

## **ANÁLISIS ANALÍTICO Y GEOMÉTRICO DE LOCALIZACIÓN DEL MODELO ELASTOPLÁSTICO DE LEON - DRUCKER PRAGER BASADO EN TEORÍA DE GRADIENTES Y ENERGÍA DE FRACTURA**

**Sonia M. Vrech<sup>a</sup>, Javier L. Mrogisnki<sup>a</sup> y Guillermo Etse<sup>a,b</sup>**

<sup>a</sup>*Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET),  
Centro de Métodos Numéricos y Computacionales en Ingeniería, Universidad Nacional de Tucumán,  
Argentina, cemnci@herrera.unt.edu.ar*

<sup>b</sup>*Universidad de Buenos Aires, Facultad de Ingeniería*

**Palabras Clave:** Teoría de gradientes, bifurcación discontinua, análisis de localización de falla.

**Resumen.** En este trabajo se desarrolla el análisis analítico y geométrico de las propiedades de localización del modelo constitutivo elastoplástico de Leon - Drucker-Prager (LDP) termodinámicamente consistente, para materiales cuasi-frágiles como el hormigón. Esta formulación constitutiva basada en la teoría de gradientes y en conceptos de energía de fractura, incluye una longitud interna de gradientes que depende fuertemente del estado de presión hidrostática y representa una medida del volumen del sólido que participa en el proceso de degradación. Esta propiedad permite predecir apropiada y precisamente la transición del modo de falla frágil a dúctil que caracteriza al comportamiento de los materiales cuasi-frágiles sometidos a niveles de confinamiento crecientes. Los resultados del análisis analítico y geométrico de los indicadores de localización de deformaciones ilustran la capacidad del modelo constitutivo elastoplástico LDP de reproducir modos de falla difusa para estados de compresión triaxial, y bifurcaciones discontinuas para estados tensionales uniaxiales de tracción y compresión.

## 1. INTRODUCCION

En la actualidad, está generalmente aceptado que el comportamiento de falla de los materiales cuasi-frágiles como el hormigón depende fuertemente de las tensiones actuantes y de las propiedades mecánicas y químicas de su micro y meso-estructura.

En el régimen de tracción la respuesta material ante cargas mecánicas crecientes es altamente frágil y el daño se localiza en una única superficie de fractura de ancho nulo. El mecanismo de falla es controlado por la energía de fractura liberada en esta única fisura mientras el resto del material permanece intacto.

En el régimen de compresión a medida que crecen las presiones de confinamiento aumenta fuertemente la ductilidad del hormigón. El mecanismo de falla se caracteriza tanto por la aparición de fisuras en la dirección normal a las tensiones principales como por el proceso de daño en las zonas situadas entre las fisuras. Además, el ancho de la zona de localización de deformaciones crece a medida que lo hacen las presiones de confinamiento actuantes.

Se ha recurrido a numerosos procedimientos, tanto analíticos como geométricos para capturar el inicio de la localización y para determinar la dirección y amplitud de dichas fisuras y bandas de corte. Siguiendo la propuesta original de Nadai (1950), Thomas (1961), Hill (1962), Rudnicki y Rice (1975), recientemente varios autores han estudiado el problema en forma sistemática, ver a.o. Sobh (1987), Perić (1990), Ottosen y Runesson (1991), Willam y Etse (1990), Rizzi et al. (1995), Etse y Willam (1999), Pijaudier-Cabot y Benallal (1993), Liebe y Willam (2001), Etse y Vrech (2006), Vrech y Etse (2006).

La condición de localización elastoplástica del modelo LDP basado en gradientes y energía de fractura, escrita en la forma de una envolvente elíptica en las coordenadas de Mohr, permite apropiada y precisamente predecir la transición del modo de falla frágil a dúctil que caracteriza al comportamiento de los materiales cuasi-frágiles bajo niveles de confinamiento crecientes.

En este trabajo, la atención se enfoca en el análisis de las propiedades de localización del modelo elastoplástico LDP termodinámicamente consistente.

## 2. MODELO ELASTOPLASTICO DE LEON - DRUCKER-PRAGER LDP BASADO EN TEORIA DE GRADIENTES Y ENERGIA DE FRACTURA

En esta sección se formula el modelo elastoplástico de Leon- Drucker-Prager LDP para hormigones, propuesto por Vrech (2007), Etse et al. (2008), basado en teoría termodinámicamente consistente desarrollada por Svedberg y Runesson (1997).

En forma sucesiva se formulan el criterio de máxima resistencia del modelo, las superficies de fluencia en los regímenes de pre y postpico, el potencial plástico para flujo de plasticidad no asociado, y la ley de ablandamiento termodinámicamente consistente.

### 2.1. Criterio de máxima resistencia del modelo LDP para hormigón

La superficie de máxima resistencia del modelo LDP se obtiene mediante la combinación de la descripción parabólica del meridiano de compresión de acuerdo a Leon (1935) y Etse y Willam (1994), con la forma deviatorica circular de Drucker-Prager, mediante la eliminación de la dependencia en el tercer invariante (ángulo de Lode  $\theta$ ). La ecuación del denominado criterio LDP para hormigón es

$$F(p^*, \rho^*) = \frac{3}{2}\rho^{*2} + m_0 \left( \frac{\rho^*}{\sqrt{6}} + p^* \right) - c_0 = 0 \quad ; \quad p^* = \frac{p}{f_c} \quad , \quad \rho^* = \frac{\rho}{f_c}, \quad (1)$$

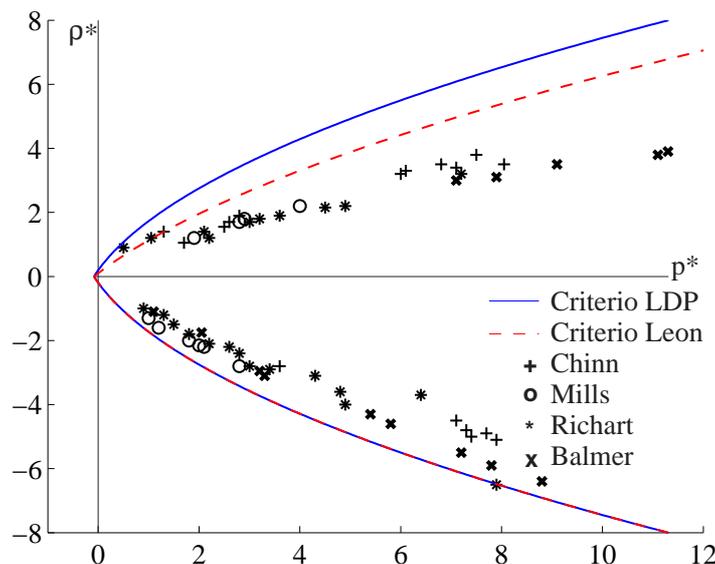


Figura 1: Comparación del criterio de fluencia LDP en el plano de invariantes.

expresada en términos de las primera y segunda coordenadas del espacio de tensiones de Haigh Westergaard, normalizadas respecto de la resistencia a compresión uniaxial  $f'_c$

$$p^* = \frac{I_1}{3f'_c} \quad ; \quad \rho^* = \frac{\sqrt{2J_2}}{f'_c} \tag{2}$$

siendo  $I_1$  y  $J_2$  el primer invariante del tensor de tensiones y el segundo invariante del tensor deviatorico de tensiones, respectivamente. La calibración de los parámetros de cohesión y fricción  $c_0$  y  $m_0$  en términos de  $f'_c$  y de la resistencia a tracción uniaxial  $f'_t$ , considerando la hipótesis de estado plano axialsimétrico conduce a los valores

$$m_0 = \frac{3(f_c^2 - f_t^2)}{2 f_c f_t} \quad \text{y} \quad c_0 = 1 \tag{3}$$

mientras para el estado plano de deformaciones con  $\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y)$  se obtienen los coeficientes

$$m_0 = \frac{3\zeta(1 - \beta^2)}{\sqrt{\zeta}(\beta - 1) + (1 + \nu)(\beta + 1)} \quad \text{y} \quad c_0 = \zeta + \frac{1}{3}[\sqrt{\zeta} - (1 + \nu)]m_0 \tag{4}$$

con

$$\beta = \frac{f'_t}{f'_c} \quad \text{y} \quad \zeta = 1 - \nu + \nu^2 \tag{5}$$

siendo  $E$  y  $\nu$  los módulos de Young y de Poisson, respectivamente.

En la Fig. 1 se comparan los criterios de máxima resistencia de Leon y LDP con los valores de las cargas máximas obtenidos como resultados de ensayos experimentales realizados sobre probetas de hormigón en los meridianos de tracción y compresión. Se observa en esta figura que el criterio LDP, contrariamente al criterio de Leon, sobre-estima la resistencia a tracción triaxial del hormigón (i.e. cuando el ángulo de Lode  $\theta = 0$ ). Sin embargo el nivel de error por dicha sobre-resistencia se considera admisible en esta formulación en virtud de la considerable ventaja computacional y matemática que trae aparejada.

## 2.2. Superficies de fluencia del modelo LDP en regímenes de pre y postpico

La superficie de fluencia  $F$  y el potencial plástico  $Q$  del modelo propuesto en los regímenes de endurecimiento y ablandamiento se expresan de acuerdo a las ecuaciones

$$F(p^*, \rho^*, K_h, K_s) = \frac{3}{2}\rho^{*2} + m_0 \left( \frac{\rho^*}{\sqrt{6}} + p^* \right) - K_h K_s = 0 \quad (6)$$

$$Q = F(p^*, \rho^*, K_h, K_s) + m_0 p^* (\eta - 1) = 0 \quad (7)$$

respectivamente, siendo  $\eta$  el parámetro volumétrico de no asociatividad que varía entre  $0 \leq \eta \leq 1$ . En régimen de prepico, la evolución de la superficie de fluencia es definida por la variación de la tensión disipativa de endurecimiento  $K_h^o \leq K_h \leq 1$ , mientras la tensión disipativa de ablandamiento permanece constante  $K_s = 1$ . Cuando  $K_h = 1$  el criterio de máxima resistencia LDP para hormigones es alcanzado. Bajo carga monotónica superada la carga pico, comienza el régimen de ablandamiento. La degradación de la resistencia durante el proceso de postpico queda definida por la disminución de la tensión disipativa de ablandamiento  $1 \geq K_s \geq 0$  mientras  $K_h = 1$  permanece constante.

El comportamiento de endurecimiento, caracterizado por la degradación de la rigidez tangencial bajo deformaciones anelásticas crecientes hasta ser alcanzada la carga pico, consiste en un proceso de deformaciones anelásticas homogéneamente distribuidas y en consecuencia se trata de un fenómeno completamente local. La ductilidad del proceso de endurecimiento varía fuertemente con la presión de confinamiento actuante, en consecuencia se considera una formulación anelástica local de prepico dependiente de la presión de confinamiento.

## 2.3. Ley de ablandamiento isótropo

El comportamiento de ablandamiento de los materiales cohesivo-friccionales como el hormigón está asociado a procesos de deformación bajo heterogeneidades crecientes. La evolución y el tamaño de las mismas, i.e. la longitud característica  $l_c$  de la zona donde se desarrollan los procesos de disipación de energía, dependen fuertemente del problema particular de valores de borde y, en consecuencia, no pueden ser tratados como propiedades del material. En la presente formulación se considera que la resistencia instantánea del hormigón en régimen de postpico se obtiene por medio de un mecanismo en paralelo de dos componentes: la resistencia para iniciar o desarrollar procesos de micro y/o macrofisuración  $K_{sf}^p(\kappa_s)$ , y la resistencia para iniciar o desarrollar procesos de daño en las zonas del material situadas entre fisuras activas  $K_{sc}^g(\nabla \kappa_s)$ . En términos de tensión disipativa de ablandamiento  $K_s$  y de la variable de estado termodinámicamente consistente  $\kappa_s$ , el mecanismo que controla el proceso de degradación en el régimen de postpico puede expresarse matemáticamente como

$$K_s(\kappa_s, \nabla \kappa_s) = K_{sf}^p(\kappa_s) + K_{sc}^g(\nabla \kappa_s) \quad (8)$$

Esta expresión es totalmente compatible con la descomposición aditiva de la densidad de energía libre anelástica en una componente local y una no local de gradientes. La variable de estado termodinámicamente consistente está asociada al parámetro plástico mediante la ley de normalidad

$$\dot{\kappa}_s = \dot{\lambda} \frac{\partial Q}{\partial K_s} \quad (9)$$

### 2.3.1. Ablandamiento debido al proceso de fractura

La ley de evolución de la resistencia debida a fractura o tensión disipativa local resulta

$$\dot{K}_{sf}^p = \dot{\lambda} H_{sf}^p \tag{10}$$

siendo  $\dot{\lambda}$  la tasa del parámetro plástico y  $H_{sf}^p$  el módulo de ablandamiento local calculado de acuerdo a la relación

$$H_{sf}^p = -\alpha_f \exp(-\alpha_f \lambda) \quad \text{con} \quad \alpha_f = 5 \frac{h_f(p^*)}{u_r} \|\langle \mathbf{m}_I \rangle\| \tag{11}$$

donde  $u_r$  representa la apertura de fisura máxima en modo I de falla y  $h_f$  la longitud interna asociada al proceso de fractura activa y, específicamente, la distancia o separación entre microfisuras, definida como una función de la presión de confinamiento normalizado  $p^*$ . El tensor  $\mathbf{m}_I = \frac{\partial Q}{\partial \boldsymbol{\sigma}_I}$  y  $\boldsymbol{\sigma}_I$  el tensor de tensiones principales. Los corchetes de Mc Auley indican que sólo las deformaciones plásticas principales de tracción contribuyen a la resistencia debida a la evolución de la fractura.

En modo I de falla, la longitud característica de fractura  $h_f$  alcanza su valor máximo, la altura de la probeta  $h_t$  y se reproduce la variación exponencial de la resistencia uniaxial a tracción normalizada del hormigón propuesta por Hurlbut (1985).

### 2.3.2. Ablandamiento no local de gradientes debido a la degradación del continuo

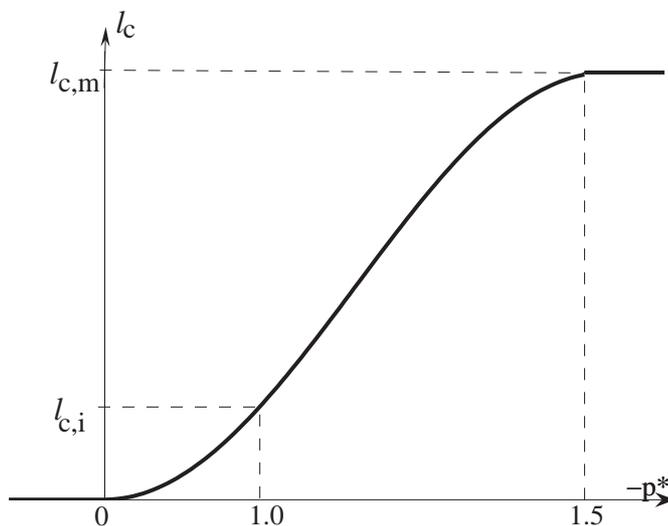


Figura 2: Variación de la longitud interna característica.

La ley de evolución de la tensión disipativa no local de gradientes en régimen de ablandamiento se obtiene a partir de la relación

$$\dot{K}_{sc}^g = -l_c(p^*)^2 H_{sc}^g \nabla^2 \dot{\lambda} \tag{12}$$

donde  $\nabla^2 \lambda$  representa la derivada de segundo orden del parámetro plástico,  $H_{sc}^g$  el coeficiente escalar de gradientes y  $l_c$  la longitud característica de gradientes que define el ancho de la banda de corte donde se desarrolla la degradación del material ubicado entre las fisuras activas. Durante el proceso de ablandamiento, el comportamiento de los materiales cuasi-frágiles como el hormigón depende fuertemente de la presión de confinamiento actuante  $p^*$ . Esta dependencia se define matemáticamente como

$$l_c(p^*) = \begin{cases} 0 & \text{si } p^* \geq 0; \\ 0,5l_{c,m} [1 + \text{sen}(2p^* - \frac{\pi}{2})] & \text{si } -1,5 \leq p^* < 0; \\ l_{c,m} & \text{si } p^* < -1,5. \end{cases} \quad (13)$$

siendo  $l_{c,m}$  el máximo valor admisible de  $l_c$ . Se supone que  $l_c$  coincide con el tamaño máximo de los agregados  $l_{c,i}$  cuando  $p^* = -1$ , i.e. cuando la presión de confinamiento es igual a  $f'_c$ , correspondiente al ensayo de compresión uniaxial. La variación de la longitud interna característica puede observarse en la Fig. 2.

### 3. CONDICION DE FALLA LOCALIZADA

Desde el punto de vista de la Mecánica del Continuo y en el marco del concepto de fisura difusa, los modos de falla localizada están asociados a bifurcaciones discontinuas del equilibrio y conducen a la pérdida de la elipticidad de las ecuaciones que gobiernan el equilibrio estático. Los campos de deformaciones inhomogéneos o localizados poseen un plano de discontinuidad caracterizado por la condición de singularidad del tensor acústico o de localización, de segundo orden [ver a.o. Ottosen y Ruesson (1991) y Willam y Etse (1990)].

En esta contribución se considera el caso particular de comportamiento material elastoplástico isotrópico a través de la formulación del modelo LDP, aplicable a materiales cuasi-frágiles que no exhiben endurecimiento o ablandamiento cinemáticos.

#### 3.1. Condición analítica de localización

El estudio de la condición analítica de localización de deformaciones de los materiales elastoplásticos dependientes de gradientes está basado en el análisis de ondas planas y ha sido desarrollado originalmente por Svedberg (1999).

Se supone que ambos tipos de teorías constitutivas elastoplásticas, local y de gradientes, se expresan de acuerdo a la siguiente ecuación

$$\dot{\sigma} = \mathbf{E}^{ep} : \dot{\epsilon} \quad (14)$$

donde  $\mathbf{E}^{ep}$  representa al operador material elastoplástico, definido por la ecuación general

$$\mathbf{E}^{ep} = \mathbf{E}^e - \frac{1}{(h + h_g)} \mathbf{E}^e : \frac{\partial Q}{\partial \sigma} \otimes \frac{\partial F}{\partial \sigma} : \mathbf{E}^e \quad (15)$$

con los módulos plásticos generalizados *local* y *no-local* calculados de acuerdo a

$$h = \frac{\partial F}{\partial \sigma} : \mathbf{E}^e : \frac{\partial Q}{\partial \sigma} + \bar{H} \quad , \quad \bar{H} = H \frac{\partial F}{\partial K} \frac{\partial Q}{\partial K} \quad (16)$$

y

$$h^g = \begin{cases} 0 & \text{Platicidad local} \\ \bar{H}^g \left(\frac{2\pi l_c}{\delta}\right)^2 & \text{Platicidad dependiente de gradientes.} \end{cases} \quad (17)$$

siendo  $\delta$  la longitud final de localización,  $H$  el módulo de endurecimiento o ablandamiento *local* y  $H^g$  el módulo de gradientes o *no local*. En lo sucesivo y por razones de practicidad se denominará del mismo modo a los los módulos  $\bar{H}$  y  $\bar{H}^g$ , respectivamente.

En el caso de formas de falla localizada asociadas con bifurcaciones discontinuas del equilibrio se considera el tensor elastoplástico de localización de gradientes definido como

$$\mathbf{Q}^g = \mathbf{Q} - \frac{1}{h + h^g} \mathbf{a}_m \otimes \mathbf{a}_n \quad (18)$$

con el tensor elástico de localización

$$\mathbf{Q} = \mathbf{n}_l \cdot \mathbf{E}^e \cdot \mathbf{n}_l \quad (19)$$

siendo  $\mathbf{n}_l$  la dirección normal a la superficie de discontinuidad, y

$$\mathbf{a}_m = \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{E}^e \cdot \mathbf{n}_l \quad (20)$$

$$\mathbf{a}_n = \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{E}^e \cdot \mathbf{n}_l \quad (21)$$

La condición de falla localizada en el caso de elastoplasticidad dependiente de gradientes

$$\det(\mathbf{Q}^g) = 0 \quad (22)$$

conduce al análisis espectral del tensor  $\mathbf{Q}^g$ . Su mínimo autovalor respecto de la métrica definida por  $\mathbf{Q}$ , se expresa como

$$\lambda^{(1)} = 1 - \frac{\mathbf{a}_n(\mathbf{n}_l) \cdot [\mathbf{Q}(\mathbf{n}_l)]^{-1} \cdot \mathbf{a}_m(\mathbf{n}_l)}{h + h^g} = 0 \quad (23)$$

La forma explícita de la ec. (23) resulta

$$\mathcal{H} + \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{E}^e : \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} - \mathbf{a}_n \cdot [\mathbf{Q}^e]^{-1} \cdot \mathbf{a}_m = 0 \quad (24)$$

con

$$\mathcal{H} = \bar{H}_c^g \left( \frac{2\pi l_c}{\delta} \right)^2 + \bar{H}_c \quad (25)$$

La condición de localización de la ec. (24) sirve de base para la evaluación analítica y numérica de las direcciones de localización  $\mathbf{n}_l$  y de los parámetros de endurecimiento/ablandamiento máximos  $\bar{H}_c(\mathbf{n}_l) = \max[\bar{H}(\mathbf{n}_l)]$  en el caso de plasticidad local, y  $\bar{H}_c^g(\mathbf{n}_l) = \max[\bar{H}^g(\mathbf{n}_l)]$  en el caso de plasticidad dependiente de gradientes.

En el caso particular de elastoplasticidad clásica, la condición de localización resulta

$$\bar{H}_c + \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{E}^e : \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} - \mathbf{a}_n \cdot [\mathbf{Q}^e]^{-1} \cdot \mathbf{a}_m = 0 \quad (26)$$

Soluciones explícitas generales del módulo crítico de endurecimiento o ablandamiento y del ángulo crítico de localización han sido desarrolladas por Ottosen y Runesson (1991) [Ottosen y Runesson \(1991\)](#) mediante la utilización de multiplicadores de Lagrange para estados

tensionales tridimensionales y por Runesson et al (1991) y Perić (1990) Perić (1990) para estados planos de deformaciones y tensiones, incluyendo este último soluciones para estados axialesimétricos. Aplicaciones de estas soluciones analíticas para modelos locales de materiales cuasi-frágiles fueron desarrolladas por Etse (1992) Etse (1992) y ? y para modelos no locales de gradientes por Vrech (2007).

De las ecs. (24) y (25) se deduce que la formulación material elastoplástica dependiente de gradientes conduce a modos de falla localizados, en la misma forma que el modelo material local en los casos siguientes [Vrech y Etse (2006)]:

Caso 1: Cuando la longitud de onda  $\delta \rightarrow \infty$ , resultando  $h_g = 0$ . La ec. (24) se transforma en la condición de localización correspondiente a elastoplasticidad clásica de ec. (26).

Caso 2: Bajo ciertas condiciones, cuando el coeficiente de ablandamiento *local* adoptado cumple la condición  $\bar{H} < \bar{H}_c$ . Y se verifica la relación

$$\bar{H}_c = \bar{H} + \bar{H}_c^g \left( \frac{2\pi l_c}{\delta} \right)^2 \quad (27)$$

A partir la ec. (27) puede calcularse el ancho de la zona de localización crítica  $\delta$ , equivalente a la longitud de la onda, como

$$\frac{\delta}{l_c} = 2\pi \sqrt{\frac{\bar{H}_c^g}{(\bar{H}_{loc}^p - \bar{H}^p)}} \quad (28)$$

y en consecuencia, el coeficiente de gradientes crítico verifica la relación

$$\bar{H}_c^g = (\bar{H}_c - \bar{H}) \left( \frac{\delta}{2\pi l_c} \right)^2 \quad (29)$$

Es importante hacer notar en esta última ecuación, que adoptando valores de  $\bar{H}_c^g$  menores a  $\bar{H}_c^g$  se suprimen las propiedades regularizantes de la teoría de gradientes obteniéndose modos de falla localizados. Esto resulta una propiedad de la teoría elastoplástica de gradientes que permite reproducir en forma realista la transición del modo de falla frágil a dúctil con el incremento de las presiones de confinamiento, comportamiento característico de los materiales cuasi-frágiles como el hormigón.

### 3.2. Método geométrico de bifurcación discontinua aplicado al modelo LDP

En esta sección se realiza el estudio del método geométrico para el análisis de localización del modelo material elastoplástico LDP termodinámicamente consistente basado en la teoría de gradientes y energía de fractura. El procedimiento se basa en la propuesta original de Benallal (1992), desarrollada posteriormente por Pijaudier-Cabot y Benallal (1993) y Liebe y Willam (2001) para plasticidad clásica, y Etse y Vrech (2006) y Vrech y Etse (2007), Vrech y Etse (2006) para plasticidad no local basada en gradientes.

La condición de localización de la ec. (24) define una elipse

$$\frac{(\sigma - \sigma_0)^2}{A^2} + \frac{\tau^2}{B^2} = 1 \quad (30)$$

en las coordenadas de Mohr

$$\sigma = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}_l \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad , \quad s = \mathbf{n}_l \cdot \mathbf{s} \cdot \mathbf{n}_l \quad (31)$$

$$\tau = (\mathbf{n}_l \cdot \mathbf{s}) \cdot (\mathbf{n}_l \cdot \mathbf{s}) - (\mathbf{n}_l \cdot \mathbf{s} \cdot \mathbf{n}_l)^2 \quad (32)$$

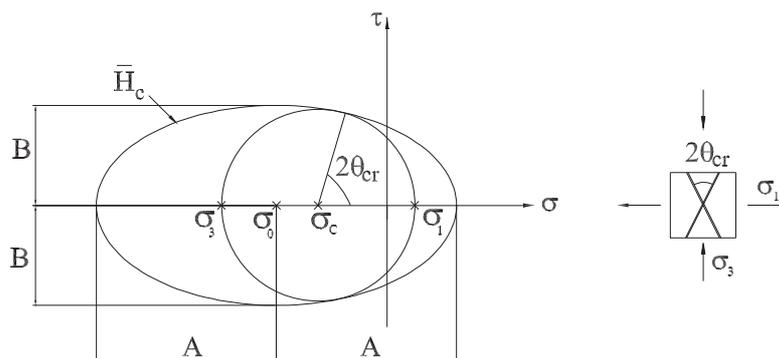


Figura 3: Círculo de Mohr y elipse de localización.

coincidiendo  $n_l$  con la dirección normal al plano donde se evalúan las componentes de Mohr. Los parámetros de la elipse de localización y del círculo de Mohr se ilustran en la Fig. 3.

Considerando la función del criterio LDP para hormigón de ec. (1) y el potencial plástico de ec. (7), se obtienen las siguientes funciones gradientes

$$\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = a_1 \mathbf{S} + a_2 \mathbf{I}_2 \quad , \quad \frac{\partial Q}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = a_1 \mathbf{S} + a_3 \mathbf{I}_2 \quad (33)$$

siendo

$$a_1 = 3f'_t + f'_c f'_t \frac{m_0}{\rho \sqrt{6}} \quad (34)$$

$$a_2 = f'_c f'_t \frac{m_0}{3} \quad (35)$$

$$a_3 = \eta a_2 \quad (36)$$

Adoptando para el tensor elástico la forma

$$\mathbf{E}^e = 2G\mathbf{I}_4 + \Lambda \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \quad (37)$$

con los parámetros de Lamé asociados a los módulos de Young y de Poisson,  $E$  y  $\nu$ , mediante las relaciones

$$\Lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad , \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (38)$$

los vectores de las ecs. (20) y (21) se reformulan como

$$\mathbf{a}_m = 2a_1 G \mathbf{n}_l \cdot \mathbf{S} + a_3 \frac{E}{(1-2\nu)} \mathbf{n}_l \quad (39)$$

$$\mathbf{a}_n = 2a_1 G \mathbf{n}_l \cdot \mathbf{S} + a_2 \frac{E}{(1-2\nu)} \mathbf{n}_l \quad (40)$$

y considerando la ec. (19) se obtiene el tensor de localización inverso

$$[\mathbf{Q}]^{-1} = \frac{1}{G} \left[ \mathbf{I} - \frac{1}{2(1-\nu)} \mathbf{n}_l \otimes \mathbf{n}_l \right] \quad (41)$$

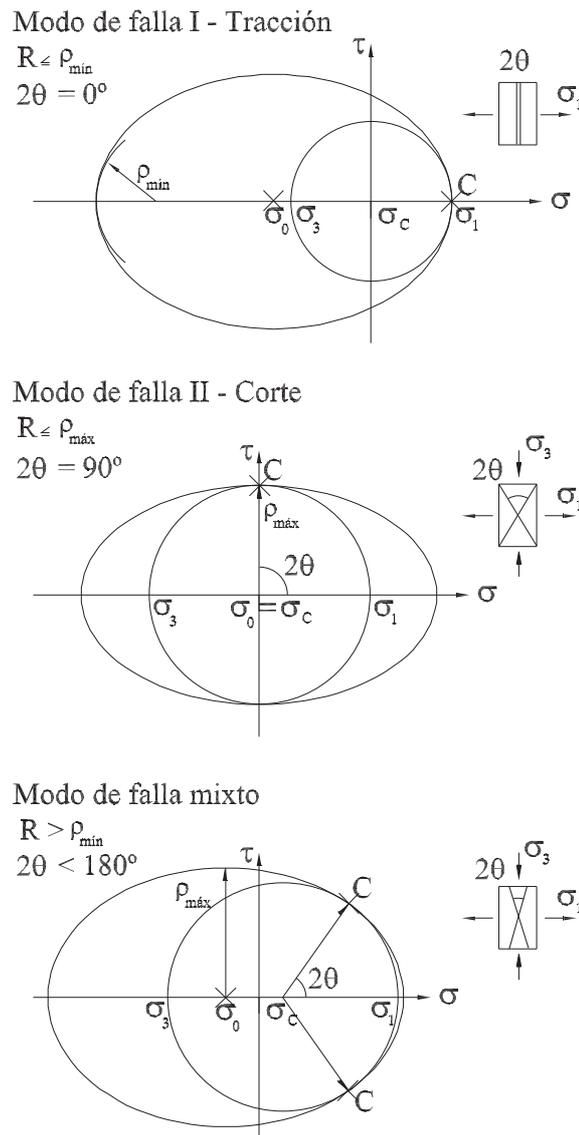


Figura 4: Modos de falla y envolvente de localización del círculo de Mohr.

El ángulo crítico  $\theta_{cr}$  y los parámetros de endurecimiento/ablandamiento críticos de localización  $\bar{H}_c$  y  $\bar{H}_c^g$  se obtienen cuando la elipse envolvente de localización de la ec. (30) contacta al círculo de tensiones de Mohr

$$(\sigma - \sigma_c)^2 + \tau^2 = R^2 \quad (42)$$

siendo el centro y el radio del círculo de Mohr

$$\sigma_c = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \quad \text{y} \quad R = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \quad (43)$$

y  $\sigma_1$  y  $\sigma_3$  las tensiones principales mayor y menor, respectivamente. En ese caso, el centro  $\sigma_0$  y

los semiejes  $A$  y  $B$  de la elipse de localización de ec. (30) resultan

$$\sigma_0 = \frac{1}{3}I_1 - \frac{(a_2 + a_3)(1 + \nu)}{2a_1(1 - 2\nu)} \quad (44)$$

$$B^2 = \frac{\mathcal{H}}{4Ga_1^2} + J_2 + \frac{a_2a_3(1 + \nu)}{a_1^2(1 - \nu)} + \frac{(a_2 + a_3)^2(1 + \nu)^2}{8a_1^2(1 - 2\nu)(1 - \nu)} \quad (45)$$

$$A^2 = 2\frac{(1 - \nu)}{(1 - 2\nu)}B^2 \quad (46)$$

Tres modos diferentes de falla pueden distinguirse dependiendo de la ubicación de los puntos de contacto. La Fig. 4 ilustra la relación entre del tamaño relativo del radio del círculo  $R$  y los radios de curvatura máximo y mínimo de la elipse

$$\rho_{max} = B \quad , \quad \rho_{min} = \frac{B^2}{A} \quad (47)$$

En el caso particular de elastoplasticidad clásica se considera la condición de localización de ec. (26). Por lo tanto, el parámetro  $B^2$ , representativo del eje vertical de la elipse en la ec. (30), toma la forma

$$B^2 = \frac{\bar{H}_c}{4Ga_1^2} + J_2 + \frac{a_2a_3(1 + \nu)}{a_1^2(1 - \nu)} + \frac{(a_2 + a_3)^2(1 + \nu)^2}{8a_1^2(1 - 2\nu)(1 - \nu)} \quad (48)$$

Los efectos no locales en términos de la longitud característica  $l_c$  y del módulo de endurecimiento o ablandamiento de gradientes  $\bar{H}^g$  sólo afectan las expresiones de los semiejes  $A$  y  $B$  de la elipse de localización. Además, de las ecs. (24) y (45) se concluye que el semieje  $B$  de la elipse de localización basada en plasticidad de gradientes adopta la expresión de la plasticidad local de ec. (48) cuando la relación  $l_c/\delta \rightarrow 0$ , caso correspondiente al estado de tracción uniaxial de acuerdo a la ec. (13).

### 3.3. Análisis de localización del modelo elastoplástico LDP termodinámicamente consistente basado en teoría gradientes y energía de fractura

Las propiedades de localización del modelo LDP termodinámicamente consistente se analizan para el estado plano de deformaciones cuando  $\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y)$ . Se consideran los ensayos uniaxiales de tracción y compresión, y los ensayos triaxiales de compresión con las siguientes propiedades del material

|                                               |   |         |     |
|-----------------------------------------------|---|---------|-----|
| Módulo elástico - $E$                         | = | 19305,3 | MPa |
| Coefficiente de Poisson - $\nu$               | = | 0,2     |     |
| Resistencia a compresión - $f_c$              | = | 22,0    | MPa |
| Resistencia a tracción - $f_t$                | = | 2,7     | MPa |
| Longitud interna inicial - $l_{c,i}$          | = | 25,0    | mm  |
| Longitud interna máxima - $l_{c,m}$           | = | 110,0   | mm  |
| Módulo de gradientes - $H^g$                  | = | 55,6E   | MPa |
| Separación entre fisuras - $h_t$              | = | 108,0   | mm  |
| Parámetro de endurecimiento inicial - $K_h^o$ | = | 0,1     |     |
| Longitud interna inicial - $l_{c,i}$          | = | 25,0    | mm  |

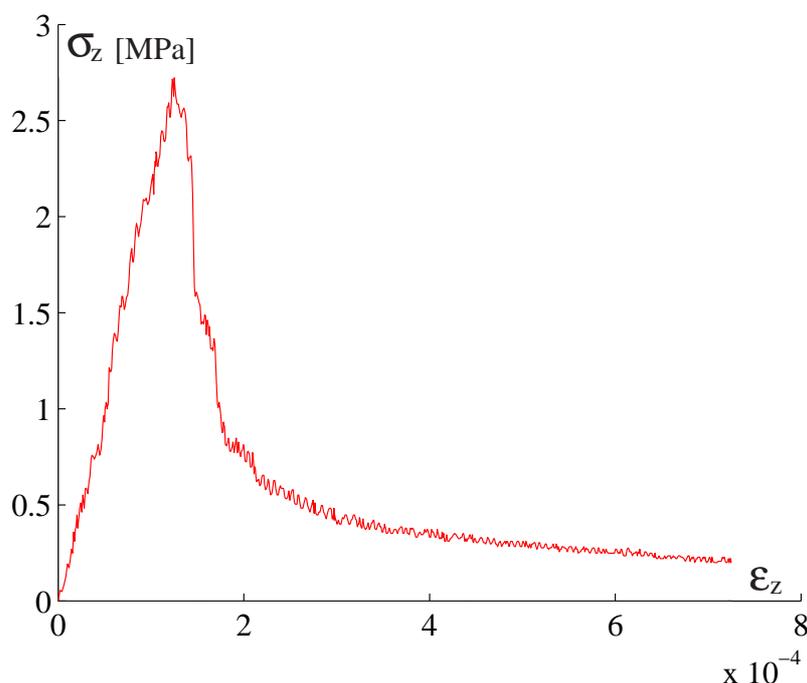


Figura 5: Ensayo de tracción uniaxial. Hormigón  $f'_c = 22.06 \text{ MPa}$  y  $f'_t = 2.75 \text{ MPa}$  [Hurlbut (1985)].

Utilizando las predicciones de Hurlbut (1985) del ensayo a tracción uniaxial de Fig. 5, y a compresión uni y triaxial de Fig. 6, se grafican para cada caso el círculo de Mohr y la elipse de localización correspondiente a la formulación no local de gradientes del modelo LDP. Los resultados obtenidos, en correspondencia con las Figs. 7 a 11 definen el tipo de falla que acontece en coincidencia con la carga pico.

El ensayo uniaxial de tracción de la Fig. 7 evidencia la localización mediante la existencia de un punto de contacto entre la elipse y círculo de Mohr para el ángulo crítico  $2\theta_c = 0^\circ$ , característico del modo I de falla frágil por tracción, en correspondencia con un módulo crítico  $\bar{H} = -4425.25 \text{ E}$ . Además el radio  $R$  del círculo de Mohr coincide con la curvatura mínima de la elipse  $\rho_{min} = \frac{B^2}{A}$ .

En el ensayo uniaxial de compresión de la Fig. 8 la tangencia entre elipse y círculo de Mohr se produce en dos puntos coincidentes con las direcciones  $2\theta_c = 58^\circ$  y  $302^\circ$ , para un módulo crítico  $\bar{H} = -24793.14 \text{ E}$ , indicando un modo de falla mixto de acuerdo a la clasificación de la Fig. 4. En este caso el radio  $R$  del círculo de Mohr es menor a la curvatura máxima de la elipse de localización  $\rho_{max} = B$ , y mayor a la curvatura mínima.

En ambos ensayos uniaxiales se producen fallas de tipo frágil, por lo que puede concluirse que el modelo elastoplástico LDP dependiente de gradientes reproduce modos de falla frágil.

Considerando las elipses correspondientes a los ensayos de compresión triaxial de las Figs. 9, 10 y 11 asociadas a presiones de confinamiento  $\sigma_0$  iguales a 0.66, 3.30 y 13.23 MPa respectivamente, puede verificarse la ausencia de contacto entre elipse y círculo de Mohr, característica propia del modo de falla dúctil o difusa.

En consecuencia, puede concluirse que el modelo elastoplástico LDP suprime la condición de localización o bifurcación discontinua en los ensayos de compresión triaxial. La falla difusa representa la distribución homogénea de las deformaciones plásticas que experimenta el hormigón sometido a estados de compresión triaxial.

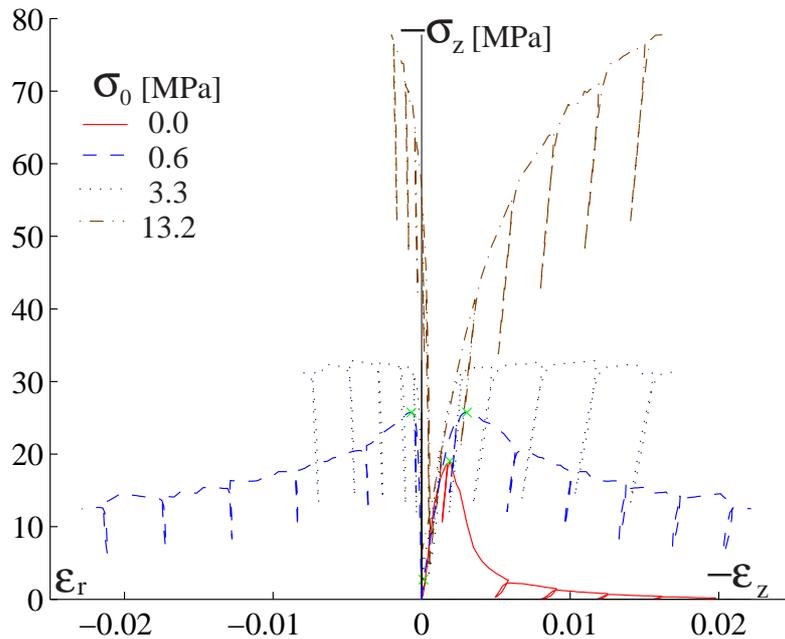


Figura 6: Ensayos de compresión uniaxial y triaxial bajo distintas presiones de confinamiento  $\sigma_0$ . Hormigón  $f'_c = 22.06 \text{ MPa}$  [Hurlbut (1985)].

A continuación se verifican en forma analítica los resultados obtenidos mediante el método geométrico. Para los estados tensionales analizados, los resultados en términos de la relación  $\frac{\det(\mathbf{Q}^g)}{\det(\mathbf{Q})}$  se presentan en las Figs. 12 a 14.

En el caso del ensayo uniaxial de tracción de Fig. 12 se observa el contacto entre la curva y el eje horizontal, verificándose la condición de localización de deformaciones  $\det(\mathbf{Q}^g) = 0$ , para el mismo ángulo y módulo críticos calculados anteriormente.

En forma similar, la Fig. 13 demuestra la satisfacción de la condición de localización de deformaciones del ensayo uniaxial de compresión. Los ángulos críticos de localización se calculan de acuerdo a  $\theta_c = 90^\circ - 61^\circ = 29^\circ$  y  $\theta_c = 270^\circ - 151^\circ = 119^\circ$ .

En la Fig. 14 se presentan las curvas correspondientes a los ensayos de compresión triaxial. Se verifica que el indicador de la condición de localización  $\det[\mathbf{Q}^g]$  permanece positivo, y las direcciones críticas coinciden con las obtenidas en las elipse de las Figs. 9 a 11, siendo  $\theta_c = 30.5^\circ$ ,  $38.3^\circ$  y  $43.7^\circ$ , respectivamente.

#### 4. CONCLUSIONES

En este trabajo se ha llevado a cabo el análisis de las propiedades de bifurcación discontinua del modelo constitutivo de Leon - Drucker-Prager LDP, termodinámicamente consistente y basado en teoría de gradientes y energía de fractura para materiales cuasi-frágiles, mediante los métodos analítico y geométrico de localización.

La condición de localización elastoplástica dependiente de gradientes se ha expresado en términos de las coordenadas de Mohr con el objeto de obtener una elipse que representa la envolvente de localización para cada estado de tensiones. De este modo, la condición de localización se define geométricamente mediante la condición de tangencia entre la elipse de localización

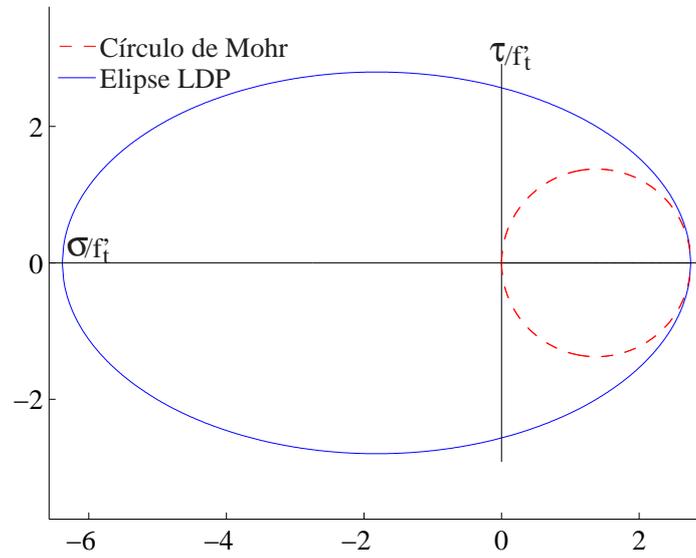


Figura 7: Elipse de localización correspondiente a la carga pico del ensayo de tracción uniaxial de Hurlbut (1985). Modelo LDP.

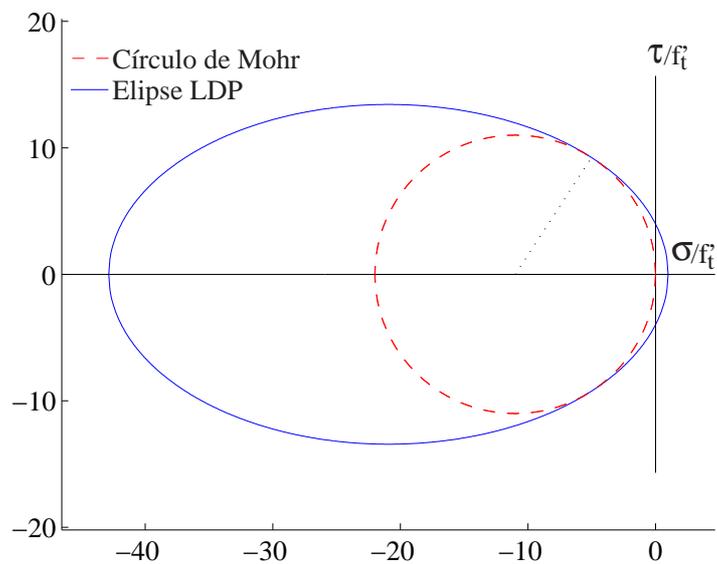


Figura 8: Elipse de localización correspondiente a la carga pico del ensayo de compresión uniaxial de Hurlbut (1985). Modelo LDP.

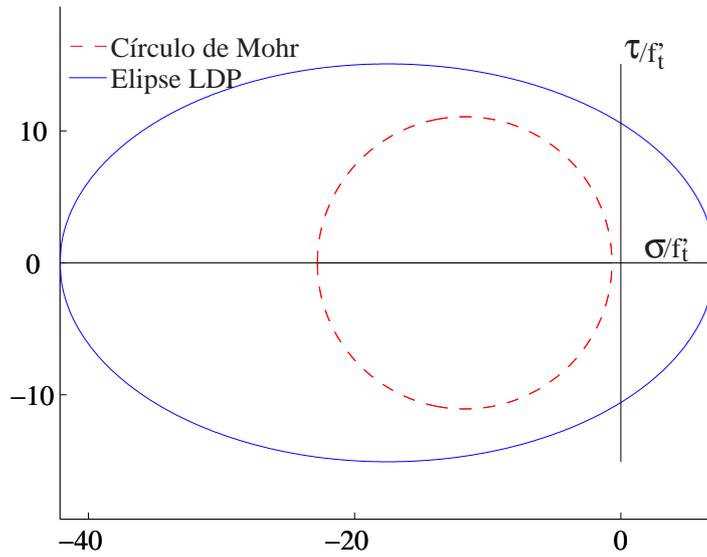


Figura 9: Elipse de localización correspondiente a la carga pico del ensayo de compresión triaxial de Hurlbut (1985).  $\sigma_0 = 0.03 f'_c$ . Modelo LDP.

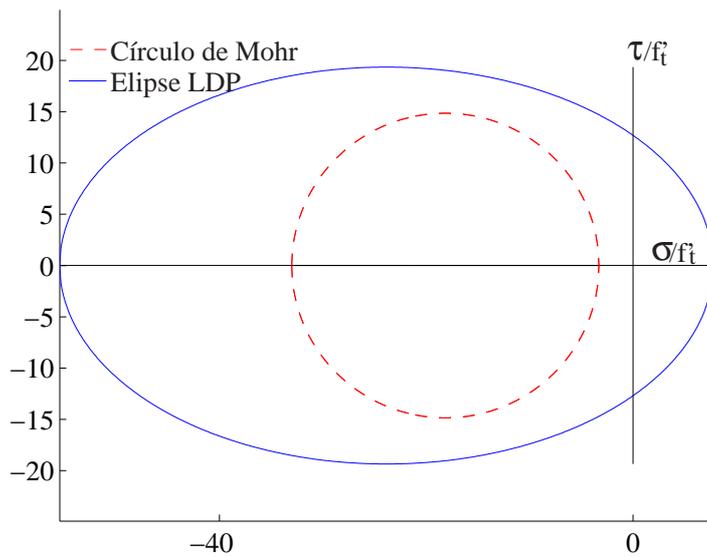


Figura 10: Elipse de localización correspondiente a la carga pico del ensayo de compresión triaxial de Hurlbut (1985).  $\sigma_0 = 0.15 f'_c$ . Modelo LDP.

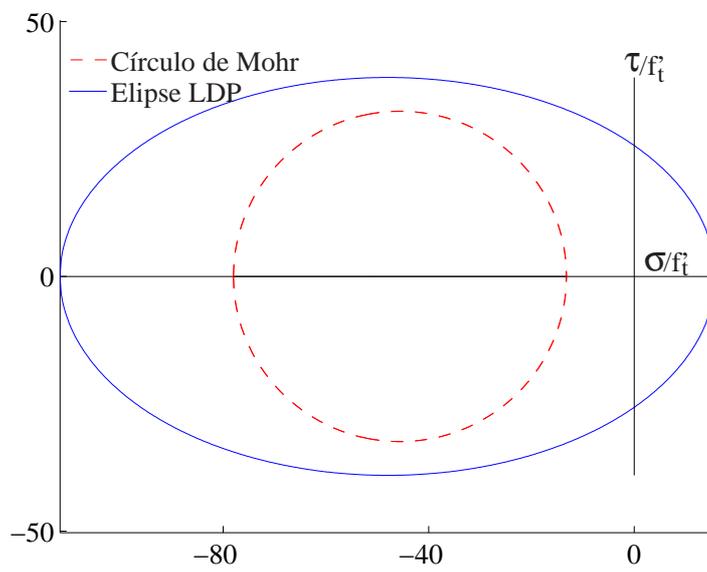


Figura 11: Elipse de localización correspondiente a la carga pico del ensayo de compresión triaxial de [Hurlbut \(1985\)](#).  $\sigma_0 = 0.6f'_c$ . Modelo LDP.

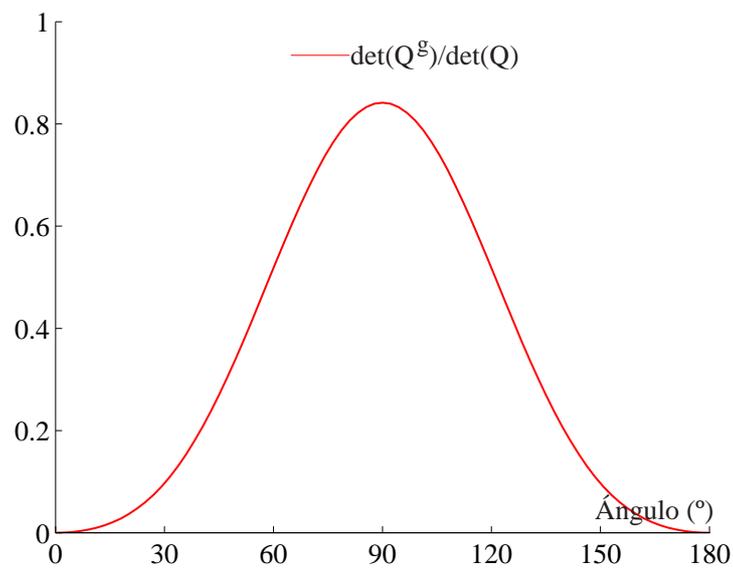


Figura 12: Análisis analítico de localización correspondiente a la carga pico en el ensayo de tracción uniaxial. Modelo LDP.

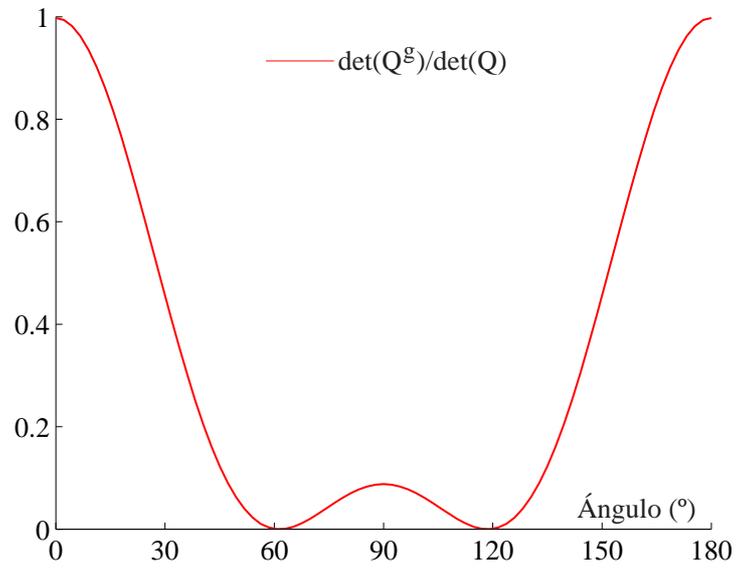


Figura 13: Análisis analítico de localización correspondiente a la carga pico en el ensayo de compresión uniaxial. Modelo LDP.

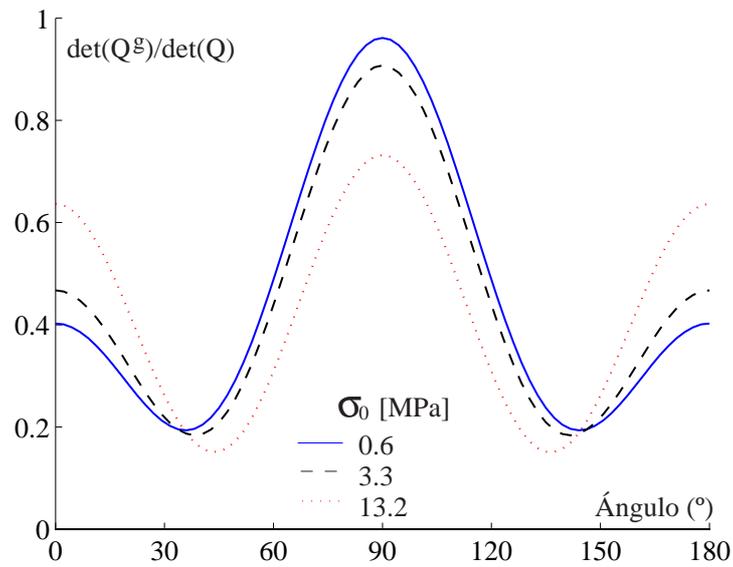


Figura 14: Análisis analítico de localización correspondiente a la carga pico en los ensayos de compresión triaxial. Modelo LDP.

y el círculo principal de Mohr, mientras el modo de falla queda definido por la inclinación del radio del círculo Mohr que contacta a la elipse.

El análisis geométrico de la condición de falla localizada permite confirmar la capacidad predictiva del modelo LDP considerando las fuertes variaciones de los mecanismos de falla de los materiales cuasi-frágiles como el hormigón. En este sentido, los resultados demuestran que la falla altamente localizada se desarrolla para estados de tensiones uniaxiales. La capacidad de regularización de la formulación de gradientes se reduce si se consideran ensayos uniaxiales, tanto de tracción como de compresión, a los que corresponden longitudes internas características iguales a cero y al tamaño de agregados, respectivamente.

Por el contrario, se observa falla difusa con distribución homogénea de las deformaciones plásticas para estados triaxiales con alto, medio o bajo nivel de confinamiento, en correspondencia longitudes internas características tendientes a la altura total de la probeta. Se suprime en estos casos la bifurcación discontinua de la elastoplasticidad clásica y se obtienen modos de falla dúctil.

Por estas razones puede inferirse que la longitud interna característica  $l_c$  define el nivel de la difusión del modo de falla.

## 5. AGRADECIMIENTOS

El presente trabajo ha sido financiado por el Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas *CONICET* por medio del Proyecto *PIP* 112-200801-00707 y por el Consejo de Investigaciones de la Universidad Nacional de Tucumán *CIUNT* mediante el Proyecto *E26/455*.

## REFERENCIAS

- Benallal A. On localization phenomena in thermo-elasto-plasticity. *Arch. Mech.*, 44:15–29, 1992.
- Etse G. *Theoretische und numerische Untersuchung zum diffusen und lokalisierten Versagen in Beton*. Tesis de Doctorado, Universidad de Karlsruhe, Alemania, 1992.
- Etse G. y Vrech S. Geometry method for localization analysis in gradient-dependent  $J_2$  plasticity. *Journal of Applied Mechanics*, 73:1026–1030, 2006.
- Etse G., Vrech S., y Nieto M. Fracture energy-based gradient and Cosserat plasticity formulations for concrete. *Mecánica Computacional Vol. XXVII. Compilado por Alberto Cardona, Mario Storti, Carlos Zuppa (Editores)*, 10:1237–1252, 2008.
- Etse G. y Willam K. A fracture energy-based constitutive theory for inelastic behavior of plain concrete. *Journal of Engineering Mechanics*, 120:1983–2011, 1994.
- Etse G. y Willam K. Failure analysis of elasto-viscoplastic material models. *ASCE, Journal of Eng. Mech.*, 125:60–69, 1999.
- Hill R. Acceleration waves in solids. *Journal for Mechanics of Physics and Solids*, 10:1–16, 1962.
- Hurlbut B. *Experimental and computational investigation of strain-softening in concrete*. Tesis de Maestría, University of Colorado, USA, 1985.
- Leon A. Ueber die Scherfestigkeit des Betons. *Beton und Eisen*, 28:461–474, 1935.
- Liebe T. y Willam K. Localization results of generalized Drucker-Prager elastoplasticity. *ASCE JEM*, 127, 2001.
- Nadai A. *Theory of Flow and Fracture of Solids*, volumen 1. Mc Graw, New York, 1950.
- Ottosen S. y Runesson K. Properties of discontinuous bifurcation solutions in elasto-plasticity.

- International Journal of Solids and Structures*, 27:401–421, 1991.
- Perić D. *Localized deformation and failure analysis of pressure sensitive granular materials*. Tesis de Doctorado, University of Colorado, CEAE Dept., Boulder, 1990.
- Pijaudier-Cabot G. y Benallal A. Strain localization and bifurcation in a non-local continuum. *International Journal of Solids and Structures*, 1993.
- Rizzi E., Carol I., y Willam K. Conditions for the localization of deformation in pressure-sensitive dilatant materials. *Journal for Mechanics of Physics and Solids*, 121, 1995.
- Rudnicki J. y Rice J. Localization analysis of elastic degradation with application to scalar damage. *ASCE, J. Eng. Mech.*, 23:371–394, 1975.
- Sobh N. *Bifurcation analysis of tangential material operators*. Tesis de Doctorado, University of Colorado, CEAE Dept., Boulder, USA, 1987.
- Svedberg T. *On the Modelling and Numerics of Gradient-Regularized Plasticity Coupled to Damage*. Tesis de Doctorado, Chalmers University of Technology, Sweden, 1999.
- Svedberg T. y Runesson K. A thermodynamically consistent theory of gradient-regularized plasticity coupled to damage. *International Journal of Plasticity*, 13:669–696, 1997.
- Thomas T. *Plastic flow and fracture in solids*. Academic Press, London, 1961.
- Vrech S. *Simulación computacional de procesos de falla localizada basada en teoría de gradientes*. Tesis de Doctorado, Universidad Nacional de Tucumán, Argentina, 2007.
- Vrech S. y Etse G. Geometrical localization analysis of gradient-dependent parabolic Drucker-Prager elastoplasticity. *International Journal of Plasticity*, 22:943–964, 2006.
- Vrech S. y Etse G. Fe approach for thermodynamically consistent gradient-dependent plasticity. *Latin American Applied Research*, 37:127–132, 2007.
- Willam K. y Etse G. Failure assessment of the extended Leon model for plain concrete. *SCI-C Conf., Zell and See, Austria, Pineridge Press, Swansea, UK*, páginas 851–870, 1990.