

## **ANÁLISIS GEOMÉTRICO DE LOCALIZACIÓN PARA PLASTICIDAD REGULARIZADA MEDIANTE TEORÍA DE GRADIENTES**

**Sonia M. Vrech\*, José G. Etse\***

\*Centro de Métodos Numéricos y Computacionales en Ingeniería  
Universidad Nacional de Tucumán  
Av. Independencia 1800, San Miguel de Tucumán, 4000 Tucumán, Argentina  
e-mail: svrech@herrera.unt.edu.ar, cemnci@herrera.unt.edu.ar

**Key Words:** Teoría de gradientes, localización de deformaciones, bifurcación, longitud característica.

**Abstract.** *En el presente trabajo se presenta el análisis analítico y geométrico de localización de deformaciones plásticas en modelos de plasticidad regularizada mediante teoría de gradientes. A partir del método geométrico de localización, basado en la solución analítica de la singularidad del tensor de localización, se determinan los parámetros críticos de falla discontinua para diferentes estados tensionales. Se aplica al modelo material de von Mises. La representación geométrica de la condición de localización en las coordenadas de tensiones de Mohr, demuestra claramente las ventajas de la formulación de gradientes en lo que respecta a su capacidad regularizante.*

## 1 INTRODUCCIÓN

Expresando la singularidad del tensor de localización en función de las coordenadas de Mohr, tensiones normales y tangenciales al plano crítico de falla, es posible hallar la ecuación de una elipse que en el punto de tangencia con el círculo de Mohr da información sobre los parámetros críticos al comienzo de la bifurcación y sobre el tipo de falla (Pijaudier-Cabot and Benallal, 1993<sup>1</sup> ; Benallal and Comi, 1993<sup>2</sup> ; Rizzi et al. 1995<sup>3</sup> ; Iordache and Willam, 1998<sup>4</sup>). Este método analítico/geométrico se aplica a modelos elasto-plásticos regularizados mediante teoría de gradientes, formulados a partir de las leyes de la Termodinámica [Svedberg and Runesson (1998)<sup>5</sup> ; Svedberg (1999)<sup>6</sup>].

## 2 FORMULACIÓN DE PLASTICIDAD DE GRADIENTES TERMODINÁMICAMENTE CONSISTENTE

La energía libre total  $\Psi$  puede expresarse como la adición de la energía libre elástica  $\Psi^e$  y de la energía debida a las contribuciones locales y de gradientes causadas por las deformaciones anelásticas  $\Psi^{p,l}$  y  $\Psi^{p,g}$  respectivamente, expresadas en términos de la variable de endurecimiento/ablandamiento  $\kappa$

$$\Psi(\boldsymbol{\varepsilon}^e, \kappa, \nabla\kappa) = \Psi^e(\boldsymbol{\varepsilon}^e) + \Psi^{p,loc}(\kappa) + \Psi^{p,g}(\nabla\kappa) \quad (1)$$

A los fines de lograr mayor simplicidad se adopta para  $\kappa$  una cantidad escalar. Los efectos de gradientes quedan restringidos al endurecimiento/ablandamiento mediante la inclusión de  $\nabla\kappa$ .

Para el caso de endurecimiento/ablandamiento isotrópico y considerando la densidad del material  $\rho$ , se adoptan las expresiones de densidad de energía anelástica propuestas por Svedberg (1999)<sup>6</sup>

$$\rho\Psi^e = \frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}^e : \mathbf{E}^e : \boldsymbol{\varepsilon}^e \quad , \quad \rho\Psi^{p,loc} = \frac{1}{2}H\kappa^2 \quad , \quad \rho\Psi^{p,g} = \frac{1}{2}l^2\nabla\kappa \cdot \mathbf{H}^g \cdot \nabla\kappa \quad (2)$$

en las que se distinguen dos tipos de parámetros de estado:

- el módulo de endurecimiento/ablandamiento *local*  $H$
- el tensor de gradientes *no local*  $\mathbf{H}^g$

definidos como

$$H = \rho \frac{\partial^2 \Psi^{p,loc}}{(\partial\kappa)^2} \quad \text{y} \quad \mathbf{H}^g = \rho \frac{1}{l^2} \frac{\partial^2 \Psi^{p,g}}{\partial(\nabla\kappa) \otimes \partial(\nabla\kappa)} \quad \text{con} \quad \det(\mathbf{H}^g) \geq 0 \quad (3)$$

Como fuera señalado por Svedberg y Runesson (1998)<sup>5</sup>, hay tres posibles interpretaciones para la longitud interna  $l$  en la ecuación (3-b):

- parámetro dimensional que hace que  $H$  y  $\mathbf{H}^g$  posean la misma dimensión
- entidad física que determina la medida característica de la micro-estructura
- parámetro que estabiliza numéricamente a la teoría constitutiva local

## 2.1 Relaciones Constitutivas

Las ecuaciones constitutivas derivan de las relaciones de Coleman. A partir de las expresiones 2, es posible determinar el tensor de tensiones totales

$$\boldsymbol{\sigma} = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \quad , \quad \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E}^e : \boldsymbol{\varepsilon}^e \quad (4)$$

y las tensiones disipativas en las que intervienen tanto las contribuciones locales como las de los gradientes originados por las deformaciones anelásticas

$$K = K^{loc} + K^g \quad (5)$$

con

$$K^{loc} = -\rho \frac{\partial \Psi^{p,loc}}{\partial \kappa} = -H\kappa \quad , \quad K^g = \nabla \cdot \rho \frac{\partial \Psi^{p,g}}{\partial (\nabla \kappa)} = l^2 \nabla \cdot (\mathbf{H}^g \cdot \nabla \kappa) \quad (6)$$

De la ecuación (6-b) se obtienen las tensiones disipativas en el borde  $\partial\Omega$ ,

$$K^{(g,b)} = -\mathbf{m} \cdot \rho \frac{\partial \Psi^{p,g}}{\partial (\nabla \kappa)} \quad (7)$$

con el vector  $\mathbf{m}$  normal a  $\partial\Omega$ .

## 2.2 Teoría Material $J_2$ de gradientes

Se expresan a continuación la función de fluencia y leyes de evolución del flujo plástico para el modelo material  $J_2$  sobre el que se aplicará luego el método geométrico/analítico de localización.

Se considera la expresión del criterio de fluencia de von Mises

$$\Phi = \sigma_e - f_t - K \quad \text{con} \quad \sigma_e = \sqrt{3J_2} \quad , \quad J_2 = \frac{1}{2} \mathbf{s} : \mathbf{s} \quad (8)$$

siendo  $J_2$  el segundo invariante del tensor deviatorico de tensiones  $\mathbf{s}$ . De las ecuaciones 5 y 6 surge la tensión disipativa total

$$K = -H\kappa + l^2 \nabla \cdot (\mathbf{H}^g \cdot \nabla \kappa) \quad (9)$$

En el caso general de flujo plástico no asociado, el potencial disipativo  $\Phi'$  puede incluir términos no lineales, ver Svedberg (1998)<sup>5</sup>

$$\Phi' = \Phi + \frac{1}{2} g_k K^2 \quad (10)$$

siendo  $g_k$  un constante positiva. La leyes de evolución del flujo plástico están dadas por

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial \Phi'}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \dot{\lambda} \frac{3}{2} \frac{\mathbf{s}}{\sigma_e} \quad \text{y} \quad \dot{\kappa} = \dot{\lambda} \frac{\partial \Phi'}{\partial K} = -\dot{\lambda} \quad (11)$$

siendo  $\dot{\lambda}$  la tasa del parámetro plástico.

### 3 SOLUCIÓN ANALÍTICA DE LOCALIZACIÓN

La formación de bandas de localización en el continuo, estrechamente ligada a la bifurcación del equilibrio, conduce a la pérdida de la elipticidad de las ecuaciones que gobiernan el problema del equilibrio. La discontinuidad del campo de deformaciones anelásticas se identifica por la condición de singularidad del tensor acústico o de localización, ver Ottosen y Runesson (1991)<sup>7</sup>, Etse and Willam (1990)<sup>8</sup>, Etse, Willam et al. (1994)<sup>9</sup>.

De la expresión del tensor acústico elasto-plástico de gradientes, definido por Vrech, Etse and Dvorkin (2004)<sup>10</sup> se obtiene su solución de autovalores en términos del autovalor menor

$$\lambda^{(1)} = 1 - \frac{\mathbf{a}(\mathbf{n}_l) \cdot [\mathbf{Q}^e(\mathbf{n}_l)]^{-1} \cdot \mathbf{a}^*(\mathbf{n}_l)}{h + h^g} = 0 \quad (12)$$

siendo  $\mathbf{n}_l$  la dirección normal a la superficie de discontinuidad, el tensor acústico elástico

$$\mathbf{Q}^e = \mathbf{n}_l \cdot \mathbf{E}^e \cdot \mathbf{n}_l \quad (13)$$

los módulos plásticos generalizados *local* y *no-local*

$$h = \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{E}^e : \frac{\partial \Phi^*}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \bar{H} \quad , \quad h^g = \mathbf{n}_l \cdot \bar{\mathbf{H}}^g \cdot \mathbf{n}_l \left(\frac{2\pi l}{\delta}\right)^2 \quad (14)$$

y los vectores  $\mathbf{a}^*$  y  $\mathbf{a}$  definidos como

$$\mathbf{a}^* = \frac{\partial \Phi^*}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{E}^e \cdot \mathbf{n}_l \quad , \quad \mathbf{a} = \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{E}^e \cdot \mathbf{n}_l \quad (15)$$

A partir de la ecuación 12 se deriva la forma explícita de  $\bar{\mathbf{H}}^g$ , que satisface la condición de localización (ver Vrech et al.(2004)<sup>10</sup>)

$$\bar{\mathbf{H}}^g \left(\frac{2\pi l}{\delta}\right)^2 = \bar{H} - \mathbf{a} \cdot [\mathbf{Q}^e]^{-1} \cdot \mathbf{a}^* + \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{E}^e : \frac{\partial \Phi^*}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (16)$$

### 4 SOLUCIÓN GEOMÉTRICA DE LOCALIZACIÓN

En esta sección se presenta el análisis geométrico de la condición de falla localizada en términos del módulo crítico de endurecimiento/ablandamiento para la formulación elasto-plástica clásica, realizado previamente por Benallal (1992)<sup>11</sup>, Pijaudier-Cabot and Benallal (1993)<sup>1</sup>, Liebe and Willam (2001)<sup>12</sup> y Liebe (1998)<sup>13</sup>, entre otros.

De la condición de localización, ecuación 12, se obtiene la dirección crítica de localización  $\mathbf{n}_l$  y el parámetro máximo (crítico) de endurecimiento/ablandamiento  $\bar{H}_c(\mathbf{n}_l) = \max[\bar{H}(\mathbf{n}_l)]$ , cuya expresión define una elipse en las coordenadas de Mohr  $\sigma - \tau$

$$\sigma = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}_l \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad , \quad s = \mathbf{n}_l \cdot \mathbf{s} \cdot \mathbf{n}_l \quad (17)$$

$$\tau = (\mathbf{n}_l \cdot \mathbf{s}) \cdot (\mathbf{n}_l \cdot \mathbf{s}) - (\mathbf{n}_l \cdot \mathbf{s} \cdot \mathbf{n}_l)^2 \quad (18)$$

$$\begin{aligned}
 f_t &= 1200 \frac{kg}{cm^2} \\
 E &= 2100000 \frac{kg}{cm^2} \\
 \nu &= 0.2 \\
 \frac{\bar{H}}{f_t} &= 0 \\
 \frac{\bar{H}^g}{f_t} &= 50
 \end{aligned}$$

Table 1: Propiedades Material de von Mises

siendo  $\mathbf{n}_l$  la dirección normal al plano donde se evalúan dichas coordenadas. La dirección crítica de falla  $\mathbf{n}_l$  y el parámetro máximo de endurecimiento/ablandamiento  $\bar{H}_c$  quedan definidos por los puntos de contacto entre el círculo de tensiones de Mohr, ver Willam et al. (1994).<sup>9</sup>

La elipse de localización resulta

$$\frac{(\sigma - \sigma_0)^2}{A^2} - \frac{\tau^2}{B^2} = 1 \quad (19)$$

siendo  $\sigma_1$  y  $\sigma_3$ , las tensiones principales mayor y menor respectivamente, y

$$\sigma_0 = \frac{1}{3}I_1 - \frac{1 + \nu}{2(1 - 2\nu)}(\mu_f + \mu_q) \quad (20)$$

$$A^2 = 2 \frac{1 - \nu}{1 - 2\nu} B^2 \quad (21)$$

$$B^2 = \frac{\bar{H}_c}{4G} + J_2 + \frac{1(1 + \nu)^2(\mu_f + \mu_q)^2}{8(1 - 2\nu)(1 - \nu)} + \frac{1 + \nu}{1 - \nu} \mu_f \mu_q \quad (22)$$

Las expresiones 19 a 22 fueron extendidas para el caso de plasticidad de gradientes por Vrech et al. (2004)<sup>10</sup>. Sus predicciones son analizadas en la próxima sección.

## 5 ANÁLISIS NUMÉRICO

Se analizan en esta sección los indicadores de falla localizada para modelos materiales *locales* y *no locales* de gradientes, que responden al criterio de fluencia de von Mises.

Los datos materiales utilizados en ambos se presentan en la Tabla 1.

Los ejemplos tratados en esta sección corresponden al estado plano de deformaciones y al caso especial  $\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y)$ .

Se pone especial énfasis al estado tensional para el que se produzca la localización de las deformaciones.

### 5.1 Modelo material de von Mises

En la Figura 1, a partir de la curva que representa la función de fluencia para carga límite en el espacio de tensiones principales  $\sigma_I/\sigma_{II}$ , se grafican los indicadores de falla  $\det(Q_{ep})$  y  $\det(Q_g)$  correspondientes a elasto-plasticidad clásica y regularizada mediante teoría de gradientes respectivamente.

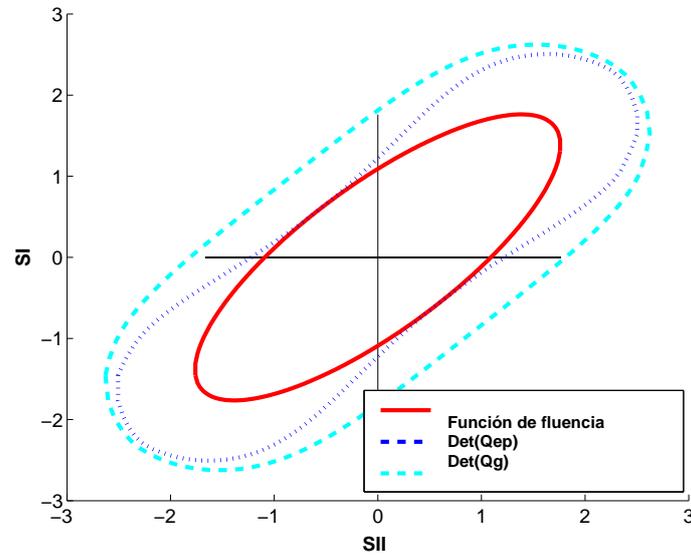


Figure 1: Indicadores de falla localizada - Criterio de von Mises

Se observa falla localizada en los puntos correspondientes a estados de corte puro  $|\sigma_I| = -|\sigma_{II}|$ , donde se obtienen valores nulos del indicador elasto-plástico *local* de falla localizada  $\det(Q_{ep})$ . Por el contrario, los valores del indicador elasto-plástico *no local* de gradientes  $\det(Q_g)$  se mantienen positivos.

Mediante el análisis geométrico de localización del estado de corte puro, resultan las elipses de la Figura 2. La correspondiente a plasticidad *local* presenta puntos de contacto con el círculo el Mohr, mientras que la correspondiente a plasticidad regularizada con teoría de gradientes evidencia la supresión de la condición de localización al carecer de puntos de tangencia.

Los valores críticos  $\frac{H_c}{E} = 0$  y  $\theta = 45.0^\circ$  deducidos a partir de la Figura 2 se verifican mediante el método analítico en la Figura 3.

## 6 CONCLUSIONES

En el presente trabajo se llevó a cabo el análisis preliminar numérico y geométrico, de la variación del indicador de falla localizada en el modelo elasto-plástico regularizado mediante teoría de gradientes. Dicho estudio, aplicado al criterio de fluencia de von Mises demuestra la capacidad regularizante de la teoría de gradientes. Si bien se mantiene la dirección crítica de falla, la condición de bifurcación del equilibrio y a su vez de falla localizada, queda suprimida al implementar la formulación de gradientes en el caso analizado.

## REFERENCES

- [1] Pijaudier-Cabot G. and Benallal A. Strain localization and bifurcation in a non-local continuum. *Int. J. Solids and Structures*, **30**, 1761–1775 (1993).

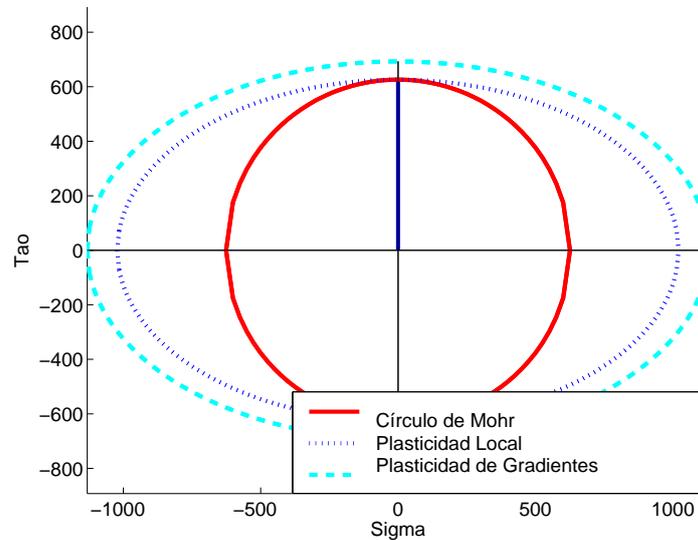


Figure 2: Método geométrico de localización - Estado de corte puro - Criterio de von Mises

- [2] Benallal A. and Comi C. Localization analysis via a geometrical method. *Int. J. Solids and Structures*, **33**, 99–119 (1993).
- [3] Rizzi E., Carol I., and Willam K. Localization analysis of elastic degradation in a non-local continuum. *J. Eng. Mech.*, **30**, 541–554 (1995).
- [4] Iordache M. and Willam K. Localized failure analysis in elastoplastic cosserat continua. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, **151**, 559–586 (1998).
- [5] Svedberg T. and Runesson K. *A Thermodynamically Consistent Theory of Gradient-Regularized Plasticity Coupled to Damage*. Licentiate Thesis, Chalmers University of Technology, Sweden, (1998).
- [6] Svedberg T. *On the Modelling and Numerics of Gradient-Regularized Plasticity Coupled to Damage*. Chalmers University of Technology, Sweden, (1999).
- [7] Ottosen N.S. and Runesson K. Properties of discontinuous bifurcation in elasto-plasticity. *Int. J. Solids and Structures*, **27**, 401–421 (1991).
- [8] Willam K. and Etse G. Failure assesment of the extended leon model for plain concrete. *Acta Mechanica*, **87**, 197–217 (1990).
- [9] Willam K., Etse G., Muenz T., and Menetrey P. Failure conditions and localization in concrete. *Structural Engineering and Structural Mechanincs Research Series. Report CU/SR-94-2*. University of Colorado at Boulder, (1994).
- [10] Vrech S., Etse G., and Dvorkin E. Geometrical localization analysis of parabolic drucker-prager gradient-regularized plasticity. *Remitido*, (2004).
- [11] Benallal A. On localization phenomena in thermo-elasto-plasticity. *Arch. Mech.*, **44**, 15–29 (1992).
- [12] Liebe T. and Willam K. A gradient-enhanced damage for quasi-brittle materials. *Int. J. Num. Mech.*, **39**, 3391–3403 (2001).

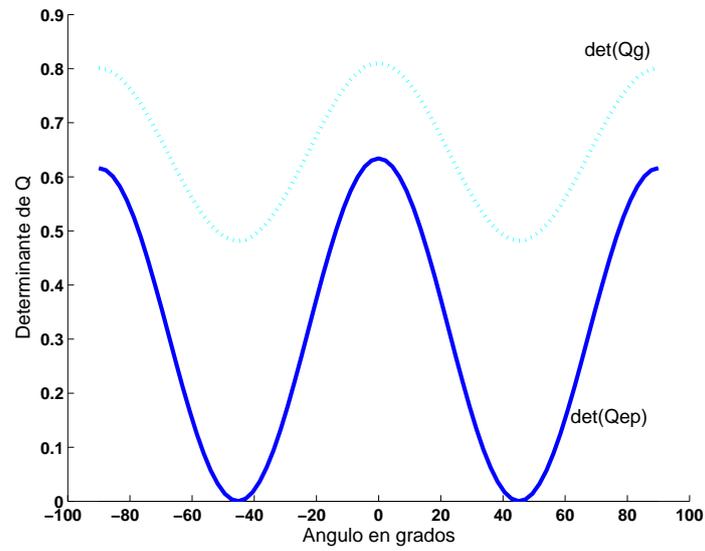


Figure 3: Método analítico de localización - Estado de corte puro - Criterio de von Mises

- [13] Liebe T. *Analytical and geometrical representation of localization analysis of curvilinear Drucker–Prager elastoplasticity*. University of Colorado at Boulder, (1981).