

ESTUDIO PARAMÉTRICO DEL COMPORTAMIENTO CONSTITUTIVO DE MATERIALES GRANULARES

Pedro Ruiz¹, Sergio Elaskar^{1,2} y Luis Godoy^{1,2}

¹Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Universidad Nacional de Córdoba. ²CONICET
Avenida Vélez Sarfield 1611, Córdoba (5000), selaskar@efn.uncor.edu

Keywords: materiales granulares, flujo, ecuaciones constitutivas

Abstract. Un medio granular puede ser concebido como un sistema formado por un gran número de partículas macroscópicas, denominadas granos, que se encuentran inmersas en el seno de un fluido intersticial. En este trabajo se presenta un estudio de sensibilidad a parámetros constitutivos de una relación constitutiva visco-plástica para modelar el flujo estacionario de sólidos granulares. El modelo fue desarrollado por Elaskar y Godoy (1998) y considera que los granos son incompresibles y aproximadamente del mismo tamaño. Bajo estas hipótesis el flujo isotérmico de materiales granulares puede ser representado por el flujo de un fluido no Newtoniano altamente no lineal. El tensor de tensiones del fluido no Newtoniano depende en forma lineal y no lineal del tensor velocidad de deformación, de un tensor gradiente de densidad y del producto entre ambos. Además para la determinación de los coeficientes se utiliza la teoría de visco-plasticidad. El modelo logra simular adecuadamente el flujo estacionarios de granos por un plano inclinado, sin embargo un estudio de sensibilidad a ciertos parámetros es necesario para un mejor entendimiento del mismo. Para realizar dicho estudio se ha considerado flujo unidimensional fluyendo por acción de la gravedad en un plano inclinado, el sistema de ecuaciones resultante ha sido solucionado numéricamente mediante la técnica de Runge-Kutta. Finalmente se presenta la comparación de resultados numéricos con datos experimentales realizados por tres grupos de investigación independiente y para tres materiales distintos constatándose el buen comportamiento del modelo constitutivo.

1 INTRODUCTION

Un medio granular o fluido granular se puede concebir como un sistema formado por un gran número de partículas macroscópicas, denominadas granos, que se hallan inmersas en el seno de un fluido intersticial (Vivas, 2007). Podemos encontrar materiales granulares a nuestro alrededor en todo momento y convivir con ellos sin siquiera darnos cuenta de sus propiedades o del por qué se comportan de cierta forma. Como ejemplo tenemos a las dunas en un desierto o en la playa formadas por miles de millones de pequeños granos de arena, las laderas de las montañas acostumbradas a que el agua de las lluvias erosione el suelo y transporte gran cantidad de partículas sólidas o cuando se desprenden formaciones rocosas y se deslizan en conjunto a gran velocidad hasta la base de la montaña, las avalanchas de nieve son otro ejemplo de este tipo de fluido. También el hombre en su afán de crecimiento los ha introducido a sus procesos industriales, como por ejemplo en el agro moviendo todo tipo de semillas como el sorgo, maíz, etc. Otros ejemplos de estos materiales pueden ser el café, el azúcar, la sal, la yerba mate, etc. Además existen industrias tales como la farmacéutica que utilizan en sus procesos granos más pequeños o polvos, la del plástico, químicas, metalúrgicas, alimenticias, etc.

Por lo general el comportamiento constitutivo no está claramente definido ya que los elementos granulares tienden a comportarse como sólidos en ciertas ocasiones y como fluidos en otras. Dicho comportamiento es regulado por la cohesión, la fricción, los choques entre las partículas que forman el sólido granular y el fluido ubicado en los espacios intergranulares.

2 CARACTERISTICAS DE LOS MATERIALES GRANULARES

De experimentos presentados por Savage (1989), en los cuales se analiza el flujo en canales inclinados, es posible obtener la siguiente información:

- a. Cuando las paredes del canal son suaves o lisas se producen considerables deslizamientos entre los granos y las paredes. Para el caso de paredes rugosas la condición de no deslizamiento fue observada.
- b. Los perfiles de velocidad son suaves.
- c. Dependencia de la ecuación constitutiva en la velocidad de deformación por corte.
- d. Desarrollo de flujos secundarios similares a los predichos por Green y Rivlin (1956).
- e. Los materiales granulares poseen la propiedad de soportar tensiones de corte sin que se produzca deformación.
- f. El comportamiento mecánico del material granular se modifica en forma considerable en función del estado de movimiento en el que se encuentra el material: en reposo o fluyendo.
- g. Los materiales granulares poseen por lo menos dos fases, una es el sólido granular y la otra es el fluido que se ubica en los espacios entre los granos.

3 ECUACION CONSTITUTIVA DE SEGUNDO ORDEN PARA MATERIALES GRANULARES COMPRESIBLES

Se considera una teoría general para representar el flujo isotérmico de materiales granulares con granos incompresibles y de aproximadamente el mismo tamaño. Se comienza a partir de algunas ideas presentadas por Goodman y Cowin (1972).

La densidad puede ser expresada como el producto:

$$\rho(x, t) = \varphi \pi(x, t) \quad (1)$$

donde $\pi(x, t)$ es la distribución de volumen o fracción en volumen de sólidos para la posición x en el tiempo t , y φ es la densidad de los granos en forma individual, la cual es constante y por ello independiente de la posición y del tiempo.

La ecuación de continuidad queda expresada entonces como:

$$\dot{\pi} + \pi(\nabla \cdot v) = 0 \quad (2)$$

Si es explicitada la derivada se encuentra:

$$\frac{\partial \pi(x, t)}{\partial t} + u_i(x, t) \frac{\partial \pi(x, t)}{\partial x_i} + \pi(x, t) \frac{\partial u_i(x, t)}{\partial x_i} = 0 \quad (3)$$

Se asume que existe una relación constitutiva que determina el campo de tensiones de Cauchy \bar{T} en función del campo de velocidades \bar{V} , de la distribución de volumen π , y de sus derivadas:

$$\bar{T} = \bar{T}(\pi_0, \pi, \nabla \pi, \bar{D}) \quad (4)$$

siendo π_0 es una fracción del volumen de referencia y \bar{D} el tensor velocidad de deformación:

$$D_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (5)$$

Las ecuaciones de equilibrio están determinadas por el balance de la cantidad de movimiento lineal:

$$\pi \varphi \dot{v} = \nabla \bar{T} + \pi \varphi b \quad (6)$$

Donde b representa las fuerzas másicas por unidad de volumen (gravedad, etc.). Desarrollando la expresión anterior se obtiene:

$$\varphi \pi(x, t) \left[\frac{\partial u_i(x, t)}{\partial t} + u_j(x, t) \frac{\partial u_i(x, t)}{\partial x_j} \right] = \frac{\partial T_{ij}(x, t)}{\partial x_j} + \varphi \pi(x, t) b_i \quad (7)$$

Es necesario para encontrar una solución, expresar en forma explícita la ecuación constitutiva, relacionando el tensor de tensiones con el campo de velocidades, la distribución de volumen y sus derivadas. Además se supone que la dependencia del tensor de tensiones con $\nabla \pi$ y \bar{D} es isotrópica. Para ello se introduce el siguiente tensor:

$$\bar{M} = \nabla \pi \otimes \nabla \pi \quad (8)$$

Donde cada componente es:

$$M_{ij} = \left(\frac{\partial \pi}{\partial x_i} \right) \left(\frac{\partial \pi}{\partial x_j} \right) \quad (9)$$

Se destaca que el tensor \bar{M} expresa la tasa de cambio de la distribución de volumen (densidad) en las distintas direcciones espaciales, y se denomina tensor gradiente de la distribución de volumen.

La expresión constitutiva, en la forma introducida por Savage (1979), puede ser escrita de la siguiente manera:

$$\bar{T} = a_0 \bar{I} + a_1 \bar{D} + a_2 \bar{M} + a_3 [\bar{D}]^2 + a_4 [\bar{M} \bar{D} + \bar{D} \bar{M}] + \dots \quad (10)$$

Donde los coeficientes son funciones de π_0 , π y de los invariantes de los tensores \bar{T} , \bar{D} y \bar{M} .

Para la determinación de los coeficientes a_i se utilizará la deducción analítica realizada por Elaskar y Godoy (1998).

En el modelo constitutivo dependiente de la distribución de volumen máxima se acepta que cuando la distribución de volumen tiende hacia el valor máximo π_m la tensión adquiere valores muy elevados (esto es verificado experimentalmente por Bagnold, 1954); entonces se considera que el coeficiente de segundo orden η depende de la diferencia $(\pi_m - \pi)$, por lo tanto:

$$\eta = -\frac{\varpi}{(\pi_m - \pi)^2} \quad (11)$$

ϖ se denomina constante de segundo orden y depende del material.

Además se supone que la fluidez tiene una dependencia funcional en π de la siguiente forma:

$$\gamma = \gamma_1 (\pi_m - \pi) \quad (12)$$

De esta manera si el término de segundo orden es despreciable, las tensiones se incrementan hacia valores elevados cuando la densidad se acerca a su máximo valor.

La expresión constitutiva obtenida por Elaskar y Godoy (1998) se escribe para este modelo de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \bar{T} = & \left[-\kappa(\pi^2 - \pi_c^2) + \lambda(\text{tr } \bar{D}) \right] \bar{I} + \left[\frac{k + \alpha' \kappa(\pi^2 - \pi_c^2)}{M_{IV} + \frac{\alpha'}{3} M_I} \right] \bar{M} + \\ & 2 \left\{ \left[-\left(\frac{D_{II}}{\beta \gamma_1 (\pi_m - \pi)} \right)^{\frac{1}{n}} + \left(k - \alpha' \frac{T_I}{3} \right) \right] \frac{1}{3 D_{II}} \right\} \bar{D} - \frac{\varpi}{(\pi_m - \pi)^2} [\bar{D}]^2 + \dots \end{aligned} \quad (13)$$

Con esta expresión y las ecuaciones de conservación (3 y 7) el sistema de ecuaciones puede ser solucionado.

Debe tenerse en consideración que el problema es altamente no lineal, por lo tanto a la hora de resolver se deben hacer ciertas simplificaciones para disminuir la complejidad del problema. Para ello se estudia el flujo de material granular por un plano o canal inclinado por el cual se desplazan los granos por acción de su propio peso y además se plantean las siguientes hipótesis:

- Flujo unidimensional: la única componente de la velocidad no nula es la que corresponde a la dirección longitudinal del canal, además la velocidad y la distribución de volumen varían con la profundidad y no con la longitud del canal.
- Flujo estacionario: el tiempo no aparece como variable.
- Flujo isotérmico: las variables del problema son solamente mecánicas.

4 MODELO CONSTITUTIVO DEPENDIENTE DE LA DISTRIBUCION DE VOLUMEN MAXIMA

Las ecuaciones que gobiernan al flujo de materiales granulares son la de continuidad o conservación de la masa y la segunda ley de Newton o conservación de la cantidad de movimiento lineal. La ecuación de continuidad se escribe:

$$\frac{\partial \pi}{\partial t} + u_1 \frac{\partial \pi}{\partial x_1} + \pi \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = 0 \quad (14)$$

Para el flujo por un plano inclinado con las simplificaciones mencionadas esta ecuación se satisface automáticamente. Las ecuaciones de equilibrio se reducen a:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_{12}}{\partial x_2} + \varphi g \pi \sin(\vartheta) &= 0 \\ \frac{\partial T_{22}}{\partial x_2} + \varphi g \pi \cos(\vartheta) &= 0 \end{aligned} \quad (15)$$

donde ϑ es el ángulo de inclinación del canal.

Por otro lado el segundo invariante del tensor velocidad de deformación se simplifica y sólo depende de la única componente no nula del tensor mencionado:

$$D_{II} = \sqrt{\frac{2}{3}} D_{12} \quad (16)$$

Además el primer invariante del tensor velocidad de deformación se anula:

$$D_{ii} = 0 \quad (17)$$

En flujos generales para la determinación de los coeficientes a_i participan activamente el primer invariante y del tensor \bar{M} y una función denominada M_{IV} (Elaskar 1997):

$$M_{IV} = \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \left[M_{ij}^2 - \frac{2}{3} M_{ij} (\text{tr } \bar{M}) \delta_{ij} + \frac{1}{9} (\text{tr } \bar{M})^2 \delta_{ij} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (18)$$

$$M_I = M_{ii} \quad (19)$$

Para el flujo simplificado en estudio se reducen al ser funciones de una sola componente del tensor gradiente de la distribución de volumen:

$$M_{IV} = \sqrt{\frac{2}{3}} M_{22} \quad (20)$$

$$M_I = M_{22} \quad (21)$$

Con la introducción de las últimas ecuaciones expuestas se llega a deducir las expresiones para las tensiones T_{12} y T_{22} :

$$T_{12} = \frac{-2}{\sqrt{6}} \left\{ \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2n}} \left(\frac{1}{\beta \gamma_1}\right)^{\frac{1}{n}} \left[\frac{D_{12}}{(\pi_m - \pi)} \right]^{\frac{1}{n}} + k \left(\frac{\alpha'}{\alpha' + \sqrt{6}} - 1 \right) \right\} + \frac{2}{\sqrt{6}} \left\{ \kappa (\pi^2 - \pi_c^2) \frac{\alpha' \sqrt{6}}{\alpha' + \sqrt{6}} \right\} + \frac{4}{3\sqrt{6}} \alpha' \varpi \left[\frac{D_{12}}{(\pi_m - \pi)} \right]^2$$

$$T_{22} = \kappa (\pi^2 - \pi_c^2) \left[\frac{2\alpha' - \sqrt{6}}{\alpha' + \sqrt{6}} \right] + k \left[\frac{3}{\alpha' + \sqrt{6}} \right] - \varpi \left[\frac{D_{12}}{(\pi_m - \pi)} \right]^2$$

(22)

y las derivadas de las tensiones con respecto a x_2 resultan:

$$\frac{\partial T_{12}}{\partial x_2} = \frac{-2}{\sqrt{6}} \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2n}} \left(\frac{1}{\beta\gamma_1}\right)^{\frac{1}{n}} \frac{\partial \left[\frac{D_{12}}{(\pi_m - \pi)} \right]^{\frac{1}{n}}}{\partial x_2} + \frac{2}{\sqrt{6}} \left\{ \kappa \frac{\alpha' \sqrt{6}}{\alpha' + \sqrt{6}} \right\} \frac{\partial (\pi^2 - \pi_c^2)}{\partial x_2} + \frac{4}{3\sqrt{6}} \alpha' \varpi \frac{\partial \left[\frac{D_{12}}{(\pi_m - \pi)} \right]^2}{\partial x_2}$$

$$\frac{\partial T_{22}}{\partial x_2} = \kappa \left[\frac{2\alpha' - \sqrt{6}}{\alpha' + \sqrt{6}} \right] \frac{\partial (\pi^2 - \pi_c^2)}{\partial x_2} - \varpi \frac{\partial \left[\frac{D_{12}}{(\pi_m - \pi)} \right]^2}{\partial x_2}$$
(23)

Por medio de las Ecs.(22 y 23) las Ecuaciones de Equilibrio quedan:

$$\frac{-2}{\sqrt{6}} \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2n}} \left(\frac{1}{\beta\gamma_1}\right)^{\frac{1}{n}} \frac{\partial \left[\frac{D_{12}}{(\pi_m - \pi)} \right]^{\frac{1}{n}}}{\partial x_2} + \frac{2}{\sqrt{6}} \left\{ \kappa \frac{\alpha' \sqrt{6}}{\alpha' + \sqrt{6}} \right\} \frac{\partial (\pi^2 - \pi_c^2)}{\partial x_2} + \frac{4}{3\sqrt{6}} \alpha' \varpi \frac{\partial \left[\frac{D_{12}}{(\pi_m - \pi)} \right]^2}{\partial x_2} + \varphi \quad g \pi \sin(\vartheta) = 0$$

$$\kappa \left[\frac{2\alpha' - \sqrt{6}}{\alpha' + \sqrt{6}} \right] \frac{\partial (\pi^2 - \pi_c^2)}{\partial x_2} - \varpi \frac{\partial \left[\frac{D_{12}}{(\pi_m - \pi)} \right]^2}{\partial x_2} + \varphi \quad g \pi \cos(\vartheta) = 0$$
(24)

donde π_c es la distribución de volumen crítica, π_m es la distribución de volumen máxima y D_{12} es la componente 1-2 del tensor velocidad de deformación, x_2 es la dirección en la que se desarrolla el espesor del fluido granular, g es la aceleración de la gravedad, κ es la energía libre, γ_1 tienen en cuenta la fluidez del sistema, β acompaña siempre a la fluidez del sistema, n es el parámetro del cual se desconoce su procedencia y cuál sería su efecto en los perfiles de velocidad si este variara y α' es la fricción interna y se obtiene mediante la siguiente expresión:

$$\alpha' = \frac{6\omega \sin \phi}{3 - \sin \phi}$$
(25)

siendo ω es un coeficiente que varía entre 0 y 1 y se lo utiliza para tener en cuenta que la fricción a la que se refiere es a la dinámica y no a la estática y ϕ es el ángulo de fricción interno entre partículas).

Para simplificar la notación se va a considerar constantes las siguientes expresiones:

$$a = \frac{-2}{\sqrt{6}} \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2n}} \left(\frac{1}{\beta\gamma_1}\right)^{\frac{1}{n}} \quad \left| \quad \begin{array}{l} d = \varphi \quad g \sin(\vartheta) \\ e = \kappa \left[\frac{2\alpha' - \sqrt{6}}{\alpha' + \sqrt{6}} \right] \end{array} \right.$$
(26)

$$\left. \begin{aligned} b &= \frac{2}{\sqrt{6}} \left\{ \kappa \frac{\alpha' \sqrt{6}}{\alpha' + \sqrt{6}} \right\} \\ c &= \frac{4}{3\sqrt{6}} \alpha' \varpi \end{aligned} \right| \begin{aligned} f &= \varpi \\ g &= \varphi \quad g \cos(\vartheta) \end{aligned}$$

Realizando las derivadas y agrupando queda:

$$\left[\frac{\frac{a}{n} D_{12}^{\frac{1}{n}-1}}{(\pi_m - \pi)^{1/n}} + \frac{2cD_{12}}{(\pi_m - \pi)^2} \right] D_{12}' + \left[\frac{\frac{a}{n} D_{12}^{1/n} (\pi_m - \pi)^{\frac{1}{n}-1}}{(\pi_m - \pi)^{2/n}} + 2b\pi + \frac{2cD_{12}^2}{(\pi_m - \pi)^3} \right] \pi' + d\pi = 0 \quad (27)$$

$$D_{12}' - \left[\frac{e\pi(\pi_m - \pi)^2}{fD_{12}} - \frac{D_{12}}{(\pi_m - \pi)} \right] \pi' - \left[\frac{g\pi(\pi_m - \pi)^2}{2fD_{12}} \right] = 0$$

Llamando:

$$A = \left[\frac{\frac{a}{n} D_{12}^{\frac{1}{n}-1}}{(\pi_m - \pi)^{1/n}} + \frac{2cD_{12}}{(\pi_m - \pi)^2} \right] \quad (28)$$

$$B = \left[\frac{\frac{a}{n} D_{12}^{1/n} (\pi_m - \pi)^{\frac{1}{n}-1}}{(\pi_m - \pi)^{2/n}} + 2b\pi + \frac{2cD_{12}^2}{(\pi_m - \pi)^3} \right] \quad (29)$$

$$C = d\pi \quad (30)$$

$$D = \left[\frac{e\pi(\pi_m - \pi)^2}{fD_{12}} - \frac{D_{12}}{(\pi_m - \pi)} \right] \quad (31)$$

$$E = \left[\frac{g\pi(\pi_m - \pi)^2}{2fD_{12}} \right] \quad (32)$$

Se tiene que:

$$\begin{aligned} A * D_{12}' + B * \pi' + C &= 0 \\ D_{12}' - D * \pi' - E &= 0 \end{aligned} \quad (33)$$

Solucionando el sistema dado en Ec.(33), se tiene:

$$\begin{aligned} D_{12}' &= D * \pi' + E \\ \pi' &= \frac{-((A * E) + C)}{((A * D) + B)} \end{aligned} \quad (34)$$

Que son las expresiones que finalmente se utilizan para resolver con el software. Las condiciones de contorno son (ver Figura 1): la distribución de volumen en la superficie libre adquiere un valor crítico denominado π_c , la velocidad de deformación se anula en la superficie libre y la velocidad verifica la condición de no deslizamiento en la superficie de contacto con el plano inclinado.

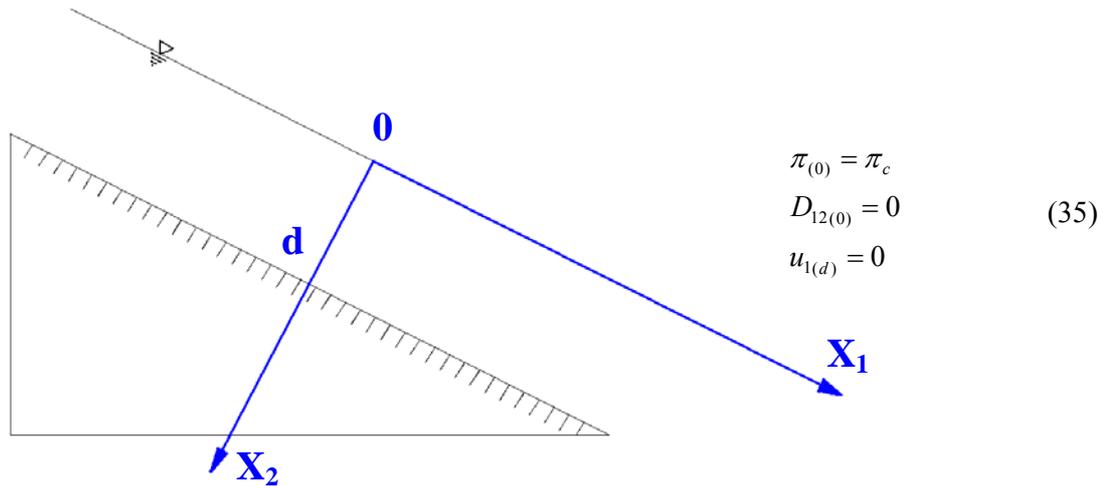


Fig. 1. Geometría y condiciones de borde.

5 COMPARACION CON DATOS EXPERIMENTALES

En esta sección se procederá a comparar los perfiles de velocidad obtenidos utilizando el Modelo Constitutivo Dependiente de la Distribución de Volumen Máxima con diversos resultados experimentales. Para poder hacerlo los parámetros poseen un margen de variación acotado por Elaskar (1997): β , coeficiente que acompaña la fluidez y que varía entre 0,5 y 5; η , coeficiente de segundo orden que varía entre 0,1 y 3; κ , la energía libre varía entre 20 y 60 [KPa]; ϖ , constante de segundo orden que varía entre 0,01 y 0,06; ω , coeficiente que varía entre 0 y 1; $\gamma_1 = 1$ y $n = 0.5$. El sistema coordenado utilizado para la representación gráfica difiere del ya mostrado en la Fig. 1 y es el que se muestra en la Fig. 2.

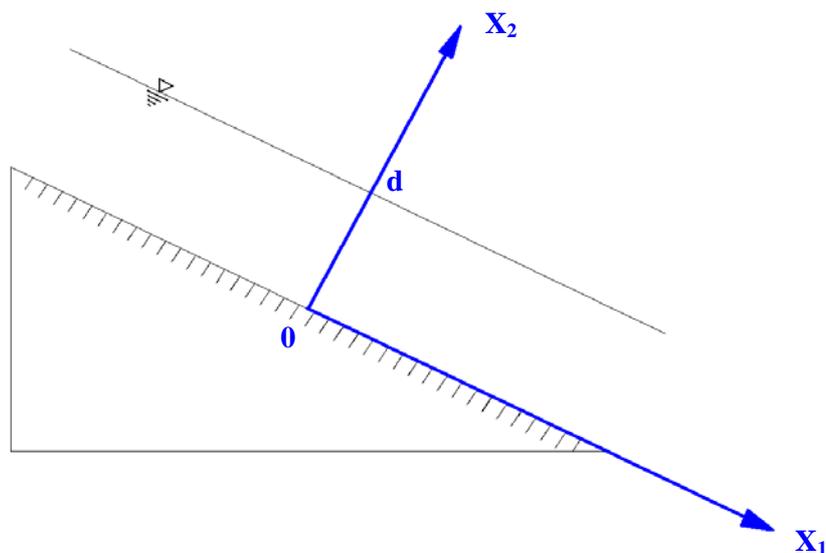


Fig. 2. Sistema coordenado usado en la solución numérica.

Primeramente se comparará con dos casos estudiados por Savage (1979) quién estudia en forma experimental el flujo de perlas esféricas de polietileno sin cohesión en un conducto con distintos ángulos de inclinación. El diámetro de las esferas es de 1,2 [mm] y su densidad es de 1030 [kg/m³], con un ángulo de reposo de 24° y se considera que el ángulo de fricción entre las esferas es de 33°.

Si el ángulo de inclinación del conducto, ϑ es de 39,3°, la comparación está indicada en la Fig. 3, en la cual puede apreciarse en puntos verdes los resultados experimentales y en línea azul el resultado obtenido con el modelo utilizado. Para esta simulación se han utilizado los siguientes valores: $\beta = 0.5$, $\eta = 0.1$, $\kappa = 20000$, $\varpi = 0.01$, $\omega = 0.8889$, $\gamma_1 = 1$ y $n = 0.5$. Es posible apreciar que los resultados obtenidos poseen una muy buena aproximación con los obtenidos experimentalmente por Savage (1979).

La comparación con los datos experimentales de Savage (1979) para un ángulo de inclinación del conducto, ϑ de 32.6° está dada en la Fig. 4, que al igual que en la anterior se encuentran representados los puntos experimentales en verde y el resultado del modelo constitutivo empleado en azul. En este caso se han utilizado los siguientes parámetros: Este resultado es obtenido con los siguientes parámetros: $\beta = 0.5$, $\eta = 0.1$, $\kappa = 20000$, $\varpi = 0.01$, $\omega = 0.88577$, $\gamma_1 = 1$ y $n = 0.5$.

Se observa, en la Fig. 4, que cuando se disminuye el ángulo del canal los resultados obtenidos con el modelo constitutivo utilizado se vuelven menos exactos, pero la diferencia no resulta ser significativamente importante. También puede apreciarse que de todos los parámetros sólo varía ω (fricción dinámica), y los demás permanecen constantes en sus valores mínimos.

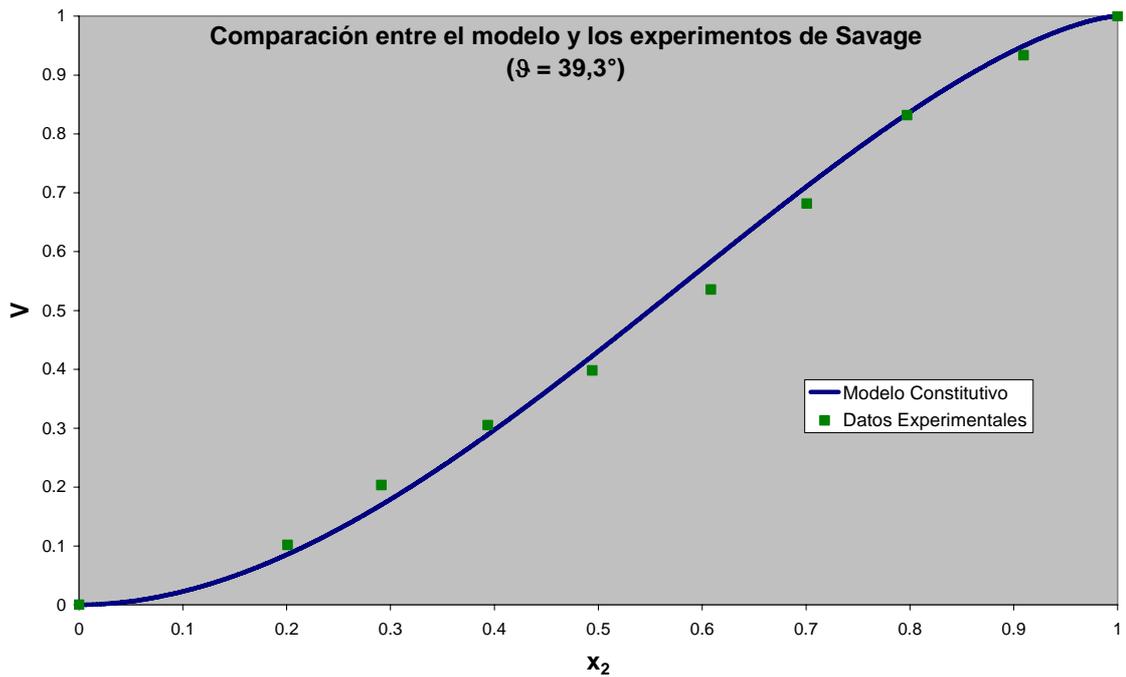


Fig. 3. Comparación con datos experimentales de Savage, θ es de $39,3^\circ$

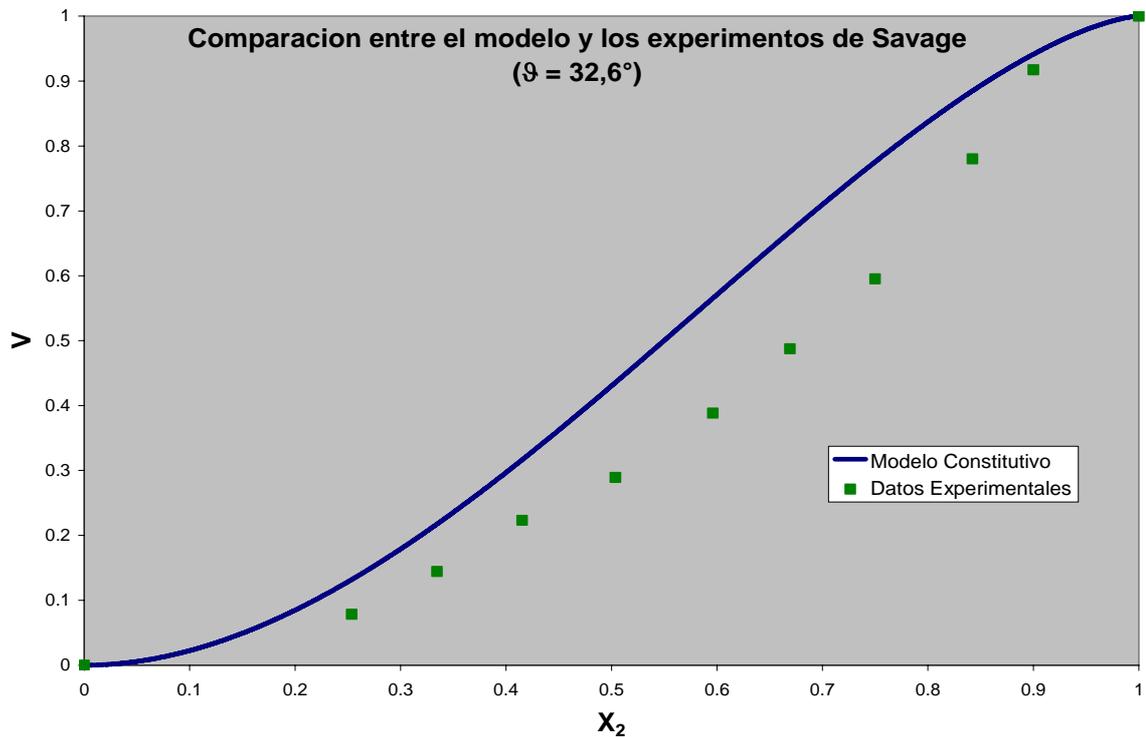


Fig. 4. Comparación con datos experimentales de Savage, θ es de $32,6^\circ$

Como segundo análisis comparativo se cotejan los resultados del modelo teórico con los datos experimentales obtenidos por Drake y Walton (1995) quienes estudiaron en forma experimental el flujo por una superficie inclinada con una pendiente θ de 42.75° de esferas

de acetato de celulosa con 6 [mm] de diámetro, con un ángulo de fricción interno entre las partículas de 22.3° , sin cohesión, y con una densidad de $1319 \text{ [kg/m}^3\text{]}$. La Figura 5 muestra los datos experimentales de Drake y Walton conjuntamente con los valores numéricos evaluados en este trabajo. Nuevamente los resultados experimentales están representados por puntos verdes y el resultado utilizando el modelo con una curva de color azul. Este resultado es obtenido con los siguientes parámetros: $\beta = 1$, $\eta = 0.1$, $\kappa = 20000$, $\varpi = 0.01$, $\omega = 1$, $\gamma_1 = 1$ y $n = 0.5$. Se destaca que la concordancia es muy buena.

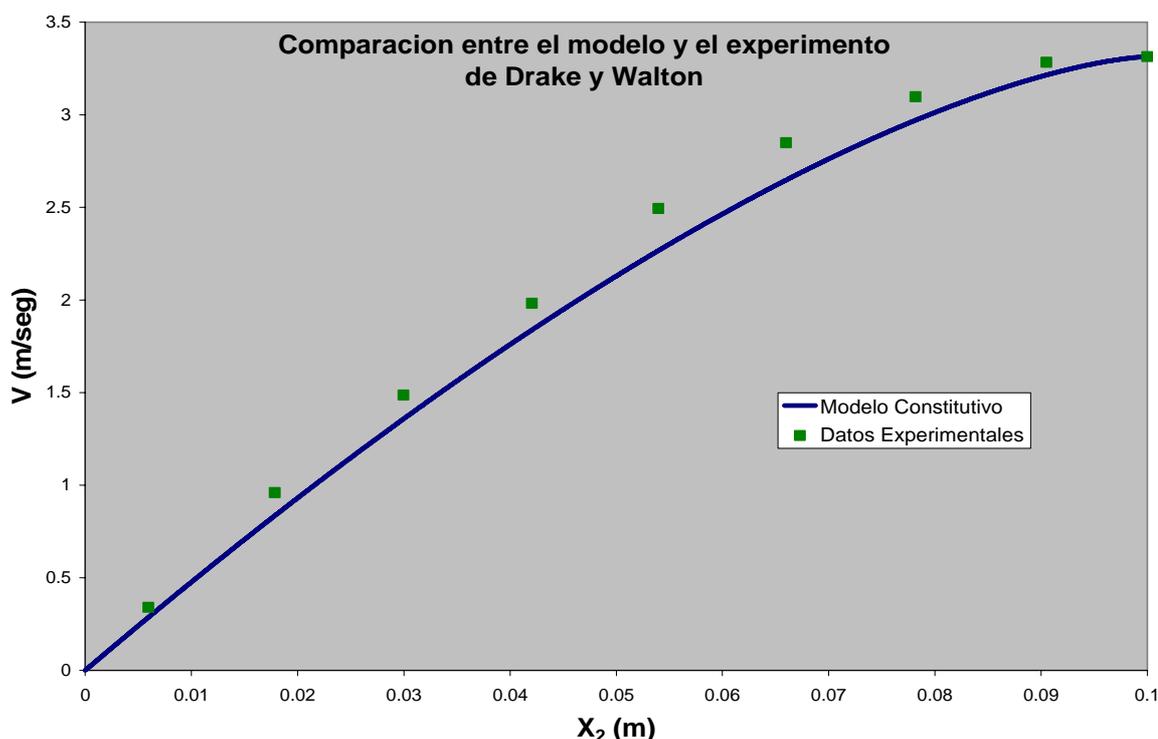


Fig. 5. Comparación con datos experimentales de Drake y Walton, θ es de $42,75^\circ$

El tercer estudio experimental usado para comprobar la capacidad del modelo teórico fue presentado por Elaskar et al. (2001), quienes estudiaron el flujo de granos de sorgo con una densidad, ρ , de $837 \text{ [kg/m}^3\text{]}$ por un canal con diferentes ángulos de inclinación. Se toma además que el ángulo de fricción interna es el mismo que el ángulo de reposo e igual a $29,83^\circ$ [9]. Se realiza la comparación con dos distintos ángulos de inclinación. El primero es de 32° y se puede apreciar en la Fig. 6 la comparación con el modelo constitutivo. Este resultado es obtenido con los siguientes parámetros: $\beta = 0,5$, $\eta = 0.1$, $\kappa = 20000$, $\varpi = 0.011$, $\omega = 0,98$, $\gamma_1 = 1$ y $n = 0.5$.

En la Fig. 7 se encuentra el resultado experimental para una inclinación del canal de 34° en verde y la curva resultante del modelo empleado en azul. Este resultado es obtenido con los siguientes parámetros: $\beta = 0,8$, $\eta = 0.1$, $\kappa = 24150$, $\varpi = 0.01$, $\omega = 1$, $\gamma_1 = 1$ y $n = 0.5$.

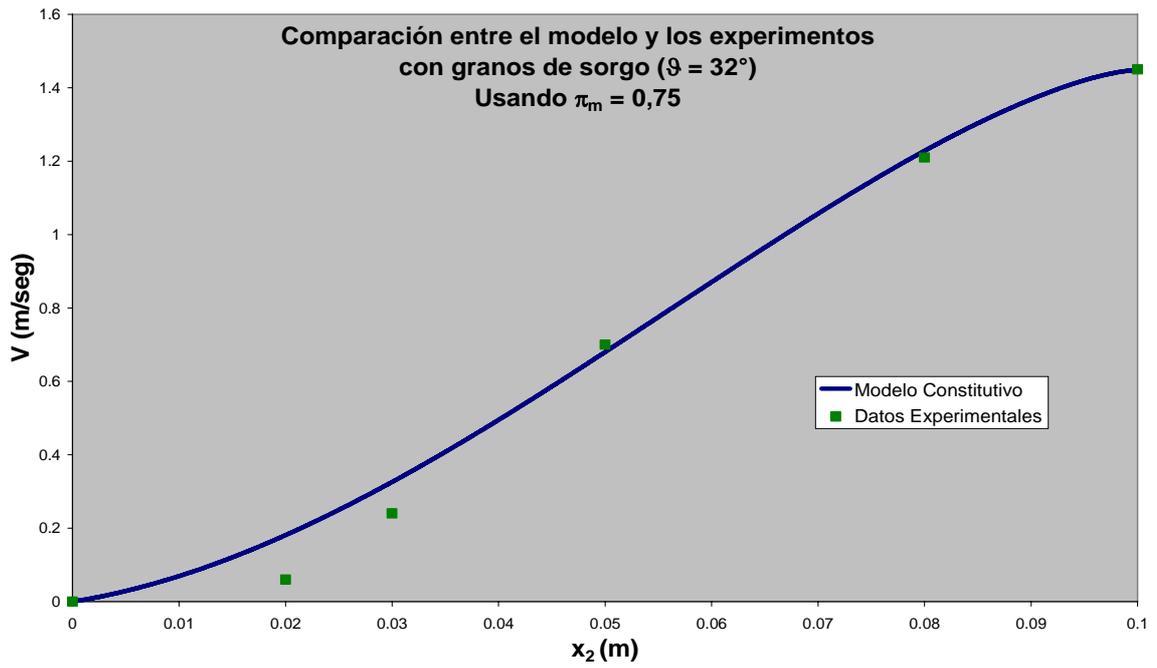


Fig. 6. Comparación con datos experimentales de Elaskar et al., ϑ es de 32°

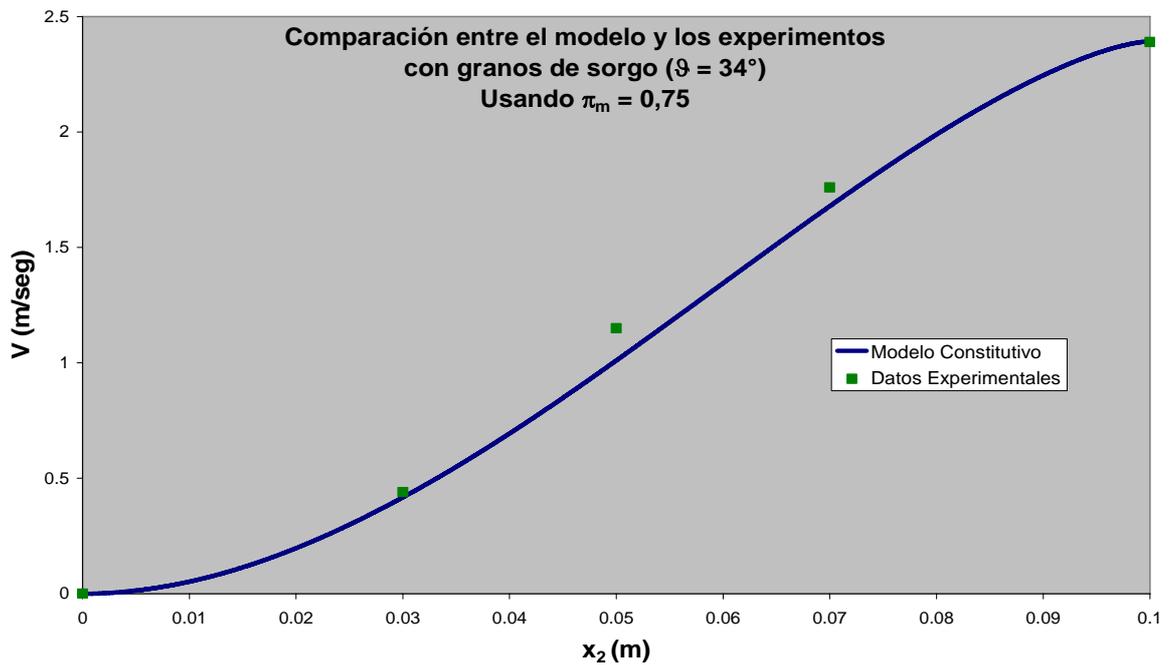


Fig. 7. Comparación con datos experimentales de Elaskar et al., ϑ es de 34°

Se observa, en las Fig. 6 y 7 una muy buena concordancia por parte del modelo dependiente de la distribución de volumen máxima y los datos experimentales.

6 ESTUDIO DE SENSIBILIDAD A VARIACION DE PARAMETROS

En esta sección se procederá a variar los parámetros en todo su intervalo de aplicación y obtener de esta forma las correspondientes variaciones de la distribución de volumen (π) y la velocidad de deformación (D_{12}) para que de esta manera se pueda estudiar la sensibilidad del modelo. El estudio de sensibilidad ha sido realizado para el caso estudiado por Savage con un ángulo de inclinación del canal de $\theta = 39,3^\circ$.

6.1 INFLUENCIA EN LA DISTRIBUCION DE VOLUMEN

La distribución de volumen para cualquier valor de β sigue siendo rectilínea, comenzando en la superficie libre con el valor crítico y aumentando progresivamente. También se ve que al aumentar β el valor sobre la superficie de contacto fluido-plano inclinado de la distribución de volumen disminuye.

Los cambios en η no modifican las curvas de distribución de volumen.

La distribución de volumen en la superficie de contacto fluido-plano inclinado comienza a disminuir, primero fuertemente y luego con un poco menos de intensidad cuando se aumenta la energía libre.

La distribución de volumen disminuye en la superficie de contacto entre el fluido y el plano inclinado, a medida que el parámetro ω aumenta.

La distribución de volumen aumenta sobre la superficie de contacto a medida que el parámetro ω aumenta desde 0,1 hasta 0,8 y lo hace lentamente al principio, pero luego se vuelve más brusco el aumento, conservando la linealidad. Además al continuar creciendo dicho parámetro el aumento continúa acrecentándose aún más.

6.2 VELOCIDAD DE DEFORMACION

Con el incremento de β la velocidad de deformación aumenta sobre la superficie de contacto lo que ocasionará que el perfil de velocidades tenga una pendiente mayor en ese punto.

Los cambios en η no modifican las curvas de velocidad de deformación.

La velocidad de deformación presenta un aumento en la superficie de contacto fluido-plano inclinado pero no resulta ser significativo cuando se aumenta la energía libre.

Para un aumento de ω se tiene una disminución de la velocidad de deformación.

La velocidad de deformación aumenta sobre la superficie de contacto a medida que ω aumenta desde 0,1 a 0,8 y lo hace con la misma característica de crecimiento que la distribución de volumen. Pero al continuar aumentando el mismo parámetro, la velocidad de deformación adquiere un máximo y luego cae. Este efecto se manifiesta a partir de que $\omega = 0,85$ y se intensifica a medida que éste aumenta.

6.3 PERFILES DE VELOCIDAD

Al modificar sólo β se obtienen perfiles de velocidades más parecidos a los resultados obtenidos por Drake y Walton (sin punto de inflexión) y la velocidad en la superficie libre aumenta.

Si se modifica sólo η no se producen modificaciones en el perfil de velocidades.

Si se cambia sólo la energía libre se aprecia en la Fig. 8 que al aumentar tiende a comportarse como el parámetro β pero no tan marcadamente y que a mayores valores las modificaciones en el perfil de velocidades son cada vez menores.

Con el aumento de ω se consigue un aumento de la velocidad en la superficie libre, y además tiende a hacerse más recta la curva hasta casi llegado el final, donde la pendiente disminuye hasta cero.

A medida que aumenta ω la velocidad sobre la superficie libre comienza a aumentar y se obtienen perfiles similares a los de Drake y Walton. Esta tendencia se mantiene hasta llegar al valor de 0,8; luego del cual la velocidad sobre dicha superficie disminuye y el perfil pasa a ser como el de Savage (con forma de S o con punto de inflexión).

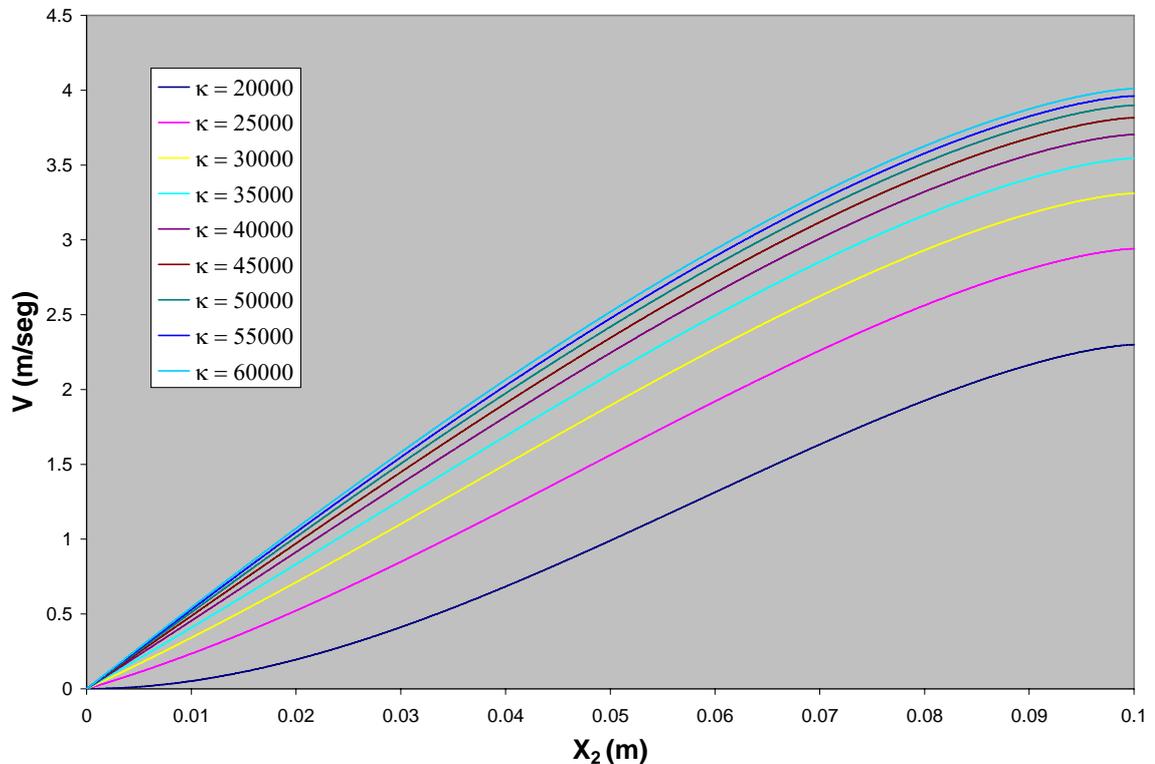


Fig. 8. Variación del perfil de velocidad en función de la energía libre

6.4 CAMBIO DE “n”

A continuación se presenta el cambio del parámetro “n” utilizando como base los datos de los demás parámetros obtenidos en los experimentos antes mencionados.

Para los casos estudiados por Savage (1979) y por Elaskar et al. (2001) que presentan una curva con forma de “S” el parámetro “n” no puede tomar todos los valores que se le habían propuesto (de 0 a 1) ya que para los valores 0,3 y 0,4 el sistema se vuelve singular y la solución imaginaria. Para el caso de Drake y Walton (1995) se puede hacer variar el parámetro “n” en todo el intervalo sin ningún inconveniente.

Además se ha podido verificar en todos los casos que el aumento del parámetro “n” implica un aumento de la velocidad en la superficie libre y para los casos en donde la curva tenía forma de “S” cuando $n = 0,5$ esta pasa a tener una forma como la presentada en los experimentos realizados por Drake y Walton.

En las Figuras 9 y 10 se puede observar lo que sucede al modificar el parámetro “n” para el caso estudiado por Savage con un ángulo de inclinación del canal de $\vartheta = 39,3^\circ$ [2], que presentan una curva con forma de “S”, y en la Fig. 11 para los demás casos.

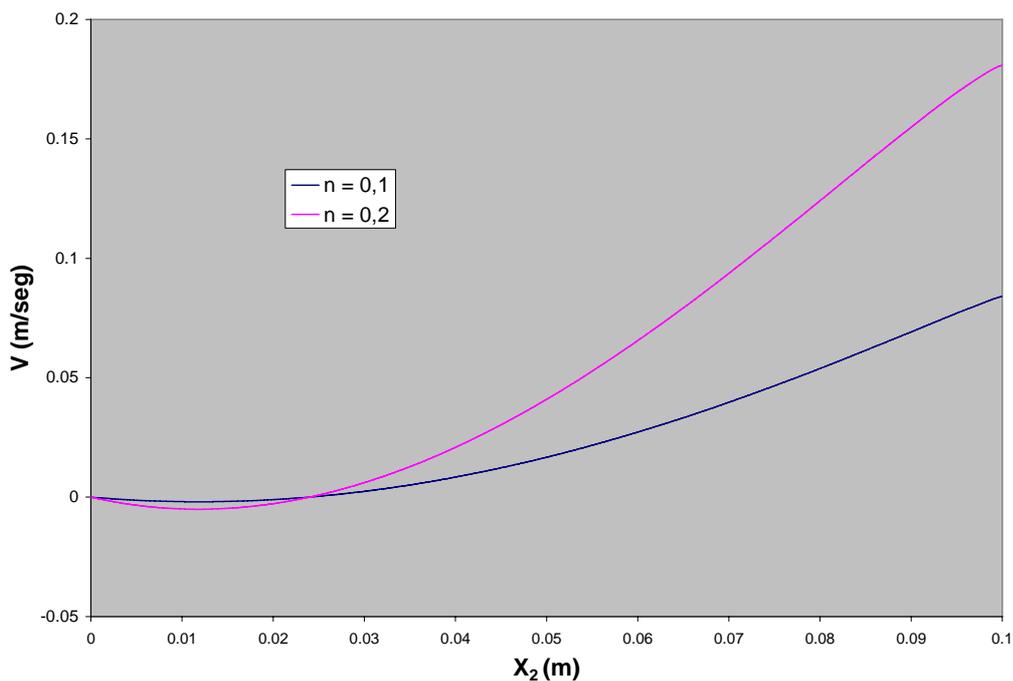


Fig. 9. Variación del perfil de velocidad en función del parámetro “n”. Caso estudiado por Savage con un ángulo de inclinación del canal de $\vartheta = 39,3^\circ$.

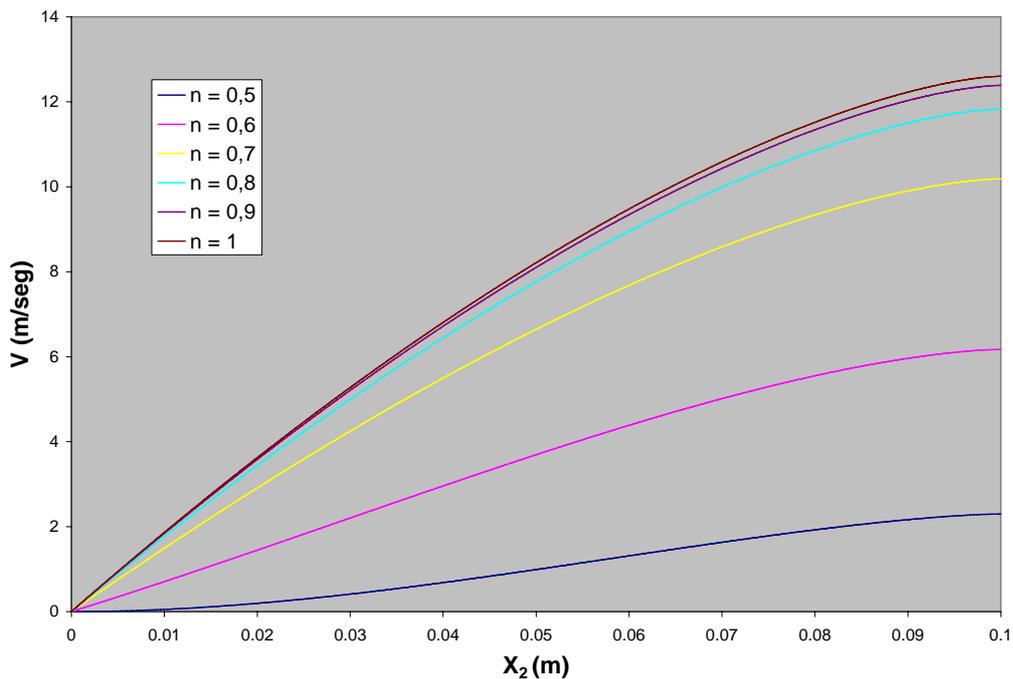


Fig. 10. Variación del perfil de velocidad en función del parámetro “n”. Caso estudiado por Savage con un ángulo de inclinación del canal de $\vartheta = 39,3^\circ$.

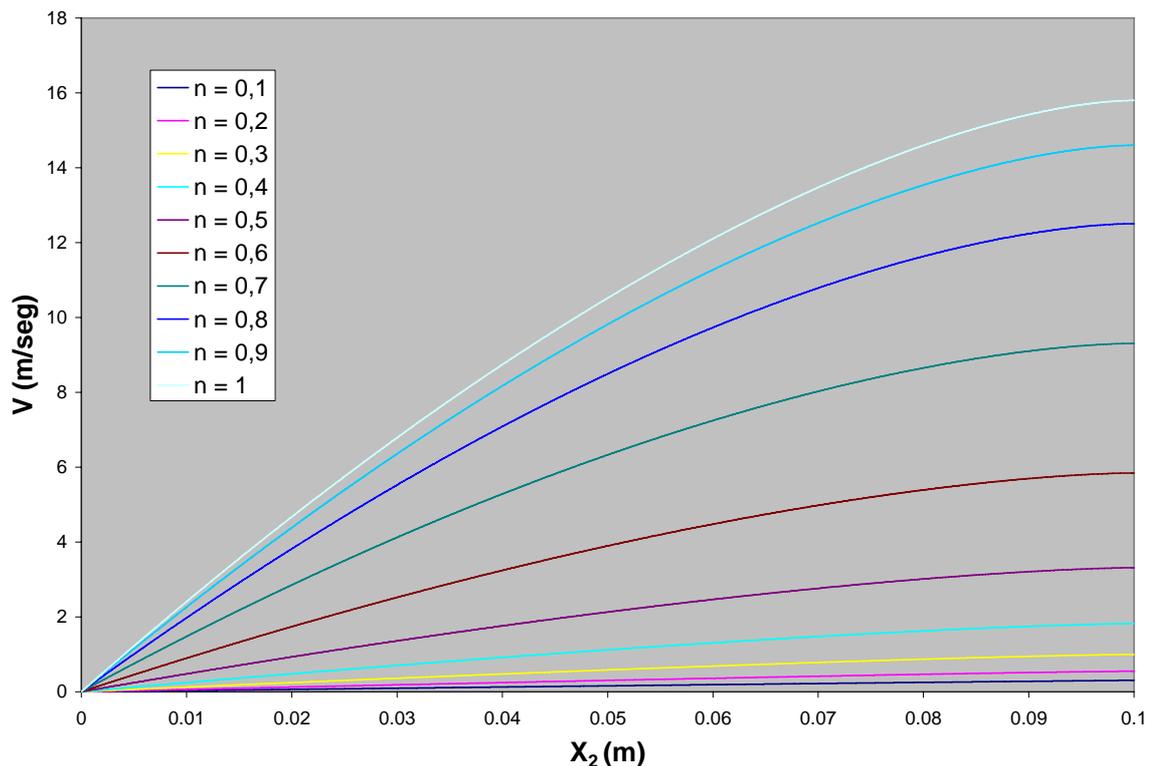


Fig. 11. Variación del perfil de velocidad en función del parámetro "n".
Caso estudiado por Drake and Walton.

7 CONCLUSIONES

En este trabajo se ha realizado un estudio teórico-numérico con la finalidad de estudiar el flujo de materiales granulares por un plano inclinado. Para tal fin se ha utilizado un modelo constitutivo desarrollado en la Universidad Nacional de Córdoba (Elaskar, 1997) y denominado "Modelo Constitutivo Dependiente de la Distribución de Volumen Máxima".

Se puede afirmar que dicho modelo es completo y ha mostrado ser apto para representar el movimiento de un fluido granular que desciende por un canal inclinado debido a su propio peso con suficiente aproximación para ser aplicado en la práctica. El modelo ha captado correctamente los perfiles de velocidad hallados en experimentos, realizados por distintos investigadores y con diferentes materiales granulares, que presentan perfiles de velocidad con y sin forma de "S".

Sin embargo la relación constitutiva posee el inconveniente de tener que calibrar varios parámetros que deben obtenerse de forma experimental. Por tal motivo se ha presentado un estudio de sensibilidad a los mismos que permitirá reducir el esfuerzo experimental necesario para su implementación.

Además se puede concluir diciendo que para conocer el intervalo de aplicación del parámetro "n" se deberá estudiar experimentalmente cada material granular, pero en una primera aproximación es posible considerar de forma correcta la aplicación del intervalo acotado entre los valores 0,5 y 1, ya que de esta forma se consiguen resultados significativamente correctos. Cabe acotar también que de no ser necesario modificar este parámetro se lo considere 0,5 para mantener el sistema de ecuaciones diferenciales desacoplado y así disminuir los procesos de cálculo.

8 REFERENCIAS.

- Vivas, A., *Estudio mediante la teoría cinética de medios granulares en régimen de flujo rápido*. Tesis Doctoral. Facultad de Ciencias. Universidad de Extremadura, 2007.
- Savage, S., Gravity flow of cohesionless granular materials in chutes and channels". *Journal of Fluid Mechanics*. 92: 53 – 96, 1979.
- Green A. y Rivlin, S., Steady flow of non – Newtonian fluids through tubes. *Quarterly of Applied Mathematics*. 14: 299 – 308, 1956.
- Goodman, M. y Cowin, S., A continuum theory of granular materials. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*. 44: 249 – 266, 1972.
- Elaskar, S., *Modelado analítico y por elementos finitos del flujo de materiales granulares. Aplicación a presiones debidas a descarga en silos*. Tesis Doctoral. Universidad Nacional de Córdoba. Córdoba, 1997.
- Elaskar, S. y Godoy, L., Constitutive relations for compressible granular materials using non-Newtonian fluid mechanics. *International Journal of Mechanical Sciences*, 40(10): 1001-1018, 1998.
- Bagnold, R., Experiment on a gravity – free dispersion of large solids spheres in a Newtonian fluid under shear. *Proceeding of the Royal Society, series A*. 225: 49 – 63, 1954.
- Drake, T. y Walton, O., Comparison of experimental and simulated grain flows. *Journal of Applied Mechanics*. 62: 131 – 135, 1995.
- Elaskar, S.; Godoy, L.; Mateo, D. y Seeber, F., An experimental study of the gravity flow of sorghum. *Journal of Agricultural Engineering Research*, 79(1): 65-71, 2001.
- Mohsenin, Nuri N. 1986. "*Physical properties of plants and animal materials*". Editorial: Gordon and Breach Science Publishers Inc. Ciudad de edición: New York.. Heldman, D. R. y Lund, D. B. 2007.