

## CARACTERIZACIÓN WAVELET DE INTERACCIONES SOLITÓNICAS

Walter Legnani<sup>a,b</sup>, Pablo Martínez<sup>a</sup>, César Bucci<sup>a</sup> y Javier Chincuini<sup>a</sup>

<sup>a</sup> *Secretaría de Ciencia y Tecnología, Facultad Regional Buenos Aires, Universidad Tecnológica Nacional, Av. Medrano 951, CABA.*

<sup>b</sup> *Instituto de Cálculo, Universidad de Buenos Aires, Av. Intendente Cantilo s/n CABA, Argentina, walter@ic.fcen.uba.ar, <http://www.ic.fcen.uba.ar/>*

**Keywords:** Solitones, Ecuación KdV, Sistemas integrables, Ondas no lineales, Análisis Wavelet.

**Resumen.** En el presente trabajo se emplea la solución numérica de la ecuación de Korteweg De Vries (KdV) para estudiar la interacción de soluciones tipo solitón bajo la perspectiva del análisis de ondas o wavelets. Entre las principales características de los solitones se encuentra su posibilidad de propagarse como ondas de gran amplitud sin dispersión e interactuar entre ellas de forma tal que luego de la interacción cada onda recupera totalmente sus características previas a la interacción tal como si se hubiera tratado de partículas.

La ecuación KdV se resolvió numéricamente empleando un método pseudoespectral en el espacio y un esquema de Runge y Kutta en el tiempo, para estudiar la propagación de ondas no lineales.

Los solitones son incorporados a la integración numérica de la ecuación KdV a través de las condiciones iniciales de forma tal de garantizar la propagación de tales ondas desde el inicio del estudio.

Los resultados de la integración numérica se validaron mediante la comparación con parámetros analíticos de tal manera de asegurar de que se dispuso de un buen laboratorio computacional para el estudio de la propagación de estas ondas.

Además se realizaron estudios numéricos accesorios para ajustar al máximo la performance de la integración de la ecuación KdV con referencia a la parte espectral.

La interacción entre dichos solitones fue caracterizada en base a un análisis wavelet de los mismos que resulta ser una metodología que no ha sido hallada en la literatura disponible.

Como uno de los resultados más destacados del trabajo se puede mencionar el hecho de que las ondas solitónicas presentaron una estructura multiescala, que caracteriza matemáticamente a los conjuntos fractales, que acompañó al proceso de interacción de los solitones durante todo el lapso de integración computacional.

Los resultados obtenidos han mostrado ser independientes del número de solitones como así también de su amplitud o su secuencia de interacción.

Con esta propuesta se espera contribuir de una forma novedosa a lograr un entendimiento más profundo de las soluciones de la ecuación KdV en sí misma y en la naturaleza de los mecanismos que se desarrollan durante la interacción de los solitones.

## 1 INTRODUCTION

La formalización de la ecuación KdV se debe precisamente a los científicos holandeses Korteweg y DeVries quienes en 1895 derivaron la ecuación que describía la propagación de ondas en la superficie de un canal de aguas poco profundas (Korteweg y DeVries, 1895). Con este trabajo venían a formalizar un hecho que se había puesto de manifiesto algunos años antes en un canal de Escocia por John Scott Russell (Russell, 1844); este último solo había logrado inferir la expresión de forma de la onda sin llegar a la ecuación matemática que modelaba el fenómeno.

La teoría de los solitones fue desarrollada a posteriori que Gardner, Greene, Kruskal y Miura (Gardner et al., 1967) descubrieran el método de la transformada de scattering inverso para la resolución de la ecuación KdV. Estos autores arribaron a este método a partir del trabajo previo de Kruskal y Zabusky (Zabusky and Kruskal, 1965) quienes a su vez habían estado estudiando el problema de Fermi, Pasta y Ulam sobre la propagación de oscilaciones en redes anarmónicas superficiales en una dimensión (Gallavotti, 2008).

Posteriormente Zakharov y Shabat mostraron como el método de la transformada de scattering inverso se podía aplicar a otras ecuaciones diferenciales no lineales como ser la ecuación no lineal de Schrödinger (NLS) (Zakharov and Shabat, 1971).

Recientemente se ha planteado la forma de arribar desde la ecuación de KdV a la NLS (Özer and Tascan, 2009) lo que muestra la vinculación entre diferentes ecuaciones diferenciales no lineales, que se aplican en campos muy disímiles pero que aparentan tener una relación profunda en la estructura matemática que representan sus soluciones.

Si bien hay varias ecuaciones que admiten como solución ondas solitarias, no todas ellas son lo que usualmente se define como solitones. Por ejemplo las soluciones de tipo onda solitaria de un campo escalar elevado a la cuarta potencia (en la teoría de campos lagrangianos) no constituye lo que se denomina un solitón (el cual será precisado más adelante) (ver una discusión sobre este particular en (Fordy y Woods, 1994).

Otra característica destacable de la ecuación KdV es que a partir de evidencia numérica Kruskal y colaboradores comenzaron en Princeton a buscar leyes de conservación local que se deriven a partir de la misma. La primera ley de conservación que se puede derivar es la ecuación KdV en si misma, las demás se pueden deducir a partir del cálculo directo y se ha investigado sobre su interpretación física. Miura conjeturó que en realidad existen infinitas leyes de conservación que se derivan de la ecuación KdV (Miura, 1976), aunque solo pudo hallar cinco, posteriormente se llegó a nueve, y algunos han anunciado que llegaron a derivar diez ecuaciones de conservación a partir de la KdV pero algunas de esas derivaciones se hallan aún bajo análisis (Fordy y Woods, 1994).

Una metodología para hallar la forma de las ecuaciones de conservación que se derivan de la ecuación KdV radica en considerar a la misma como un campo hamiltoniano (Jorge y Saletan, 1998), pero no es evidente que sea un hamiltoniano en si mismo. En dinámica de partículas el formalismo de trabajo de un sistema hamiltoniano comienza con construcción de la función hamiltoniana de tal manera que las ecuaciones de movimiento se derivan a partir de ella. En el caso de la ecuación KdV se cuenta primero con la ecuación de movimiento y la labor se concentra en mostrar que puede ser expresada en la forma canónica de la formulación hamiltoniana (para un completo desarrollo de este punto en particular se puede ver (Jorge y Saletan, 1998)).

Vinculada estrechamente con las ecuaciones de conservación esta la característica de que en física clásica los sistemas con cantidades conservadas son denominados integrables, en tal sentido (Gardner, 1971) fue el primero en notar que la ecuación KdV podía ser escrita en el marco conceptual de la formulación hamiltoniana, más tarde Zakharov y Faddeev (Zakharov

y Faddeev, 1971) mostraron como podía ser interpretada como un sistema hamiltoniano completamente integrable (Faddeev y Takhtajan, 1986), (Dickey, 1991).

Los solitones tienen como principales características que los definen: son ondas de gran amplitud cuya velocidad de propagación depende de la amplitud de su amplitud en contraposición a las ondas lineales, son dispersivas pero a su vez preservan su forma, son ondas de tipo *onda solitaria*, interactúan entre si o con obstáculos finitos de tal manera que luego de la interacción recuperan totalmente sus propiedades previas a la interacción salvo cambios de fase (Newell, 1985).

La presencia de soluciones tipo soliton en la ecuación de KdV se puede interpretar como el balance entre la contribución del término no lineal de la misma y el correspondiente al efecto disipativo, de tal manera que entre ellos se establece un balance que da a lugar a estructuras de marcada persistencia que son precisamente dicho tipo de soluciones (Infeld y Rowlands, 1990).

La interacción entre dos solitones fue explorada en un paper de una forma muy elegante por Lax (Lax, 1968) introduciendo de esta manera lo que hoy se denominan los pares de Lax.

La ecuación KdV admite soluciones multisolitónicas que pueden ser halladas teóricamente mediante la transformación de Bäcklund (Eisenhart, 1960) constituyéndose así esta transformación una metodología alternativa para su estudio.

Recientemente Zang y Tam publicaron un trabajo que relaciona las transformaciones espaciales y los sistemas integrables (Zhang y Tam, 2009).

Claramente desde el punto de vista de la física teórica el estudio de las soluciones solitónicas de la ecuación KdV reviste un enorme interés sin descuidar que todo avance en el conocimiento profundo del comportamiento de las ondas no lineales se desprenden aplicaciones tecnológicas de avanzada (Kengne y Villancourt, 2009), (Helal y Mehanna, 2008), (Soomere y Engelbrecht, 2005), (Akhmediev y Ankiewicz, 2008).

El plan del presente trabajo se halla planteado como una revisión de la evolución de los conceptos involucrados tanto en la ecuación KdV como en la teoría de los solitones, que forma parte de la presente introducción, en la sección 2 se hace una muy breve descripción matemática de la ecuación KdV, en la sección 3 se describe la metodología de resolución numérica de la misma, el análisis aplicado a los resultados mediante la transformada de ondita se muestra en la sección 4, para finalizar se exponen las conclusiones a las que se arribo y las referencias bibliográficas.

## 2 ECUACIÓN DE KORTEWEG DEVRIES

La ecuación KdV es una ecuación en derivadas parciales no lineal cuya forma más general en una dimensión espacial y dependiente del tiempo es la siguiente:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + \delta u(x,t) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + \lambda \frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial x^3} = 0, \quad \text{en } \mathfrak{R}^x (0, \infty) \quad (1)$$

siendo  $u(x,t)$  la amplitud de la onda,  $x$  la variable espacial,  $t$  es el tiempo,  $\lambda$  y  $\delta$  son dos constantes que usualmente se fijan como  $\lambda = 1$  y  $\delta = 6$  por razones que se mostrarán más adelante.

La ecuación (1) es una ecuación de ondas no lineal en donde el segundo término aporta la no linealidad y el tercero el carácter dispersivo. Es importante destacar que el comportamiento dispersivo debe estar provisto por una derivada de orden impar o por medio de una combinación de funciones que posea simetría impar (Drazin y Johnson, 1989).

Estos dos términos y los valores de ambas constantes son muy importantes al momento de comprender como es que la expresión en estudio puede propagar ciertos perfiles de onda sin la menor distorsión.

En la Figura 1 se muestra la propagación de un perfil de onda tipo solitónico cuya expresión es:

$$u(x,t) = \frac{v}{2} \operatorname{sech}^2\left(\frac{\sqrt{v}}{2}(x-vt)+c\right), \quad c \in \mathfrak{R}, v \in \mathfrak{R} > 0, x \in \mathfrak{R}, t \geq 0. \quad (2)$$

La expresión (2) no es otra cosa que la solución soliton de la ecuación KdV para  $\lambda = 1$  y  $\delta = 6$  con la condición de borde periódica que estaría sustituyendo la condición de borde usual para la resolución que es de tipo asintótico dada por

$$\lim(u(x,t)) \rightarrow 0 \text{ cuando } x \rightarrow \infty, \quad (3)$$

con el objeto de evitar cualquier efecto de borde no deseado en la propagación de las ondas en estudio.

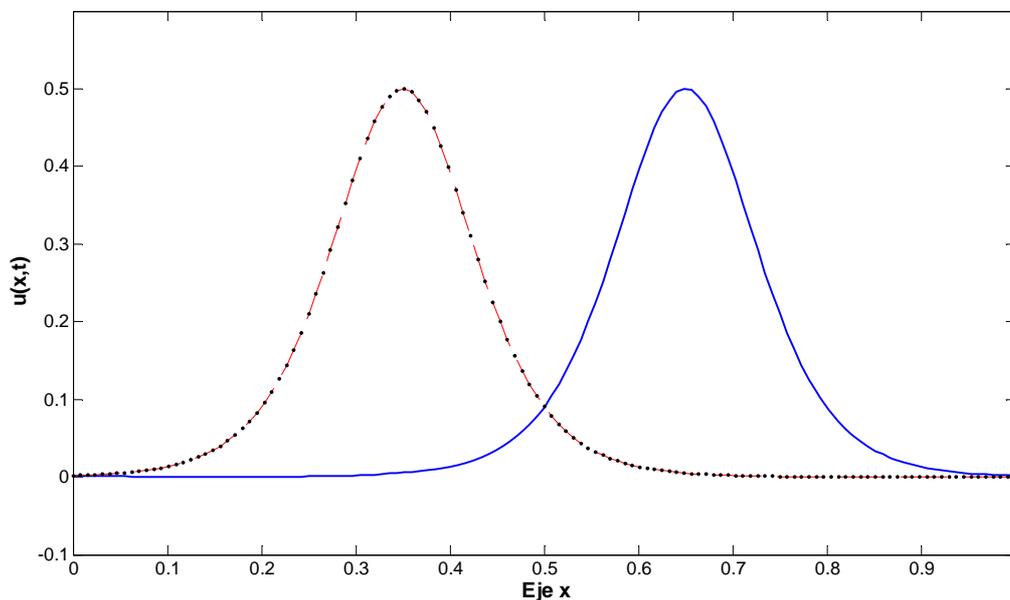


Figura 1

Propagación de ondas solitónicas para  $\lambda = 1.2$  y  $\delta = 6$ .

La línea de trazos y puntos (rojo) corresponde a la condición inicial, y la continua (azul) a la onda propagada

La expresión (2) se puede obtener por resolución analítica mediante el denominado método directo (ver por ejemplo (Evans, 1997), (Strauss, 1992)).

En el caso de las Figuras 1, 2 y 3 se resolvió numéricamente la expresión (1) empleando un método pseudoespectral en el dominio espacial y un esquema de Runge y Kutta en la integración temporal que serán descriptos con mayor detalle en la sección siguiente.

El mecanismo por el cual la forma de la onda se propaga sin dispersión a pesar de contener un término de tipo dispersivo es que dicho efecto queda compensado por el efecto amplificador de la componente no lineal.

Este resultado se puede apreciar en las Figuras 2 y 3. En la primera la amplificación no lineal es mayor que el efecto disipativo; en la segunda el efecto disipativo es mayor que la contribución no lineal.

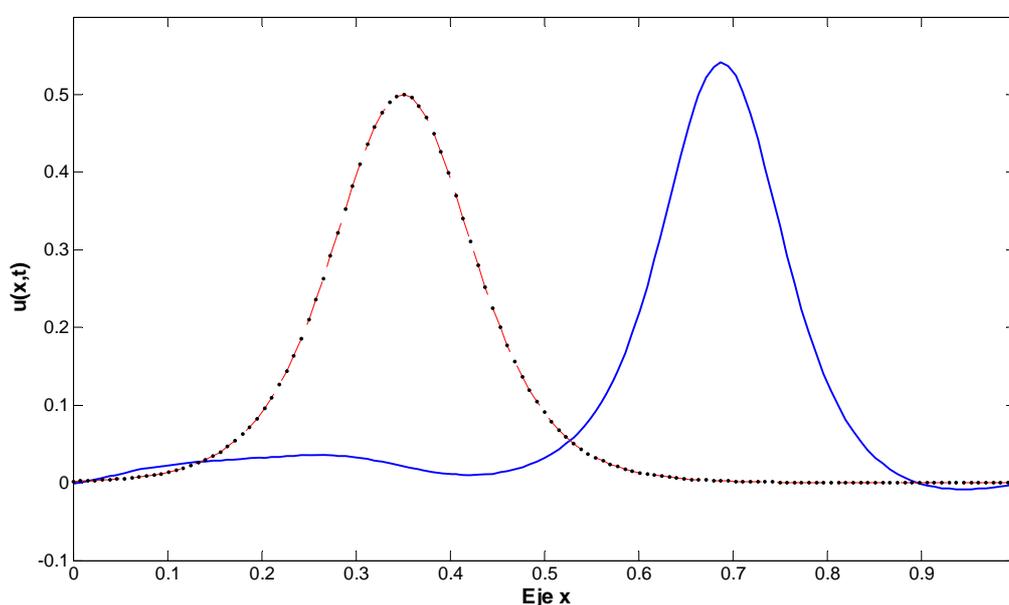


Figura 2

Propagación de ondas no lineales para  $\lambda = 0.75$  y  $\delta = 6$ .

La línea de trazos y puntos (rojo) corresponde a la condición inicial, y la continua (azul) a la onda propagada

Para lograr el equilibrio entre la dispersión y la amplificación no lineal se seleccionan los valores de  $\lambda$  y  $\delta$  iguales a 1 y 6 respectivamente para lograr mantener equilibrados ambos efectos y así dar lugar a la propagación de perfiles como los expuestos en la expresión (2) que dan lugar a soluciones del tipo de onda solitaria cuya forma se propaga sin modificaciones, dando lugar a una de las características que distinguen a los solitones.

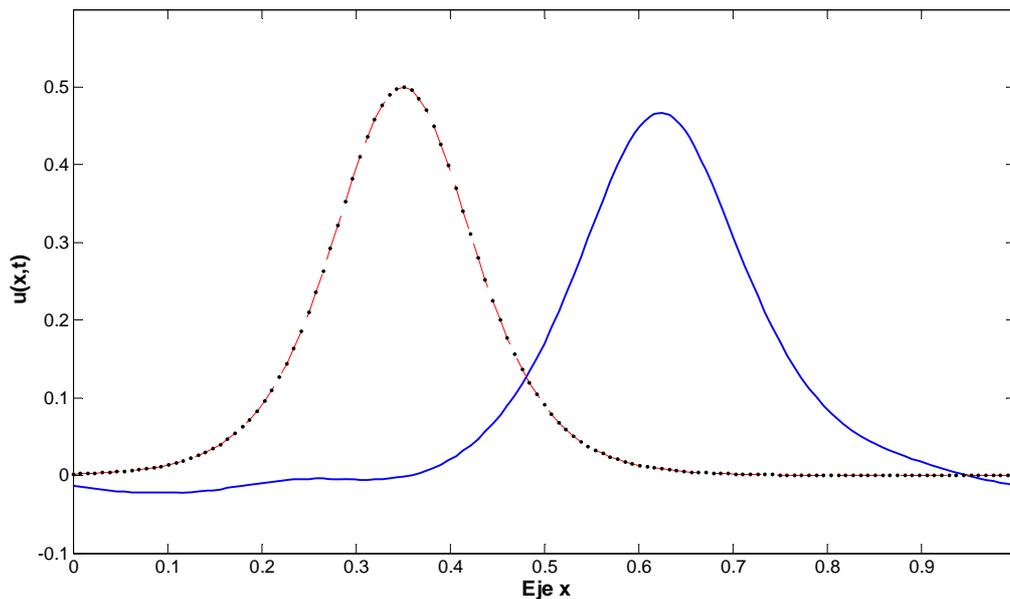


Figura 3

Propagación de ondas no lineales para  $\lambda = 1.2$  y  $\delta = 6$ .

La línea de trazos y puntos (rojo) corresponde a la condición inicial, y la continua (azul) a la onda propagada

Por otro lado la expresión (1) es invariante ante algunas transformaciones de variables que vienen a ser un grupo continuo o transformaciones de Lie, de esta manera se sugiere la existencia de propiedades invariantes de la solución (Drazin y Johnson, 1989).

### 3 INTEGRACIÓN NUMÉRICA DE LA ECUACIÓN KDV

La solución de la ecuación (1) sujeta a condiciones de borde periódicas conduce a expresiones del tipo de (2) en donde como se indicó previamente la velocidad de propagación de dichas ondas es función de la amplitud en contraposición a lo que sucede con las ondas lineales.

Sus características fueron expuestas en la introducción constituyendo una temática de estudio de la matemática aplicada durante las décadas del '70, '80 y '90 (Drazin y Jonson, 1989), (Whitham, 1974).

La resolución numérica de la expresión (1) constituye una de las aplicaciones por excelencia de los métodos espectrales desde la década del '70 cuando se comenzó a estudiar numéricamente la mecánica de la interacción entre solitones (Fornberg y Whitham, 1978).

Si bien los métodos espectrales no son los únicos (Haq et al., 2009) que se emplean, presentan una serie de conveniencias computacionales para la resolución de un problema no lineal que los hacen especialmente aptos para su utilización (Trefethen, 2000).

En el presente trabajo se ha empleado un método pseudoespectral en base a desarrollos de Fourier sobre el intervalo  $[-L,L]$  con condiciones de contorno periódicas de tal manera de evitar los efectos de los bordes en la propagación de los solitones. Dado que (1) es una ecuación no lineal se debe prestar especial atención a la integración temporal, pues cualquier esquema de tipo explícito podría conducir a inestabilidades numéricas que compliquen la

elección del paso temporal (Trefethen, 2000), (Canuto et al., 2007), por ello se ha elegido para la integración temporal un esquema de Runge y Kutta de cuarto orden cuya descripción se puede hallar en numerosos textos de métodos numéricos elementales.

Para dicha integración se emplearon 1024 nodos para el cálculo de la transformada de Fourier, con un paso temporal  $\Delta t = C*(L/N)^3$ , donde  $L$  es la longitud del dominio espacial,  $N$  es el número de nodos para el cálculo de la transformada de Fourier, y  $C$  es un coeficiente que asegura la estabilidad numérica del esquema (Trefethen, 2000).

Existen variantes del esquema aquí empleado que aceleran los tiempos de cálculo como lo es el del factor integrante (Chan y Kerkhoven, 1985) pero no se han aplicado en el caso presente dado que computacionalmente se privilegió la sencillez del código para asegurar la calidad de los resultados dado que era imprescindible contar con soluciones numéricas de muy buena calidad para luego analizarlas con la transformada de ondata.

La condición inicial incorpora dos solitones separados por una distancia tal que se hallen lo suficientemente separados para poder individualizar a cada uno de ellos, ambos se propagan en la misma dirección, o sea su velocidad de propagación posee igual dirección y sentido (de derecha a izquierda en el gráfico) pero diferente módulo, más precisamente un soliton es más veloz que otro. Como la velocidad de los solitones depende de su amplitud, esto implica que ambos poseen necesariamente diferentes amplitudes.

La condición inicial del experimento se puede apreciar en la Figura 4a). Dado que las unidades de la amplitud del soliton son arbitrarias la longitud espacial se ha normalizado con  $L = 1$  y los gráficos se representan solo en el intervalo  $[0,1]$ .

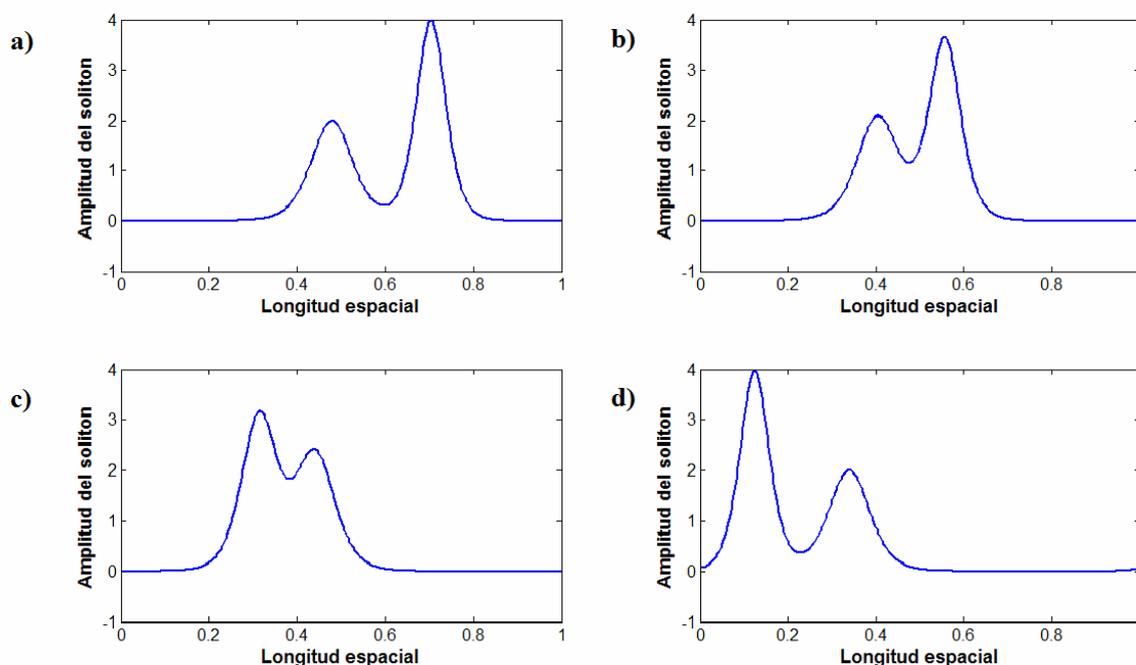


Figura 4

#### Interacción entre dos solitones

- a) Condición inicial. b) Comienzo de la interacción. c) El segundo soliton más veloz atraviesa el más lento. d) El soliton más veloz se aleja del más lento finalizando la interacción.

En la Figura 4 se puede apreciar un ejemplo del resultado del modelo cuya condición inicial como se indicó previamente se representa en la Figura 4 a) y en las Figuras 4 b) y c) se puede observar la interacción, la cual va finalizando en la Figura 4 d) cuando el soliton más

veloz termina de atravesar al soliton más lento que en la condición inicial estaba por delante para tenerlo finalmente por detrás. Es importante destacar que en las Figuras 4a) y 4d) queda mostrado como luego de la interacción entre ambos solitones cada uno de ellos va recuperando su forma tal y cual la poseía en el instante inicial y en los previos a la interacción.

Según se indicó previamente a partir de la ecuación (1) se deducen una gran cantidad de leyes de conservación (Strauss, 1992), algunas de ellas se han empleado a modo de validación de la integración numérica de la misma, obteniéndose para las cantidades conservadas una verificación con seis decimales de aproximación, siendo las empleadas las siguientes:

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(x,t) dx. \quad (4)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} u^2(x,t) dx. \quad (5)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} (0,5(\frac{\partial u(x,t)}{\partial x})^2 - u^3(x,t)) dx. \quad (6)$$

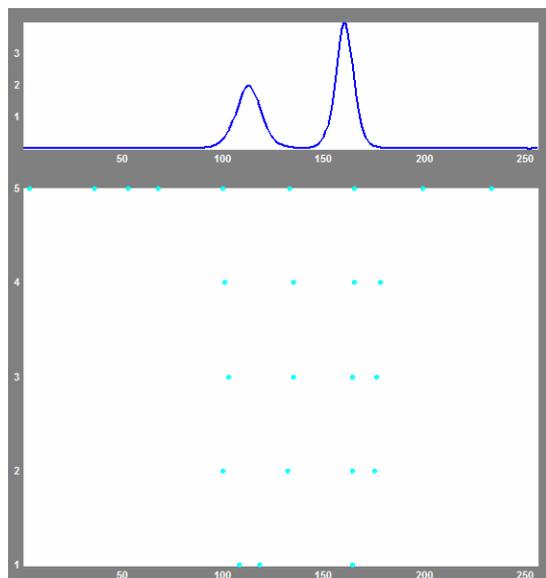
#### 4 ANÁLISIS DE ONDITAS

En la Figura 6 se muestra el resultado del análisis de onditas de la forma de onda de la propagación de solitones. Se ha empleado una base de onditas de Daubechies de orden 4 (Mallat, 1999).

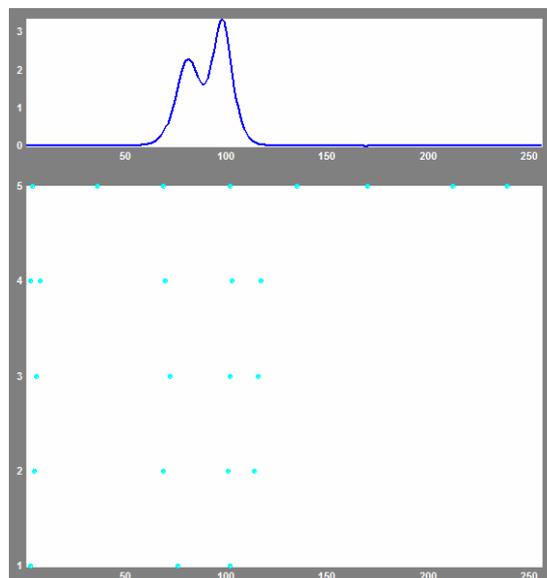
Desde un punto de vista intuitivo, la representación de formas de onda en bases de onditas consiste en calcular el índice de semejanza entre la señal y la ondita; cuando este índice es grande la similitud entre la ondita y la señal es elevado, en caso contrario significa que se parecen poco. Si una señal se parece a sí misma en diferentes escalas, el coeficiente de su respectivo desarrollo de onditas deberá ser similar en diferentes escalas. Si luego se grafica en un gráfico donde el eje vertical sean las escalas del desarrollo en onditas y el horizontal sea el tiempo de la forma de onda, la autosimilaridad deberá producir un patrón vertical característico de conjuntos con igual intensidad (Meyer, 1993).

En la serie de gráficos 5a), 5b) y 5c) se muestra en la parte superior la forma de onda surgida de la integración numérica de la ecuación KdV con la condición inicial indicada en la Figura 2. Debajo de cada una de ellas se halla representada la línea de máximos coeficientes del análisis de ondita. En el caso de 5a) claramente existen cuatro series de puntos verticales debajo de ambos solitones. En el caso de la Figura 5b) hay solo tres, en esta es precisamente en donde se establece fuertemente la interacción entre ambos solitones. En la Figura 5c) reaparecen nuevamente cuatro grupos de coeficientes máximos de onditas.

a)



b)



c)

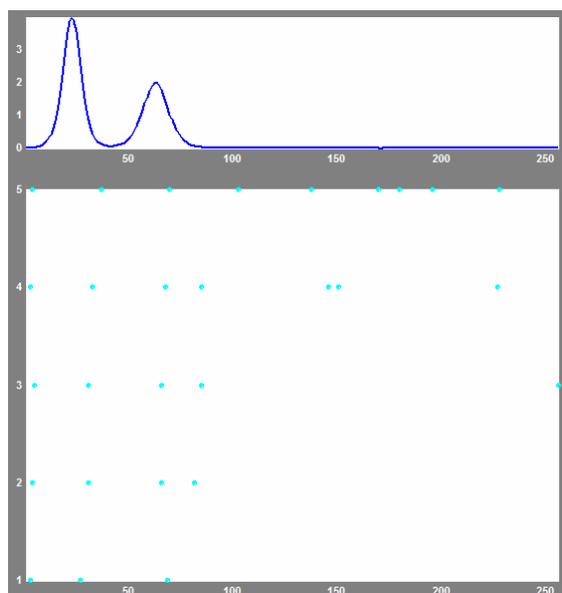


Figura 5

Análisis de ondita de la interacción solitónica. En todos los casos la curva azul es la solución numérica de la ecuación (1), los puntos en cian debajo del gráfico de los solitones representan la línea de coeficientes wavelet máximos de la descomposición en onditas de la forma de onda de las figuras superiores correspondientes. a) Condición inicial. b) Instante de interacción. c) Momento final acabada la interacción.

La cantidad de niveles de ondita se fija a partir del criterio del máximo nivel de descomposición calculado a partir de la longitud de la señal y del tipo de base de ondita utilizada (Daubechies, 1992), (Mallat, 1989).

Se pueden destacar a partir de la Figura 5 dos interesantes características:

- a) Se hace manifiesta una estructura que posee un máximo de intensidad de los coeficientes de ondita para todos los niveles de descomposición.

- b) Para el caso del período de interacción una serie de máximos desaparece durante la misma para reaparecer la finalizar.

Otra característica importante de la caracterización por onditas de la interacción wavelet es que se conserve la entropía wavelet (Ben Naim, 2008) durante toda la integración numérica de la ecuación (1) registrándose una disminución de la misma durante el lapso de interacción que luego recupero su valor inicial. Para la implementación computacional del cálculo de la entropía de ondita se empleo el criterio de Shannon en base a lo propuesto por (Coifman y Wickerhauser, 1992) y (Donoho y Johnstone, 1994). Los resultados se pueden observar en la Tabla 1.

Entropía de ondita	Valor	Diferencia porcentual respecto de la inicial
Entropía inicial	-302.14	0
Entropía durante la interacción	-273.46	9.49
Entropía final	-301.87	0.09

Tabla 1  
Valores de Entropía de la forma de onda de los solitones

Cabe resaltar el hecho de que los resultados de la Figura 5 al igual que los de la Tabla 1 son independientes de la elección de la base de onditas seleccionada para el análisis.

## 5 CONCLUSIONES

A partir de los resultados numéricos del presente trabajo ha quedado mostrado como un adecuado análisis de onditas puede contribuir a la caracterización de la interacción entre solitones que se propagan a partir de la integración de la ecuación KdV.

Surgen así dos elementos que caracterizan la interacción solitónica: la presencia de una estructura autosimilar y conservación de la entropía wavelet.

Por un lado la estructura que se muestra en la Figura 5, obtenida a partir de la propagación de solitones, es una evidencia de estructura autosimilar, usualmente vinculada con la presencia de conjuntos fractales.

No se ha hallado en la literatura disponible ningún antecedentes del cálculo del valor de la entropía de los solitones interactuantes, la cual ha mostrado ser un importante indicador de la interacción dado que se conserva con gran grado de precisión antes y después de la interacción y que durante la misma tiende a exhibir un desordenamiento, debido a que se incrementa en alrededor del 9.50 %. Este resultado se obtuvo de forma independiente a la base de onditas seleccionada y a la amplitud de los solitones. En todos los experimentos computacionales realizados el valor de la entropía durante la interacción tendía a aumentar en valor relativo en montos según se detalla en la Tabla 1.

Si bien se ha hallado en la revisión de la literatura un antecedente semejante al del presente trabajo en (Fonseca y Francisco, 2009) la metodología y los resultados son totalmente diferentes, ya que estos autores se enfocaron directamente en la caracterización mediante parámetros de los solitones como conjunto caótico. A su vez la vinculación entre caos y solitones ya ha sido explorada por (Blyuss, 2000).

El hecho de que coincidiendo con la variación de entropía durante la interacción haya desaparecido una de las estructuras verticales presente en la propagación de solitones antes de que interactuaran o posterior a la misma, induciría a suponer que en la misma interacción estaría presente la conservación de magnitudes que hasta el momento no fueron sometidas a consideración.

Para dar solidez y continuidad a este trabajo resta un gran esfuerzo por validar analítica y teóricamente la conservación de la entropía en la propagación de solitones como así también describir la naturaleza de la estructura autosimilar que aquí se hizo presente.

## 6 AGRADECIMIENTOS

Los autores desean expresar su agradecimiento al Lic. Ernesto Carrizo por sus enriquecedores comentarios sobre los resultados en el estudio de la entropía de los solitones.

## REFERENCIAS

- Akhmediev, N. y Ankiewicz, A. (Eds.). Dissipative Solitons: From Optics to Biology and Medicine. *Lect. Notes Phys.* 751, Springer, Berlin Heidelberg, 2008.
- Ben-Naim, A., Statistical Thermodynamics Based on Information. A Farewell to Entropy World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2008.
- Bluss, K.B., Chaotic Behaviour of Nonlinear Waves and Solitons of Perturbed Korteweg-de Vries Equation. *Reports on Mathematical Physics.* Vol. 46: 47-54, 2000.
- Canuto, C., Quarteroni, A., Hussaini, M.Y., Zang, T.A., Spectral Methods. Evolution to Complex Geometries and Applications to Fluid Dynamics Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2007.
- Chan, T.F. y Kerkhoven, T., Fourier methods with extended stability intervals for the Korteweg-De Vries equation, *SIAM J. Numer. Anal.* 22: 441-454, 1985.
- Coifman, R.R.; M.V. Wickerhauser., "Entropy-based Algorithms for best basis selection," *IEEE Trans. on Inf. Theory*, vol. 38, 2, pp. 713-718, 1992.
- Daubechies, I., Ten lectures on wavelets, CBMS-NSF conference series in applied mathematics. SIAM Ed., 1992.
- Dickey, L.A., Soliton Equations and Hamiltonian Systems, World Scientific, 1991.
- Drazin, P.G. y Johnson, R.S., Soliton – An introduction. Cambridge University Press, 1989.
- Donoho, D.L. y Johnstone, I.M., Ideal de-noising in an orthonormal basis chosen from a library of bases, *C.R.A.S. Paris, Ser. I*, t. 319: 1317-1322, 1994.
- Eisenhart, L.P., A Treatise on the Differential Geometry of Curves and Surfaces, Ginn & Co, 1909, reprinted by Dover, New York, 1960.
- Evans, C., Partial Differential Equations. AMS, Vol 19 Graduate Studies in Mathematics, 1997.
- Faddeev, L. D. y Takhtajan, L. A., Hamiltonian Methods in the theory of solitons, Springer, 1986.
- Fonseca, A. y Francisco, G.. Soliton parameters and chaotic sets. *Chaos, Solitons and Fractals.* 39: 547–555, 2009.
- Fordy, A.P. y Woods, J.C. (eds)., Sigma models in 2+1 dimensions en Harmonic maps and integrable systems. *Aspects in Mathematics, vol. E23.* Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden, 1994.

- Fornberg, B. y Whitham, G.B., A numerical and theoretical study of certain nonlinear wave phenomena, *Phil. Trans. Roy. Soc. Lond. A* 289: 373-404, 1978.
- Gallavotti, G. (Ed.), The Fermi-Pasta-Ulam Problem: A Status Report, *Lect. Notes Phys.* 728. DOI 10.1007/978-3-540-72995-2. Springer, Berlin Heidelberg, 2008
- Gardner, C.S., Green, J.M., Kruskal, M.D. y Miura, R.M., Method for solving the Korteweg-de-Vries equation. *Phys. Rev. Lett.* 19, 1967.
- Gardner, C.S., The Korteweg-deVries equation and generalizations TV. The Korteweg-deVries equation as a Hamiltonian system, *J. Math. Phys.*, 12: 1548-1551, 1971.
- Haq S., Siraj-Ul-Islam, Uddin, M., A mesh-free method for the numerical solution of the KdV–Burgers equation. *Applied Mathematical Modelling.* 33: 3442–3449, 2009.
- Helal, A.H. y Mehanna, M.H., Tsunamis from nature to physics. *Chaos, Solitons and Fractals* 36: 787–796, 2008.
- Infeld, E. y Rowlands, G., Nonlinear waves, solitons, and chaos. Cambridge University Press 1990.
- Jorge, V.J. And Saletan, E.J., Classical dynamics a contemporary approach Cambridge University Press, 1998.
- Kengne, E. y Vaillancourt, R., Transmission of solitary pulse in dissipative nonlinear transmission lines. *Commun Nonlinear Sci Numer Simulat.* 14: 3804–3810, 2009.
- Korteweg, D.J. y de Vries, G., On long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves. *Philos. Mag. Ser. 5*, 39: 422-443, 1895.
- Lax, P.D., Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves, *Comm. Pure Appl. Math.*, 21: 467-490, 1968.
- Mallat, S., A theory for multiresolution signal decomposition: the wavelet representation, *IEEE Pattern Anal. and Machine Intell.*, vol. 11, 7: 674-693, 1989.
- Mallat, S., A Wavelet Tour to Signal Processing. Academic Press, 1999.
- Meyer, Y., Wavelets, Algorithms and Applications. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 1993.
- Miura, R.M., The Korteweg-de-Vries equation: a survey of results, *SIAM Review*, 18: 412-559, 1976.
- Newell, A.C., Solitons in Mathematics and Physics. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1985.
- Ozer, N. M. y Tascan, F., Derivation of Korteweg–de Vries flow equations from nonlinear Schrödinger equation. *Chaos, Solitons and Fractals* 40: 2265–2270, 2009.
- Russel, J.S, Report on waves. *Fourteenth meeting of the British Association for the advance of Science*, 1844.
- Soomere, T. y Engelbrecht, J., Weakly two-dimensional interaction of solitons in shallow water. *Geophysical Research Abstracts*, Vol. 7:04418, 2005.
- Strauss, W., Partial Differential Equations – An introduction. John Wiley and Son, Inc., 1992.
- Trefethen, L.N., Spectral Methods in Matlab. SIAM Philadelphia, 2000.
- Whitham, G.B., Linear and Nonlinear Waves, Wiley, 1974.
- Zabusky, N.J. y Kruskal, M.D., Interaction of solitons in a collisionless plasma and the recurrence of initial states, *Phys. Rev. Lett.* 15: 240-243, 1965.
- Zakharov, V.E. y Faddeev, L.D., The Korteweg-deVries equation: a completely integrable Hamiltonian system, *Funct. Anal. Appl.*, 5: 280-287, 1971.
- Zakharov, V.E. y Shabat, A.B., Exact theory of two-dimensional self-focusing and one-dimensional self modulation of waves in nonlinear media. *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* 61 118-34 A971); *Sov. Phys. JETP* 34 62-9 A972), 1971.

Zhang, Y. y Tam, H., A few integrable systems and spatial spectral transformations  
*Commun Nonlinear. Sci. Numer. Simulat.*, 14: 3770–3783. 2009.