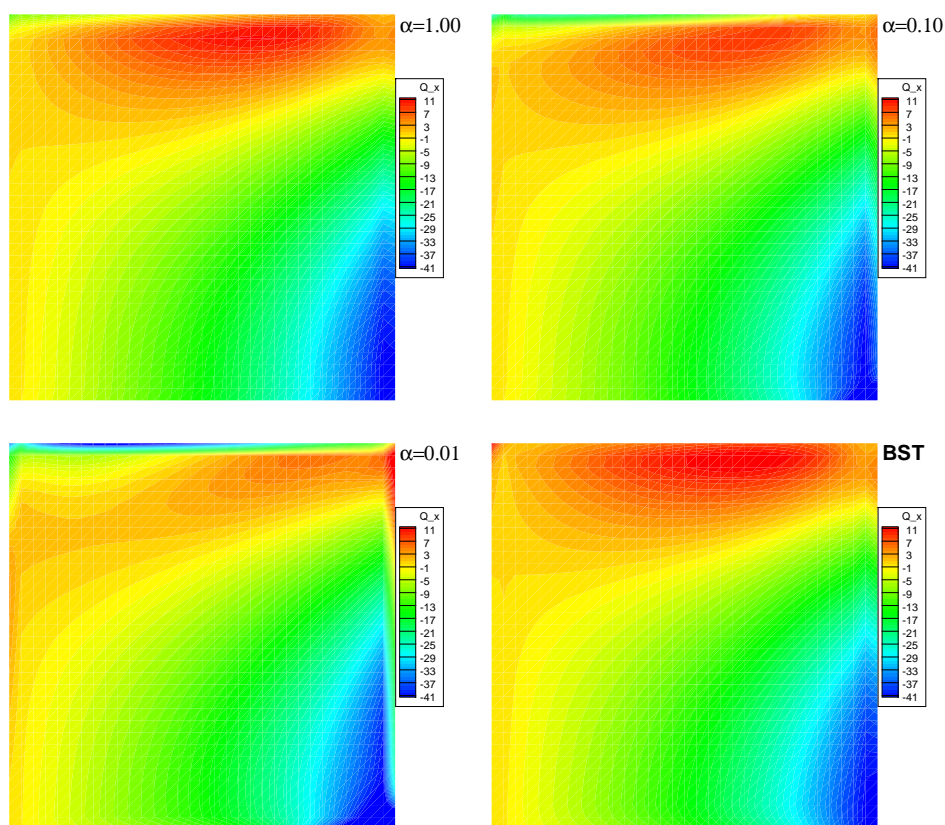


Figura 4: Esfuerzo de corte Q_x para los tres valores de α

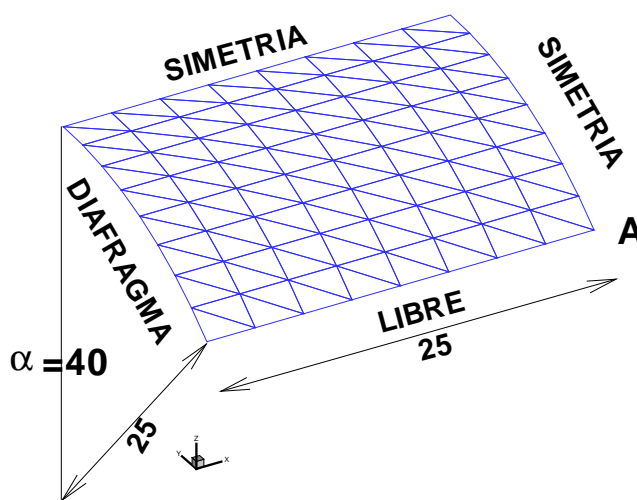


Figura 5: Cubierta cilíndrica bajo peso propio. $E=4.32 E^8$, $\nu = 0,0$, Espesor =0.25, peso lámina =90 por unidad de área

con las mismas características del presente elemento pero con una interpolación conforme y cuadrática para los campos de desplazamiento y del director. Se consideran las mismas mallas de triángulos, es decir que coinciden los vértices, por lo cual la cantidad de puntos de integra-

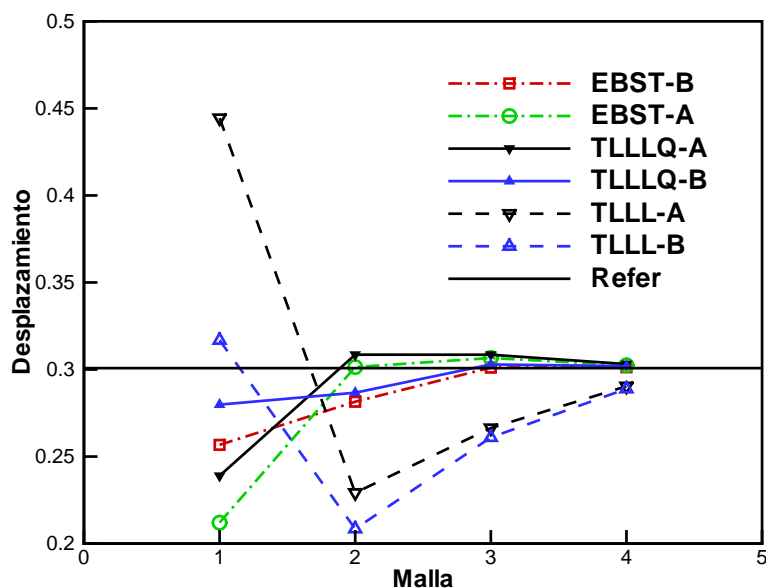


Figura 6: Cubierta cilíndrica bajo peso propio. Desplazamiento del punto "A" sobre el borde libre

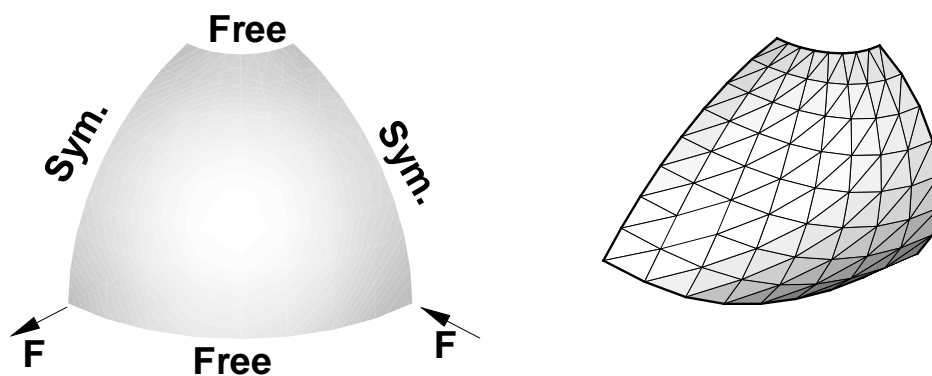


Figura 7: Semiesfera incompleta bajo cargas puntuales, (a) geometría, (b) Deformada

ción es el triple para el elemento TQQL y la cantidad de grados de libertad relativa al elemento TLLL es de sólo el 35 % para el BBST y crece al 220 % para el TQQL. Todas las simulaciones se realizan con el programa [STAMPACK \(2006\)](#) con integración explícita de las ecuaciones de movimiento, por lo cual los dos aspectos principales en la eficiencia están asociados al número de puntos de integración y al tiempo crítico. Este último aspecto es una desventaja en los elementos de 6 nudos donde el tiempo crítico disminuye al 40 % respecto al elemento con sólo nudos vértices.

En ambos ejemplos se han considerado fuerzas de pisado bajas. En el primero de los ejemplos hay una mayor influencia del comportamiento membranal debido al mayor estiramiento

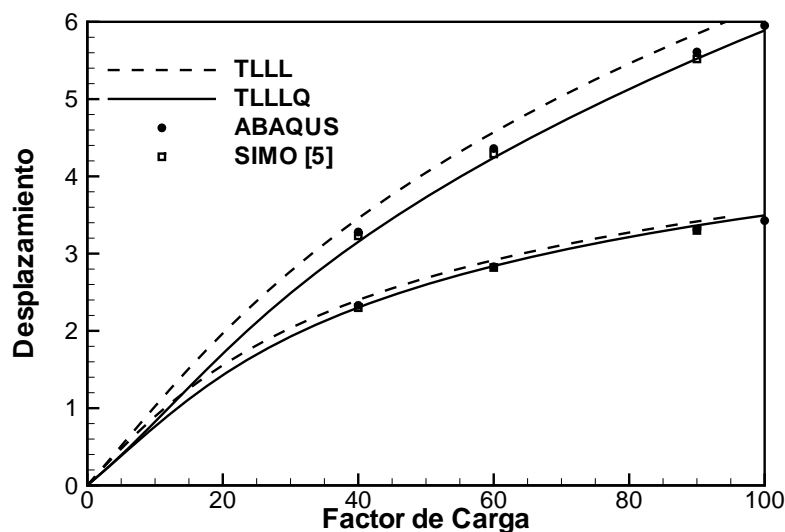


Figura 8: Semiesfera incompleta bajo cargas puntuales. Desplazamientos de los puntos cargados

de la superficie media en diferentes zonas en tanto que el segundo ejemplo hay una mayor influencia del comportamiento flexional. La geometría de las herramientas, las propiedades del material, de la fricción y el conjunto de resultados numéricos y experimentales pueden verse en los anales de ambas reuniones.

4.4.1. Embutición profunda de una placa cuadrada

Este es el “benchmark” principal de Numisheet’93, y corresponde a la embutición profunda de una placa cuadrada. La figura 9 muestra la fuerza sobre el punzón. En tanto que la figura 10 muestra la deformación (logarítmica o natural) en la dirección transversal (espesor) a lo largo de la línea de simetría y a lo largo de la diagonal, en ambos casos desde el centro de la lámina hasta el borde externo.

Si bien existe una importante flexión el comportamiento es principalmente membranar con una importante variación en el espesor de la chapa. Los esfuerzos son muy similares, el elemento TQQQ indica un comportamiento ligeramente más rígido. La deformación en el espesor es muy idéntica en las zonas que se mantiene planas y son muy similares en las zonas sometidas a flexión. Las diferencias más importantes se pueden ver en la diagonal donde la flexión ocurre en ambas direcciones.

4.4.2. Riel en forma de S

Este es un “benchmark” propuesto en Numisheet’96, Embutición de un riel en forma de S. En este ejemplo es más marcada la influencia de la flexión, lo cual se asocia con una mayor recuperación elástica al quitar las herramientas. En la Figura 11 se ha graficado la fuerza sobre el punzón durante el proceso de formado. Además de los resultados asociados a los tres elementos mencionados se han incluido el promedio de los resultados experimentales (que muestran una importante dispersión) y los obtenidos con un elemento cuadrilátero sin rotaciones BSQ (Flores y Estrada (2007)). En este caso puede verse claramente que el elemento TLLL muestra un comportamiento más flexible asociado a que flexionalmente es no conforme, estos valores son

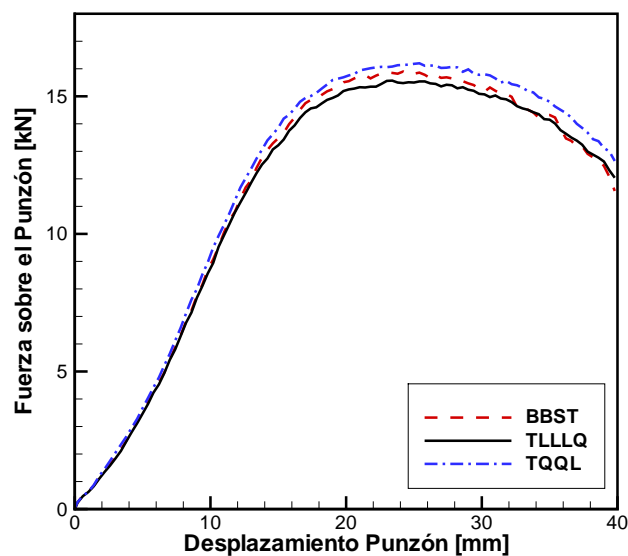


Figura 9: Ejemplo de Numisheet'93, Fuerza sobre el punzón

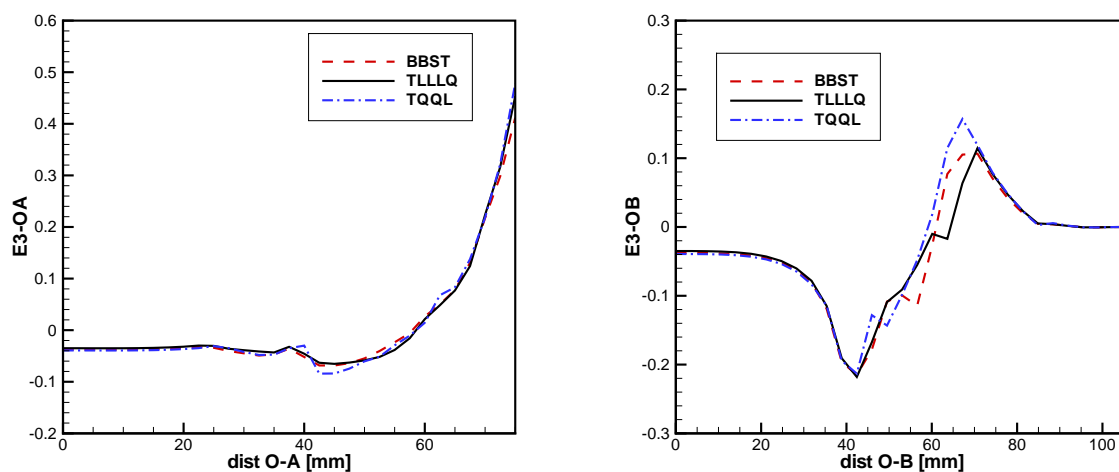


Figura 10: Ejemplo de Numisheet'93, deformación logarítmica en el espesor (a) a lo largo de la línea de simetría, (b) a lo largo de la diagonal

muy similares a los obtenidos con el elemento BSQ que requiere estabilización debido a la existencia de un modo de flexión con energía nula y que en este tipo de problemas dominados por la flexión muestra un comportamiento más flexible.

5. CONCLUSIONES

- La estabilización del corte funciona bien en problemas elásticos. El valor del parámetro α puede variar en un amplio rango sin afectar los resultados.
- La aproximación en deformaciones impuestas para el comportamiento membranal mejora sustancialmente la convergencia en problemas dominados por la membrana

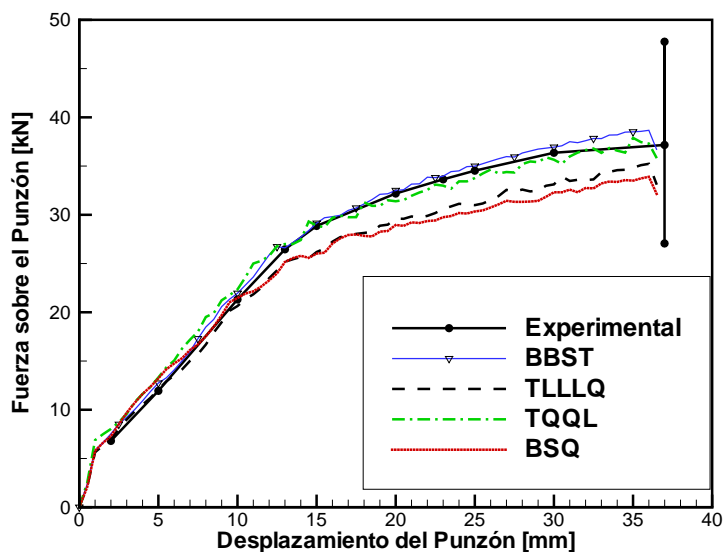


Figura 11: Ejemplo de Numisheet'96, Fuerza sobre el punzón

- En problemas elasto-plásticos se ha utilizado para estabilizar el corte la componente elástica con un valor de $\alpha = 0,1$
- El elemento se comporta bien en problemas con grandes deformaciones pero resulta un poco flexible en problemas dominados por la flexión
- Para su uso en códigos con integración explícita de las ecuaciones de movimiento, resulta conveniente evaluar la posibilidad de escalar la masa rotacional a los fines de elevar el tiempo crítico,

AGRADECIMIENTOS

El autor agradece el apoyo financiero de CONICET (Argentina), de la SeCyT-UNC y del MCyT-Cba.

REFERENCIAS

- Dung T. y Wells G. Geometrically nonlinear formulation for thin shells without rotation degrees of freedom. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 197:2778–2788, 2008.
- Flores F. y Estrada C. A rotation free thin shell quadrilateral. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196:2631–2646, 2007.
- Flores F. y Oñate E. A basic thin shell triangle with only translational dofs for large strain plasticity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 51:57–93, 2001.
- Flores F. y Oñate E. Improvements in the membrane behaviour of the three node rotation-free bst shell triangle using an assumed strain approach. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 194:907–932, 2005.
- Flores F. y Oñate E. A rotation-free shell triangle for the analysis of kinked and branching shells. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 69:1521–1551, 2007.

- Flores F., Oñate E., y Zárata F. New assumed strain triangles for non linear shell analysis. *Computational Mechanics*, 17:107–114, 1995.
- Huang H. *Static and Dynamic Analysis of Plates and Shells*. Springer-Verlag, Berlin, 1989.
- Oñate E., Zienkiewicz O., Suárez B., y R.L. T. A methodology for deriving shear constrained reissner-mindlin plate elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 32:345–367, 1992.
- Reese S. A large deformation solid-shell concept based on reduced integration with hourglass stabilization. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 69:1671–1716, 2007.
- Simo J. y Fox D. On a stress resultant geometrically exact shell model. part i: Formulation and optimal parametrization. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 72:267–304, 1989.
- STAMPACK. *A General Finite Element System for Sheet Stamping and Forming Problems*, v6.0.0. Quantech ATZ, Barcelona, España, 2006.
- Zárata F., Oñate E., y Flores F. A simple triangular element for thick and thin plate and shell analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 37:2569–2582, 1994.
- Zienkiewicz O. y Taylor R. *The finite element method. Vol II: Solid Mechanics*. Butterworth heinemann, 2000.