

## **SIMULACIÓN DINÁMICA DE ESTRUCTURAS MEDIANTE MODELADO POR ELEMENTOS FINITOS Y REDUCCIÓN DE ORDEN EMPLEANDO EL ESPACIO DE ESTADO**

**Leandro González De Cecco<sup>a</sup>, Eduardo N. Zapico<sup>b</sup>**

<sup>a</sup>*Depto. Aeronáutica, FCEFYN, Universidad Nacional de Córdoba, Vélez Sársfield 1611, X5016GCA, Córdoba, Argentina, [gonzalezdececco@gmail.com](mailto:gonzalezdececco@gmail.com)*

<sup>b</sup>*Depto. Aeronáutica, FCEFYN, Universidad Nacional de Córdoba, Vélez Sársfield 1611, X5016GCA, Córdoba, Argentina, [ezapico@efn.uncor.edu](mailto:ezapico@efn.uncor.edu)*

**Palabras Clave:** Modelado Dinámico, Reducción Balanceada, Nanosatélite

**Resumen.** La formulación de Ecuaciones de Movimiento en el Espacio de Estado permite obtener modelos dinámicos simples a partir de estructuras complejas, de modo que estos puedan ser integrados a un programa de simulaciones dinámicas que actúe como plataforma eficiente para el diseño de estructuras bajo elevadas sollicitaciones, propias del desarrollo de una misión espacial.

El inicio de un nuevo proyecto de diseño estructural requiere como primera medida la adquisición de sensibilidad y entendimiento del problema dinámico en estudio, cuando todavía no se ha establecido el diseño definitivo de la estructura y aún no se conocen con certeza las propiedades dinámicas de los componentes que lo conforman. Es usual proponer modelos simplificados del sistema que contemplen diversas soluciones constructivas, mientras que etapas posteriores del proyecto involucran generalmente cambios estructurales que obligan a reevaluar el comportamiento dinámico del modelo. Es por ello deseable esta etapa de diseño poseer el modelo dinámico más pequeño posible, que aún provea una representación precisa de la dinámica del sistema y permita evaluar rápidamente cada propuesta, con la finalidad de reducir las sollicitaciones a las que se encuentran sometidos los componentes críticos del satélite.

En el presente trabajo se propone una configuración satelital determinada a la cual se le realiza un análisis dinámico preliminar empleando el método de los elementos finitos, con el objetivo de generar un modelo lo suficientemente flexible para admitir posteriormente ajustes basados en estimaciones de comportamiento y resultados de ensayos experimentales. Luego se aplica la técnica de reducción de sistemas dinámicos lineales de orden elevado, haciendo uso del balanceado por gramianos, a fin de obtener un modelo en espacio de estado de orden reducido.

## 1 INTRODUCCIÓN

La elección de una configuración satelital que cumpla los requerimientos del proyecto implica la evaluación de diversas alternativas de diseño, simulando el comportamiento de los componentes críticos del mismo ante las severas sollicitaciones dinámicas a las que se los exigen durante la fase de lanzamiento.

El presente trabajo se aplica en el marco del proyecto  $\eta$ Sat-IE, para la puesta en órbita de un nanosatélite de colecta de datos a través de un cañón electromagnético, que somete al satélite a choques con altísimos niveles de aceleración, del orden de 10000g. Además, las restricciones en lo que respectan a masa (menor de 5kg) y dimensiones (calibre menor a 120mm) conllevan a serios problemas de ingeniería estructural para asegurar la sobrevivencia de los sistemas. Por lo tanto, deben emplearse herramientas de diseño que faciliten el desarrollo tecnologías de componentes y sistemas miniaturizados capaces de soportar las altas aceleraciones producidas por el choque y las vibraciones resultantes. Es muy importante asegurar la integridad estructural de ciertos componentes críticos como paneles solares y equipos electrónicos, que por su fragilidad y a la dificultad de proveer amortiguación adecuada, puedan fallar.

En fases previas del proyecto se propuso un diseño estructural del satélite, el cual fue evaluado parcialmente en los trabajos de [Zapico, et al. \(2005\)](#), [Zapico, et al. \(2008\)](#) y [Zapico, et al. \(2008\)](#), en el cual se emplearon modelos de parámetros concentrados y elementos finitos, siendo útiles para cuantificar la aceleración máxima esperable en tarjetas y paneles, mientras que la posterior incorporación de un elemento amortiguador permitió evaluar el cambio de comportamiento dinámico del satélite.

Con el uso de estos modelos simplificados se adquirió una comprensión global del fenómeno en estudio, aunque luego fue evidente la necesidad de un análisis más detallado que validara estructuralmente la configuración satelital prediseñada, verificando el cumplimiento de los requerimientos del proyecto. Además se debían establecer criterios de diseño al momento de integrar los diversos sistemas del satélite, como la detección del módulo de sistemas de menor aceleración para la instalación de baterías o la evaluación del uso de elastómeros y su influencia en las aceleraciones máximas alcanzadas de paneles solares.

Es por ello deseable emplear un método de trabajo que facilite el rediseño del modelo y permita su ajuste mediante la correlación con datos experimentales obtenidos por ensayos físicos de componentes. Posteriormente debe poder realizarse una rápida evaluación del comportamiento dinámico del modelo, con el objetivo de verificar los niveles de aceleración sobre sus componentes críticos. Siguiendo este objetivo se desarrolló un método de trabajo lo suficientemente flexible para la simulación, el análisis y obtención de modelos dinámicos reducidos del satélite a partir de alternativas de diseño, haciendo uso de diversas herramientas tales como el modelado por elementos finitos, la correlación y ajuste con datos experimentales de componentes, etc.

Mientras que la técnica usual de diseño dinámico involucra el método de los elementos finitos (MEF) para el análisis de vibraciones, en nuestro caso sólo es empleado para obtener las características dinámicas principales de los diseños presentados, asociadas a su rigidez y distribución de masas. Como en esta etapa del proyecto deben compararse varias propuestas, el análisis del modelo tiene que realizarse teniendo control directo de los parámetros dinámicos, para ser analizados y debidamente modificados. Es por ello que se muda el análisis del sistema a un entorno tal como el de Matlab®, cuyas diversas herramientas matemáticas permiten optimizar el diseño de modo eficiente, a fin de modificar las características dinámicas del sistema y reducir finalmente las aceleraciones a las que se encuentran sometidos los componentes del satélite.

Para cumplir con estos objetivos de trabajo debe simplificarse el sistema dinámico al considerar el movimiento de sólo algunos puntos de interés del satélite, a fin de realizar una simulación representativa del comportamiento dinámico de sólo aquellos nodos que están sometidos a excitaciones de entrada o en los que se desea calcular sus movimientos resultantes.

Para el diseño y análisis computacional de estructuras bajo cargas dinámicas es deseable trabajar usando la formulación general del Espacio de Estado, ya que ésta permite fácilmente simular y analizar sistemas MIMO (Multiple Inputs, Multiple Outputs) en el dominio de la frecuencia. Entonces, empleando los resultados del análisis modal por elementos finitos, se puede armar un sistema de ecuaciones bajo espacio de estado que describa el comportamiento sólo de aquellos nodos representativos del modelo. Finalmente en Matlab puede realizarse una Reducción Balanceada por Gramianos del sistema dinámico, donde los estados correspondientes a los modos de vibrar son ordenados jerárquicamente según su importancia relativa, permitiendo al diseñador escoger el mínimo número de ellos que serán necesarios para representar de forma precisa la respuesta global del sistema, mediante la comparación de sus Funciones Respuesta en Frecuencia y las simulaciones en el dominio del tiempo.

Esta reducción de orden del modelo dinámico se logra proyectado un sistema complejo en espacio de estado, sobre una base de espacio de orden mucho menor. Si esta última es escogida adecuadamente, la dinámica relevante del sistema podrá ser capturada con un número de estados muy reducido. Aunque el rango de validez del modelo obtenido está determinado por el procedimiento específico de reducción, el uso de la técnica balanceada ha demostrado proveer representaciones de sistemas en espacio de estado precisas y de bajo orden.

La correlación del modelo matemático con datos obtenidos mediante análisis modal experimental sobre un modelo físico del satélite permitirá en etapas posteriores del proyecto obtener los amortiguamientos modales y reconstruir los modos reales de vibración, ajustando las Funciones Respuesta en Frecuencia (FRF) para las salidas deseadas, a fin de generar modelos de bajo orden y gran fidelidad, que capturen adecuadamente la dinámica relevante del sistema por sobre el rango de frecuencias requerido y las entradas de excitación propuestas.

El modelo finalmente obtenido debe estimar de forma precisa las características dinámicas del  $\eta$ Sat, a fin de evaluar mediante simulaciones numéricas ciertas decisiones de diseño planteadas originalmente, facilitando el rediseño estructural. Más aún, este modelo permitirá definir los ensayos de choque y vibraciones requeridos para las fases de Desarrollo y Calificación del proyecto.

Consecuentemente a lo comentado hasta ahora, el trabajo se desenvuelve del siguiente modo: Primero se presenta el proyecto  $\eta$ Sat-IE y la configuración propuesta para el satélite. Luego se desarrolla el método empleado para realizar el modelado matemático, el análisis modal mediante elementos finitos, y su posterior representación en el espacio de estado. Posteriormente se aborda el análisis del modelo en espacio de estado, realizando un análisis de sus parámetros modales y finalmente la obtención del modelo reducido. A continuación se realiza una simulación de lanzamiento para comparación con los modelos anteriores. Finalmente se presentan las conclusiones del trabajo y lineamientos para futuros desarrollos.

## 2 CONFIGURACIÓN ESTRUCTURAL PROPUESTA

En base a los requerimientos de lanzamiento, se propuso para el  $n$ Sat-IE una configuración tal como la que se muestra en la [Figura 1](#), donde dentro de unas dimensiones globales de 120mm de diámetro y 240mm de longitud, se logra una adecuada independencia entre los distintos componentes estructurales, disminuyendo las sollicitaciones mecánicas sobre la electrónica, a la vez que se asegura una relativa facilidad de integración y recambio de equipos.

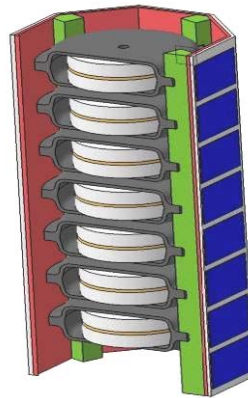


Figura 1 Esquema Estructural del  $\eta$ Sat

La cubierta exterior del nanosatélite se compone de una cofia monolítica de material compuesto, revestida por una capa de elastómero que sirve de soporte a las celdas solares, a fin de actuar como estructura resistente, transfiriendo y distribuyendo homogéneamente las cargas al resto de los componentes del satélite.

En el interior de la cofia se fijan cuatro columnas de aleación de aluminio, encargadas de soportar los sistemas electrónicos, confinados éstos en siete módulos individuales de material compuesto.

El equipo electrónico se encuentra suspendido mediante cojines de elastómero, elementos amortiguantes que fijan la posición de cada tarjeta dentro de su módulo, asegurando la integridad del equipo al disminuir las aceleraciones a las que se verán sometidos durante el lanzamiento.

Se prevé que el satélite vaya montado a su vez sobre un elemento amortiguador ubicado en su base y que lo vincule al vehículo impulsor. Este soporte, denominado genéricamente como PAF (Payload Attachment Fitting), es un componente estructural de amortiguamiento controlado que servirá de interface con el lanzador, actuando como elemento pasivo de control de aceleraciones del nanosatélite.

### 3 MÉTODO DE MODELADO DINÁMICO

La aproximación modal empleando el análisis por elementos finitos permite crear modelos reducidos en el espacio de estado consistentes con la dinámica del satélite. Su posterior análisis bajo Matlab admitirá su ajuste mediante la correlación con datos experimentales, empleando para ello su capacidad de graficación, flexibilidad y eficacia para realizar estudios dinámicos.

#### 3.1 Formulación de las ecuaciones de movimiento

Durante la etapa inicial de diseño, el modelado por elementos finitos es el método más frecuentemente utilizado para estimar el comportamiento dinámico de estructuras complejas, discretizándolas como sistemas de múltiples grados de libertad sometidos a pequeñas deformaciones. Debido a la concepción monolítica del satélite, se obtuvo una estructura muy rígida, que puede modelarse inicialmente como un sistema elástico lineal no amortiguado, cuyo equilibrio dinámico queda representado por el sistema ecuaciones diferenciales bajo formulación matricial:

$$[M]\ddot{r}(t) + [K]r(t) = f(t) \quad (1)$$

Donde la respuesta  $r(t)$  del sistema a una acción externa  $f(t)$  está en función de sus características dinámicas, representadas por las matrices de masa  $M$  y rigidez  $K$ . Las no linealidades presentes en la dinámica real del satélite se modelarán posteriormente, suponiéndolas concentradas en el PAF, un elemento amortiguador cuyo comportamiento se diseñará en función de los requerimientos de aceleraciones a cumplir sobre los varios componentes críticos.

Las matrices involucradas en el sistema de Ecuaciones 1 son cuadradas, simétricas y de orden elevado  $N$ , por lo es poco eficiente y costoso computacionalmente analizar directamente las características dinámicas del nanosatélite a partir de ellas. Será conveniente entonces realizar un análisis modal mediante elementos finitos que extraiga los parámetros dinámicos que permitirán posteriormente analizar el modelo bajo la formulación en espacio de estado.

Debido a que las condiciones de lanzamiento se consideran como un movimiento de base, el análisis modal del satélite se realiza para la estructura vibrando libremente, no restringiendo el desplazamiento del nodo ubicado en la base. La suposición de una respuesta armónica del sistema lineal no amortiguado permite acceder al problema clásico de valores propios:

$$\left[ M^{-1}K - \lambda I \right] \phi = 0 \quad (2)$$

Donde se encuentran  $n$  valores propios  $\lambda_i = \omega_i^2$  que representan las frecuencias naturales y  $n$  vectores  $\phi_i$ , modos de vibración del modelo normalizados respecto a la masa. Con estos últimos se podrá armar la matriz modal  $[\Phi]$  columna a columna, lo que permitirá resolver el sistema mediante superposición modal, suponiendo condiciones iniciales nulas. La respuesta del sistema expresada en función de coordenadas modales será:

$$r(t) = [\Phi].q(t) = \sum_{i=1}^n \phi_i \cdot q_i(t) \quad (3)$$

Reemplazando las Ecuaciones 1 del sistema original por otras  $n$  ecuaciones homogéneas diferenciales y desacopladas, con coordenadas modales independientes  $q_i(t)$ , correspondientes a  $n$  osciladores lineales no amortiguados de un grado de libertad y frecuencia natural  $\omega_i$ :

$$\ddot{q}_i(t) + \omega_i^2 q_i(t) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4)$$

### 3.2 Análisis Modal en Espacio de Estado

El empleo de la técnica modal simplifica el análisis del modelo de elementos finitos planteado inicialmente, reduciendo el sistema inicial a sólo los efectos dinámicos resultantes, para obtener como información relevante únicamente las contribuciones modales de la respuesta total. Para la construcción del modelo reducido se debe extraer del sistema original sólo los modos de vibrar correspondientes a nodos testigos de tarjetas electrónicas y paneles solares, información que permitirá analizar longitudinalmente la severidad del choque sobre componentes críticos del modelo.

Entonces, se dispone para el intervalo de frecuencias analizado de los valores propios correspondientes a las frecuencias naturales y de los vectores propios del sistema, modos normales de vibración que permitirán armar la matriz modal  $[\Phi]$ .

Para incorporar al modelo los efectos disipativos se replantean las Ecuaciones 4, proponiendo los factores críticos de amortiguamiento viscoso de cada modo  $\zeta_i$ , coeficientes que podrán ser corroborados posteriormente mediante resultados experimentales. De esta forma se obtienen modos de vibrar normales y amortiguados, representados por las siguientes ecuaciones de

movimiento desacopladas en coordenadas modales:

$$\ddot{q}_i + 2\zeta_i\omega_i\dot{q}_i + \omega_i^2q_i = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (5)$$

Empleando la formulación del espacio de estado se simplifica el tratamiento matemático del problema, ya que se reduce el orden de las ecuaciones de movimiento, al pasar de un sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden a otro de primero, y reemplazar la coordenada modal  $q_i$  por el vector estado del sistema  $x_i$ , compuesto por las variables desplazamientos  $x_i$  y velocidades  $\dot{x}_i$ .

Por lo tanto, al emplear la notación típica del espacio de estados se reescribe el sistema de Ecuaciones 5 matricialmente como:

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (6)$$

En donde la matriz de sistema  $A$  está conformada por bloques modales de orden  $2 \times 2$ , dispuestos diagonalmente, tal como lo expresa la Ecuación 7. Conocidas las frecuencias naturales  $\omega_i$  y propuestos los coeficientes de amortiguamiento  $\zeta_i$ , la matriz  $A$  puede ser construida bloque a bloque directamente por inspección, obteniendo para los  $n$  modos de vibrar,  $2n$  estados distintos.

La matriz  $B$  de entrada se obtiene mediante la transformación del vector que indica la posición del nodo de entrada por la matriz modal, a fin de conseguir para éste la contribución  $\ddot{x}_{i,b}$  del modo  $i$  a la aceleración de base  $u(t)$ .

Por lo tanto, para el modo  $i$  de vibrar, las ecuaciones de movimiento formuladas en el espacio de estado modal, pueden ser reescritas como:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_i \\ \ddot{x}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_i^2 & -2\zeta_i\omega_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i \\ \dot{x}_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \ddot{x}_{i,b} \end{bmatrix} u \quad (7)$$

Para obtener la dinámica del sistema, se incorpora a la Ecuación 6 una expresión representativa de las salidas del sistema en función del vector de estado y de la entrada excitatriz:

$$y = Cx + Du \quad (8)$$

Debido a que el vector de respuesta deseado se construye mediante la combinación de estados, la matriz de salida  $C$  tendrá tantas filas como salidas se requieran y tantas columnas como estados existan, para luego ser transformada mediante la matriz modal y así obtener las respuestas en coordenadas físicas.

Como en el sistema mecánico considerado no existe una contribución directa de la entrada a los nodos de salida, se supone una matriz de alimentación  $D$  nula.

Para la obtención de parámetros cinemáticos de salida tales como: desplazamientos, velocidades y aceleraciones de cada nodo, se emplea la siguiente expresión como combinación de contribuciones modales para la respuesta del modo  $i$ :

$$\begin{bmatrix} x_i \\ \dot{x}_i \\ \ddot{x}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -\omega_i^2 & -2\zeta_i\omega_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i \\ \dot{x}_i \end{bmatrix} \quad (9)$$

### 3.3 Reducción Balanceada

Para agilizar el proceso de diseño y posterior simulación dinámica del satélite, se debe emplear un modelo de orden reducido que aún preserve las características dinámicas relevantes del sistema original. Con él se analizará comprensivamente el problema de vibración en estudio, lo que permitirá actuar sobre el modelo físico, al alterar sus frecuencias de resonancia o dimensionar los componentes del satélite y así evitar su falla estructural.

Es por ello habitual el uso de diversos métodos de reducción de sistemas dinámicos lineales, basados principalmente en el análisis del modelo y en conceptos bajo el dominio de la frecuencia.

La Reducción Balanceada es una técnica comúnmente empleada por la comunidad de la ingeniería del control, ya que es uno de los pocos métodos que permite fácilmente ordenar jerárquicamente los estados correspondientes a sistemas con múltiples entradas y salidas para su posterior reducción, además de no sufrir del mismo nivel de inestabilidad que presentan modelos reducidos obtenidos con otras técnicas alternativas.

Al trabajar con las Ecuaciones 6 y 8 en espacio de estado, se podrá simular la dinámica del modelo mediante un sistema lineal, de tiempo invariante, de orden elevado  $2n$  y con condiciones iniciales nulas:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \quad x(0) = x_0 \quad (10)$$

Donde el vector espacio de estado  $x$  posee un orden que duplica el número de modos  $n$ , el vector  $u$  contiene  $r$  entradas independientes, e  $y$  tiene las  $m$  salidas deseadas del sistema. Por lo tanto, el orden de las matrices del sistema de ecuaciones resulta en:  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times r}$  y  $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$ .

Un método natural de disminuir el orden de este modelo es aquel que toma en cuenta simultáneamente la controlabilidad y observabilidad del sistema, eliminando todos los estados que lo definen salvo un subespacio, la parte más controlable y observable de él, que podrá ser usada entonces como aproximación de bajo orden del modelo. Para ello se define al subespacio controlable como aquel conjunto de estados que pueden ser alcanzados para una entrada dada  $u(t)$  y estado inicial nulo, mientras que el subespacio observable comprende aquellos estados cuyas condiciones iniciales puedan producir una salida no nula  $y(t)$ , sin entrada externa.

La implementación de estos conceptos se logra mediante el uso de los gramianos de controlabilidad  $W_C$  y observabilidad  $W_O$ , matrices cuadradas que emplean la información perteneciente a las entradas y salidas del sistema para definir medidas de controlabilidad y observabilidad de ciertas direcciones preferenciales del espacio de estado, donde el sistema es más controlable y observable, por lo que permiten reducir el modelo a un subespacio, donde su comportamiento de entrada/salida no cambia demasiado.

Pero hay sin embargo cierta imprecisión en su aplicación, ya que la controlabilidad de un modo dado no está relacionada con su observabilidad y viceversa. Se podrá por ejemplo eliminar aquellos estados de baja observabilidad, pero sin embargo se corre el riesgo de borrar alguno que posea alta controlabilidad. Esta fuente de ambigüedad en la clasificación de los estados se supera al tomar en cuenta simultáneamente a la controlabilidad y a la observabilidad mediante la técnica balanceada, que permite ordenar los estados según su importancia relativa.

Para determinar la transformación balanceada es necesario calcular los gramianos del sistema, matrices de orden  $2n \times 2n$ , cuyos vectores propios respectivos se extienden por los subespacios controlables y observables. Ellos se definen matemáticamente mediante las expresiones:

$$W_C = \int_0^{\infty} e^{A\tau} B B^T e^{A^T \tau} d\tau \quad W_O = \int_0^{\infty} e^{A^T \tau} C^T C e^{A\tau} d\tau \quad (11)$$

Según [Pernebo, et al. \(1982\)](#), si se asume al sistema controlable y observable, los gramianos serán no singulares para cualquier tiempo  $\tau > 0$ , por lo que siempre se podrá encontrar un sistema equivalente para el cual ellos sean iguales y diagonales. Esta representación es llamada Balanceada sobre el intervalo  $[0, \tau]$ .

Debido a que el cálculo de las matrices de gramianos bajo las [Ecuaciones 11](#) es costoso computacionalmente, resulta mejor obtenerlas resolviendo las Ecuaciones de Lyapunov para sistemas lineales de tiempo continuo:

$$\begin{cases} A W_C + W_C A^T + B B^T = 0 \\ A^T W_O + W_O A + C^T C = 0 \end{cases} \quad (12)$$

Las matrices de gramianos serán definidas positivas si y sólo si  $A$  y  $B$  son controlables y  $C$  y  $A$  son observables, mientras que su existencia está condicionada a sistemas estrictamente estables.

Como el análisis de la estructura se realiza bajo restricciones del tipo hipostático, se obtendrá una matriz de rigidez singular, con tantos valores propios nulos como modos rígidos posea, lo que generará sistemas inestables a los cuales no se podrá aplicar el balanceo. Pero si se aprovecha la forma desacoplada de las ecuaciones de movimiento al trabajarlas en forma modal, se podrá particionar al sistema en modos rígidos y oscilatorios, al emplear sólo estos últimos para generar el reducido, luego del cual se procederá a reensamblar el sistema completo, incorporando nuevamente los modos rígidos al modelo.

El ordenado que realiza la técnica balanceada del sistema oscilatorio se logra tomando como referencia para la comparación de estados a los Valores Singulares de Hankel del sistema  $\sigma_H$ , relacionados con los elementos diagonales  $\lambda_i$  del gramiano en conjunto mediante la ecuación:

$$\sigma_H = \sqrt{\lambda_i} \quad (13)$$

El gramiano en conjunto se conoce bajo el nombre de matriz de Hankel, matriz diagonal calculable como el producto de las matrices individuales de gramianos. Los valores propios de ella son entonces los elementos diagonales  $\lambda_i$ , cuyos valores corresponden a los cuadrados de los valores singulares de Hankel del sistema  $\sigma_H$ , conformado un vector ordenado que representa la contribución de cada modo en el movimiento general.

En el ambiente del control, mientras que los valores propios definen la estabilidad del sistema, los valores singulares de Hankel definen la “energía” de cada estado del mismo, describiendo la importancia relativa entre ellos. Retener sólo los estados de mayor energía permite obtener modelos de orden reducido que preservan la mayoría de las características relevantes del sistema original en términos de estabilidad, frecuencias y tiempos de respuesta.

Para evitar la ambigüedad relacionada con la clasificación de los estados oscilatorios se debe emplear una transformación  $T$  que produzca a partir de la parte estable del sistema original, otro equivalente, en el cual las matrices de gramianos se encuentren balanceados, o sea, sean iguales y diagonales, lo que permitirá emplear cualquiera de ellas para clasificar jerárquicamente los estados del sistema original.

Para ello se emplea el método desarrollado por [Hatch \(2001\)](#), al usar la función *balreal* de Matlab, que aplica la transformación equivalente de coordenadas de estado  $T$  y permite obtener los gramianos balanceados a partir de los originales:

$$W_{Cb} = T W_C T^T \quad W_{Ob} = T^{-T} W_O T^{-1} \quad (14)$$



Esta transformación balanceada permuta las variables de estado del sistema, ordenándolas de forma decreciente según sus valores singulares de Hankel:

$$x_b = T.x \quad (15)$$

Empleando la matriz de transformación de estados  $T$ , junto con su inversa  $T^{-1}$ , se crea el sistema balanceado a partir del original, como:

$$\begin{cases} \dot{x}_b = T.A.T^{-1}x_b + T.B.u \\ y = C.T^{-1}x_b + Du \end{cases} \quad (16)$$

Luego de que el sistema ha sido convertido mediante una transformación balanceada, debe emplearse algún criterio de error derivado de los valores singulares de Hankel para la reducción posterior del modelo. Es usual descartar aquellos estados con valores de Hankel menores al 1% del mayor valor. Con este criterio se puede particionar al vector de estado  $x$  del sistema balanceado en dos vectores  $x_1$  y  $x_2$ , agrupando en el primero a aquellos estados con mayores valores de Hankel:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u \quad (17)$$

$$y = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + Du \quad (18)$$

Si es razonable asumir que el comportamiento de entrada-salida del sistema es dominado por los estados del vector  $x_1$ , se podrá descartar aquellos correspondientes al estado  $x_2$ .

De este modo, la truncación se realiza reteniendo sólo los primeros estados del sistema previamente balanceado, eliminando aquellos estados con bajos valores singulares de Hankel.

Se podrá reducir el sistema mientras se retiene su ganancia global DC empleando la función *modred* (MODEl order REDuction) junto con la opción *mdc* (Matched DC), del Toolbox de Sistemas de Control de [Matlab \(2007\)](#). Esta función reduce el orden del modelo balanceado previamente al anular de la [Ecuación 17](#) las derivadas de los estados eliminados, y resolviéndola para los restantes.

Por lo tanto, si se hace nula la derivada de la segunda parte  $x_2$ , la ecuación resultante es resuelta sólo para  $\dot{x}_1$ , por lo que el modelo de orden reducido se calcula mediante:

$$\dot{x}_1 = \left[ A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21} \right] x_1 + \left[ B_1 - A_{12}A_{22}^{-1}B_2 \right] u \quad (19)$$

$$y = \left[ C_1 - C_2A_{22}^{-1}A_{21} \right] x_1 + \left[ -C_2A_{22}^{-1}B_2 \right] u \quad (20)$$

Se obtienen nuevas matrices del espacio de estado, apareciendo un remanente de respuesta dado por el término  $-C_2A_{22}^{-1}B_2$ . Como en general se eliminan los modos de alta frecuencia, el método incorpora sus efectos en los estados retenidos, minimizando los errores a baja frecuencia al tener en cuenta la ganancia DC de los modos no usados. Fuera del rango de frecuencias analizado, el modelo obtenido tendrá un comportamiento que se desvía del esperado, ya que a alta frecuencia la dinámica de la matriz de sistema  $A$  se atenúa y el término anterior comienza a dominar la respuesta, aplanándola.

Finalmente, el nuevo vector de estado reducido  $x_R$  se obtiene como combinación de los anteriores, donde  $T_R$  se escoge para forzar la igualdad de ganancias DC, equiparando las respuestas en régimen del sistema reducido respecto del original:

$$x_R = x_1 + T_R \cdot x_2 \quad (21)$$

Si se elige un número de estados conveniente para la reducción, el modelo representado por las Ecuaciones 19 y 20 resultará ser una buena aproximación del sistema original, ya que el balanceado asegura que los estados retenidos sean los más relevantes.

En sistemas estructurales, donde el orden del modelo es moderado, se pueden calcular sin dificultad estas matrices y operar con ellas empleando el toolbox especializado en Control Robusto de Matlab. Para modelos de gran escala, donde el número de estados es superior a 200, el uso de la función *modred* se convierte en la técnica más eficiente en lograr una reducción adecuada de modelos de gran tamaño y bajo amortiguamiento, donde los métodos de reducción basados exclusivamente en los valores singulares de Hankel suelen fallar en producir buenos modelos, debido principalmente a problemas numéricos asociados a estos tipos de modelos.

Si algunas características dinámicas del sistema no pudieron ser capturadas adecuadamente, deberán emplearse más modos en la reducción, ampliando los vectores de la base de estado y generando un nuevo modelo reducido. Será importante posteriormente validar el modelo con resultados obtenidos mediante ensayos experimentales o a través de otros modelos matemáticos de probada fidelidad.

Aunque con la técnica de reducción balanceada se pierde la habilidad de directamente identificar los modos individuales retenidos en el modelo reducido, se podrá posteriormente asociar cuáles son los modos relevantes que han sido incluidos, mediante el análisis de comportamiento en las FRF resultantes, o al extraer los valores propios de la matriz reducida de sistema.

## 4 APLICACIÓN DEL MÉTODO DE REDUCCIÓN DE ORDEN

### 4.1 Modelado de la Estructura Mediante Elementos Finitos

Siguiendo las consideraciones de diseño enunciadas al inicio del trabajo, se realiza un modelo de elementos finitos del satélite como ensamble de las siguientes partes:

- Una cofia compuesta de cuatro grupos de piezas principales: una cubierta monolítica de forma octogonal y 2mm de espesor hecha de material Compuesto de Fibra de Carbono/Epoxi Reforzado (CFC), que recubre cuatro columnas de aleación de aluminio (Al 7075-T6) y éstas a su vez soportan los módulos de sistemas. Además hay ocho paneles solares adheridos a la cara exterior de la cubierta mediante un sustrato de elastómero de 2mm de espesor.

- Cada módulo contiene en su interior la electrónica del satélite y está constituido por dos tapas de CFC que encierran la tarjeta electrónica y la mantienen en posición a través de cojines de elastómero adheridos ellas, mientras que además amortiguará su movimiento.

### 4.2 Materiales

Las propiedades de los materiales se consiguieron de las bases de datos usuales, excepto para el caso de las celdas solares que fueron obtenidas experimentalmente por Paz (1999). Por otra parte, la densidad de las tarjetas electrónicas fue alterada para simular las masas de los componentes electrónicos en ellas (estimados en 0,1 kg para todas las tarjetas). La Tabla 1 especifica las propiedades de los materiales empleados en este modelo.

Componente	Material	Densidad	Modulo E	Modulo $\mu$
Columna	7075-T6	2800 kg/m <sup>3</sup>	7,355.10 <sup>10</sup> Pa	0,33
Cubierta	CFC	1800 kg/m <sup>3</sup>	1,100.10 <sup>11</sup> Pa	0,3
Sustrato	6-1125	1100 kg/m <sup>3</sup>	4,600.10 <sup>6</sup> Pa	0,499
Módulos	CFC	1800 kg/m <sup>3</sup>	1,100.10 <sup>11</sup> Pa	0,3
Paneles Solares	Silicio/Aluminio	4100 kg/m <sup>3</sup>	7,300.10 <sup>10</sup> Pa	0,33
Tarjetas	GFC	20000 kg/m <sup>3</sup>	4,500.10 <sup>9</sup> Pa	0,3

Tabla 1: Propiedades de los materiales empleados en el modelado

El uso de CFC para la cubierta del satélite permite una transmisión uniforme de las cargas dinámicas a lo largo del satélite, ya que este material presenta gran rigidez específica, asegurando un comportamiento monolítico de la estructura.

La electrónica está montada sobre tarjetas de material Compuesto de Fibra de Vidrio Reforzado (GFC), mientras que para los cojines de los módulos y el sustrato que recubre el exterior de la cubierta, se emplean siliconas de baja volatilidad de uso probado en el ambiente espacial.

En el trabajo de Zapico, et al. (2009) se verificó que los componentes críticos como paneles solares y tarjetas electrónicas se encuentran durante el lanzamiento bajo un estado tensional reducido, conservando adecuados márgenes de seguridad. Debido a ello se asume en esta etapa un comportamiento general de los materiales del tipo lineal e isotrópico. Además, aunque las siliconas se consideraron prácticamente incompresibles, al no estar confinadas y tener que transmitir esfuerzos no concentrados de origen másico, se espera de ellas un comportamiento bastante lineal.

### 4.3 Mallado del Modelo

Aprovechando las simetrías estructurales en el diseño y la evidente preponderancia de las aceleraciones esperadas en dirección longitudinal al satélite, se realiza un modelo de sólo un octavo del mismo, resultando en siete piezas distintas.

Tal como se observa en la Figura 2, se efectúa un mallado estructurado para la mayoría de los componentes y no estructurado sólo para la columna, con una densidad de elementos suficiente para representar correctamente la dinámica del satélite bajo un análisis modal, pero no para el cálculo de tensiones o deformaciones. De este modo, el modelo finalmente empleado en el análisis por elementos finitos resultó en un ensamble de 22439 Nodos y 4345 elementos sólidos del tipo cuadrático, agrupados en 39 componentes y con un peso total de 0,32912kg.

Se escogen sólo 10 nodos representativos del movimiento de vibración del satélite, que servirán como nodos testigo para el análisis dinámico y posterior reducción del modelo:

- Un nodo en la base de la columna, punto de anclaje con el vehículo lanzador, por lo que se supone sin comportamiento oscilatorio, sólo el movimiento de base que transmitirá el choque de entrada al resto del satélite.

- Siete nodos en los centros de las tarjetas, empleados para caracterizar el comportamiento dinámico de cada una ante el choque de lanzamiento, lo que permitirá posteriormente escoger el módulo sometido a menores aceleraciones para instalar allí las baterías. Debido a que los módulos son cuerpos masivos del satélite con mayor posibilidad de vibración, es de esperar un acoplamiento de movimientos que comprometa más severamente a alguno de ellos durante el lanzamiento.

- Un nodo en el centro del primer panel solar y otro sobre la cubierta de CFC, enfrentado al anterior. La baja masa de los paneles y la elevada rigidez de la cofia permiten estimar un comportamiento dinámico similar para todos de los paneles, independientemente de la configuración de los módulos y de la vibración general del satélite. Por lo tanto, empleo estos nodos para representar el comportamiento de la cofia.

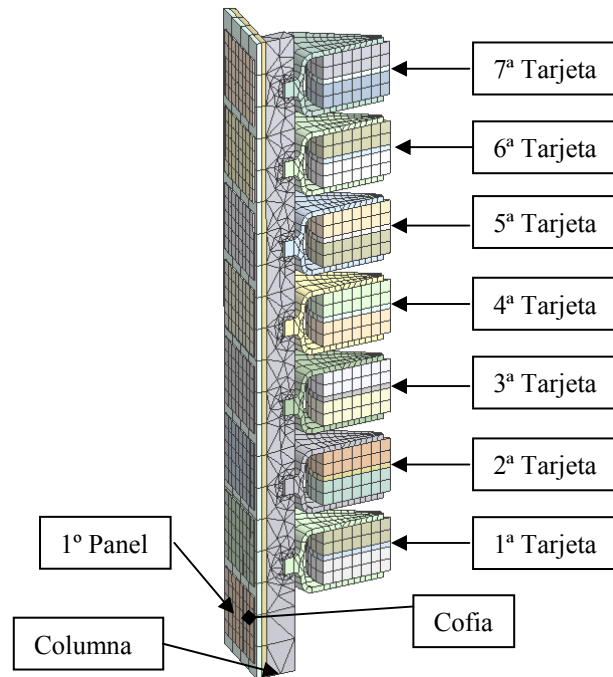


Figura 2: Mallado del Modelo y Nodos empleados en su Reducción

#### 4.4 Análisis Modal

Se realiza un análisis modal del modelo anterior bajo la condición libre-libre, del cual se calculan 200 modos oscilatorios, todos aquellos comprendidos entre los 0 y 4200Hz, rango de frecuencias contemplado en las estimaciones del trabajo de Zapico, et al. (2005) para caracterizar correctamente el comportamiento dinámico del satélite.

Debido a que las aceleraciones de choque impuestas por el lanzador están alineadas con la dirección longitudinal del satélite, es que se pueden considerar condiciones de simetría de cargas en el modelo, permitiendo extraer para los nodos escogidos sólo los vectores propios del modelo correspondientes a los grados de libertad de desplazamiento que actúan en esta dirección.

La extracción de los vectores propios del modelo normalizados respecto de la matriz de masa, correspondientes a los 10 nodos testigo escogidos, permite armar con ellos directamente y columna a columna la matriz modal del sistema.

Aunque el amortiguamiento es uno de los factores de mayor influencia en la magnitud del movimiento resultante, es imposible definir en esta etapa de diseño y con precisión sus valores. Por lo tanto sólo se empleó para modelar al satélite elementos sin amortiguamiento, por lo que del análisis modal se obtuvieron sólo modos reales de vibración. Posteriormente el efecto disipativo podrá ser tenido en cuenta al incorporar al modelo estimaciones de los coeficientes críticos de amortiguamiento o aquellos obtenidos en una etapa posterior de análisis modal experimental.

En la [Figura 3](#) se presenta un esquema de las frecuencias naturales extraídas versus el número de modo asociado, una primera apreciación de la distribución de resonancias en el rango de frecuencias considerado. Las regiones con pendiente pronunciada indican intervalos en los cuales no se presentan resonancias, mientras que las regiones planas evidencian la acumulación de varios modos de vibrar en un pequeño intervalo de frecuencias, comportamiento típico de sistemas formados por conjuntos de elementos similares que entran en modos acoplados de vibración a frecuencias similares.

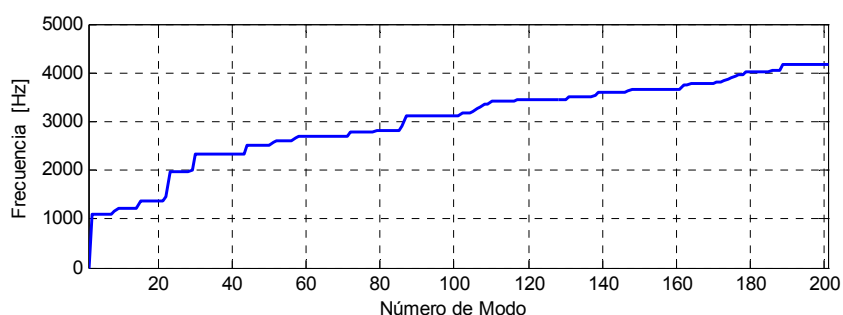


Figura 3: Distribución de Frecuencias según los Modos de vibración

#### 4.5 Análisis de los Datos modales y elección de los nodos representativos

Empleando los vectores propios provistos por el análisis previo, se arma la matriz modal correspondiente a los nodos escogidos y para todos los modos del intervalo de frecuencias deseado.

Posteriormente se plantean las ecuaciones de movimiento del sistema en espacio de estado, de acuerdo con las [Ecuaciones 10](#), definiéndose las matrices del modelo del siguiente modo:

La matriz de entrada  $B$  se obtiene de un vector que indica la posición del nodo de entrada, mientras que al proponer un vector de amortiguamiento modal uniforme del 0,2% se pueden armar las matrices de sistema  $A$  y de salida  $C$ . Se estima que este valor de amortiguamiento no afectará en gran medida la magnitud del pico alcanzado inmediatamente luego del choque, ya que al ser éste tan brusco puede considerarse como choque puro, alcanzándose magnitudes similares de aceleración que en el caso no amortiguado.

El análisis de las Funciones Respuesta en Frecuencia (FRF) en aceleración de todas las salidas respecto del nodo de entrada, tal como se observa en la [Figura 4](#), permite realizar una evaluación previa del número de nodos de salida realmente necesarios para caracterizar dinámicamente al satélite. Posteriormente se escogerán para la reducción sólo los nodos más representativos del sistema dinámico, aquellos que presenten FRF de comportamiento característico.

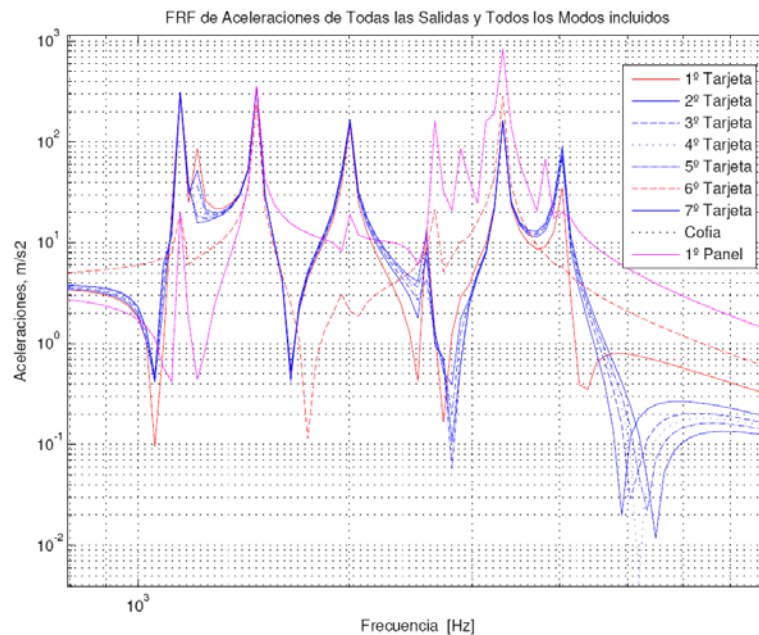


Figura 4: Funciones Respuesta en Frecuencia de los nodos de salida para la entrada de base

Al analizar las FRF de los nodos de salida se observa que todas las tarjetas, salvo la sexta, poseen un trazado similar por lo que se tomará en la reducción este último nodo y el correspondiente a la primera tarjeta, ya que ésta además de caracterizar el comportamiento del resto, exhibe un pico de resonancia más marcado a baja frecuencia, aunque se separe un poco del comportamiento general en sus ceros de alta frecuencia.

Como las FRF del nodo del Panel solar y su antagónico en la cubierta poseen un comportamiento idéntico, se tomará como nodo representativo al primero, correspondiente al componente más frágil del que se tiene que asegurar su sobrevivencia.

#### 4.6 Elección del número de estados del sistema reducido

Al realizar el balanceado por Gramianos de los estados del modelo oscilatorio completo, se obtiene un sistema en el cual los estados son ordenados decrecientemente según las magnitudes relativas de los valores singulares de Hankel, tal como se observa en la [Figura 5](#).

La clave del método para obtener modelos reducidos que aún conserven las características dinámicas del sistema original, es retener sólo aquellos estados que correspondan a los valores de Hankel de mayor absoluto, a fin de preservar la mayor cantidad de energía de estado en el sistema reducido. La decisión de qué modos retener se realiza de forma indirecta, ya que el método sólo permite escoger el número de estados oscilatorios y no cuáles de ellos emplear en las ecuaciones del espacio de estado.

Una primera vista de la [Figura 5](#) permite determinar que pueden despreciarse más de la mitad de los estados oscilatorios, ya que poseen valores singulares de Hankel de cuatro órdenes de magnitud menores al valor máximo.

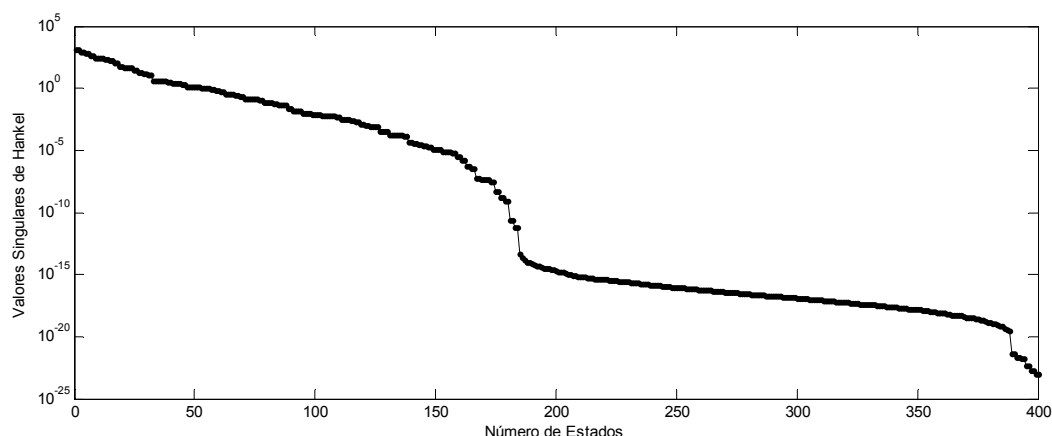


Figura 5: Valores Singulares de Hankel del modelo completo

Al analizar la curva sólo para los primeros cincuenta estados balanceados, se destacan en la [Figura 6](#) tres regiones para las cuales la magnitud de los valores de Hankel se mantiene prácticamente constante, indicando la presencia de estados agrupados por su misma importancia relativa. Por lo tanto, si se incluyen en el modelo reducido algún estado perteneciente a estas regiones, un criterio consistente de reducción obliga a incorporar también a todos aquellos que posean valores de Hankel similares, incrementando en gran medida el número de estados retenidos pero sin mejorar sustancialmente la fidelidad del modelo.

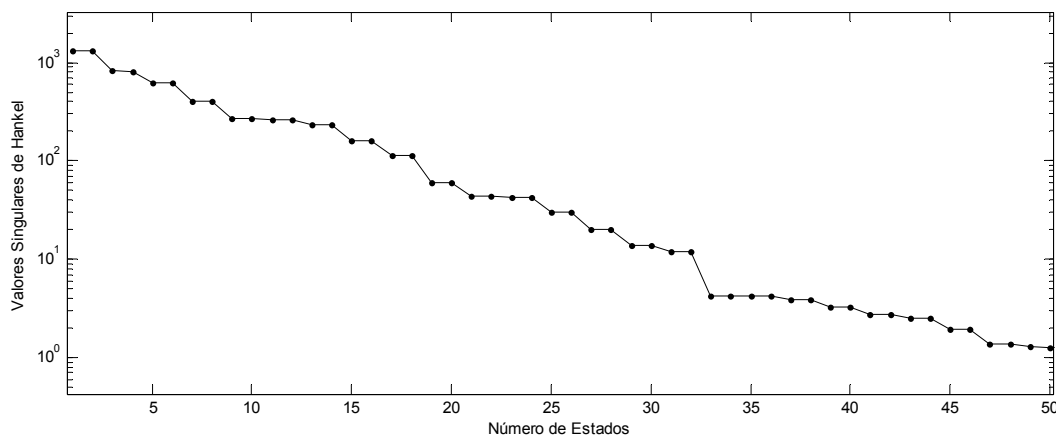


Figura 6: Valores Singulares de Hankel para los 50 primeros modos oscilatorios

Por lo tanto, por inspección de la [Figura 6](#) se concluye que los números de estados óptimos para realizar una reducción serán: 8, 20 y 32.

Con 32 estados totales se abarca casi por completo la energía de estados total, despreciando sólo los valores de Hankel menores al 1%. Mientras que al emplear sólo 20 estados se desprecian aquellos valores menores al 5%. Debido a que con 8 estados se pierde casi un 25% de la energía de estado total, es probable que esta reducción no contemple algunas contribuciones significativas a la caracterización del modelo dinámico. Por lo tanto, se proponen modelos reducidos de 20 y 32 estados, que serán luego comparados con del sistema original para verificar su comportamiento dinámico.

#### 4.7 Verificación de las FRF del sistema reducido

Para la obtención del modelo más pequeño que represente adecuadamente la dinámica del sistema, se proponen dos modelos reducidos con un distinto número de modos oscilatorios retenidos, a fin de evaluar sus comportamientos dinámicos.

Al considerar los resultados anteriormente obtenidos respecto del número de estados necesarios para una reducción consistente, se arma un modelo reducido con 32 estados, correspondiente a un modo rígido y 15 modos oscilatorios, cuyas funciones respuesta en frecuencia respecto de la aceleración se observan en la [Figura 7](#). En ellas se aprecia que los picos resonantes de todos los nodos de salida son copiados exactamente, observándose algunas diferencias sólo en los ceros de alta frecuencia correspondientes a los módulos.

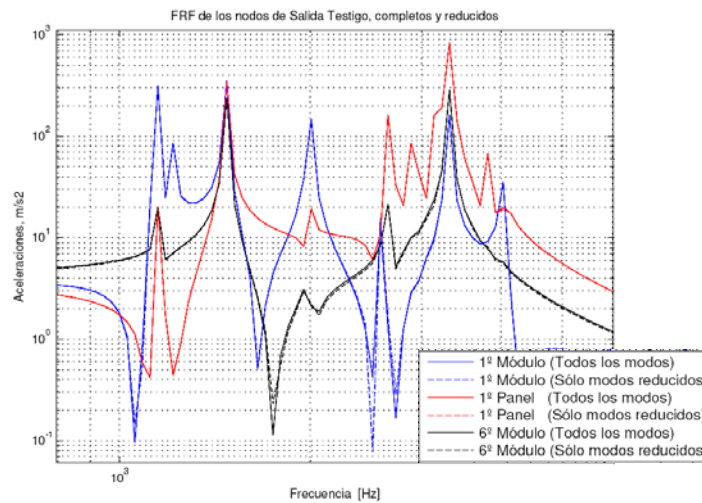


Figura 7: FRF en aceleraciones del modelo reducido a 15 modos oscilatorios

Al armar el modelo reducido de 20 estados, correspondiente a un modo rígido y 9 modos oscilatorios, se observa en la [Figura 8](#) que las FRF siguen copiando bien los picos de resonancia de los nodos de salida, salvo que desaparece el segundo pico del primer módulo y el último de paneles. Se profundizan además las diferencias en ceros de paneles y módulos, mientras que se detecta una pérdida de ganancia DC a baja y alta frecuencia.

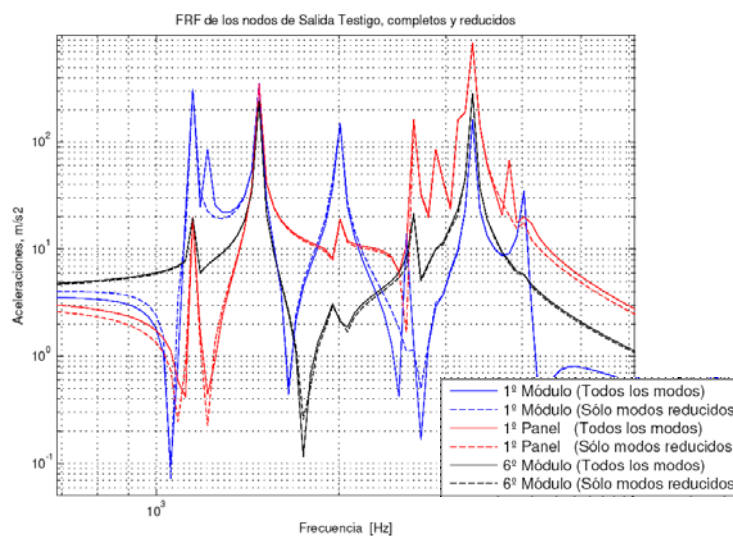


Figura 8: FRF en aceleraciones del modelo reducido a 9 modos oscilatorios





### 5.3 Resultados de la Simulación

Empleándose como excitación del sistema completo y de los reducidos la entrada tipo escalón definida anteriormente, se obtienen las aceleraciones a los que están sometidos los tres nodos de salida anteriormente escogidos, tal como se observa en la figura siguiente:

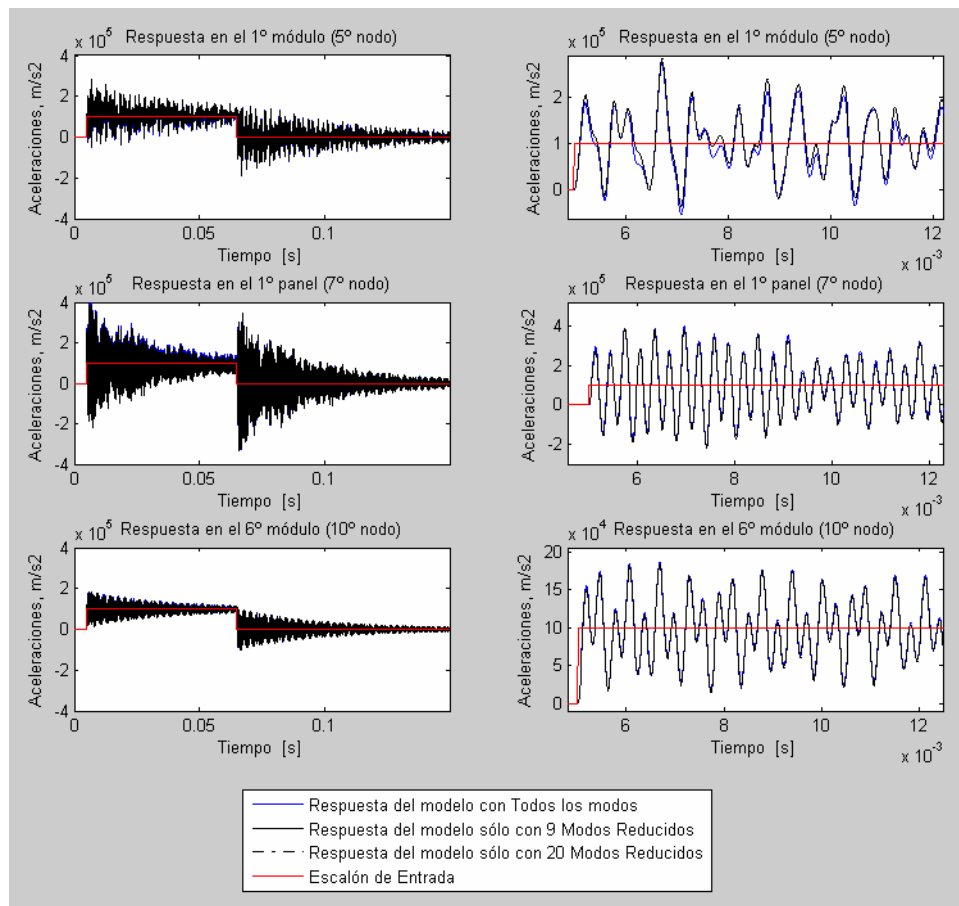


Figura 10: Aceleraciones en Nodos de Salida, de los Modelos completo y reducidos.

Es interesante observar en las curvas adyacentes a cada perfil de choque, sus características oscilatorias, de las cuales se pueden extraer algunas conclusiones:

- Todos los perfiles de choque evidencian un comportamiento oscilatorio convergente correspondiente al empleo de amortiguamiento modal uniforme del 0,2%, aunque se espera que la magnitud de los niveles de aceleración inicial sean similares al caso no amortiguado.

- Las características oscilatorias de los modelos reducidos no presentan diferencias apreciables respecto del caso original, salvo para el primer módulo, donde el modelo de 9 modos provee valores de aceleraciones un 20% menores a los obtenidos con el sistema completo. Para el modelo de 15 modos reducidos, se captura de forma precisa la respuesta del sistema original.

- El primer módulo presenta aceleraciones absolutas de casi tres veces el valor del escalón al inicio del choque, mientras que duplica su valor una vez que el impulso del lanzador ha terminado.

- Aunque el sexto módulo posee un comportamiento distinto del resto, su nivel de aceleraciones es menor, no alcanzando a duplicar la aceleración del lanzador, no obstante estar sometido a un ciclado de mayor frecuencia.

- Las mayores aceleraciones se encuentran presentes en los paneles solares, cuadruplicando el valor del escalón al inicio del choque y mostrando un comportamiento oscilatorio más regular.

#### 5.4 Análisis de los modos de vibrar involucrados en la reducción

Debido a que la técnica de reducción balanceada no permite escoger directamente qué modos retener, se pierde la habilidad de identificar cuáles son aquellos que permanecen en el sistema reducido. Sin embargo, empleando las Figuras 8 y 9 de las FRF, se pueden asociar los picos de resonancia a los modos de vibrar de la estructura, identificándolos como movimientos principalmente de módulos o paneles, o a un acoplamiento entre ambos.

- Para el modelo reducido con 20 estados (9 modos oscilatorios), son identificables los modos de módulos 8, 29, 185, los modos de paneles: 86, 87 y 108, los modos acoplados entre módulos y paneles 57 y 107, y el modo 22 que involucra a toda la estructura.

- Para el modelo reducido con 32 estados (15 modos oscilatorios), se pueden identificar además los modos de módulos 2, 9, 24, 51, el modo 172 de paneles, más el modo 186 del adhesivo de cofía.

El cálculo de la transformada discreta de Fourier (TDF) para las aceleraciones de los nodos de salida graficadas en la Figura 10, permite analizar sus espectros en frecuencia y así identificar cuáles son las frecuencias naturales realmente excitadas durante el lanzamiento:

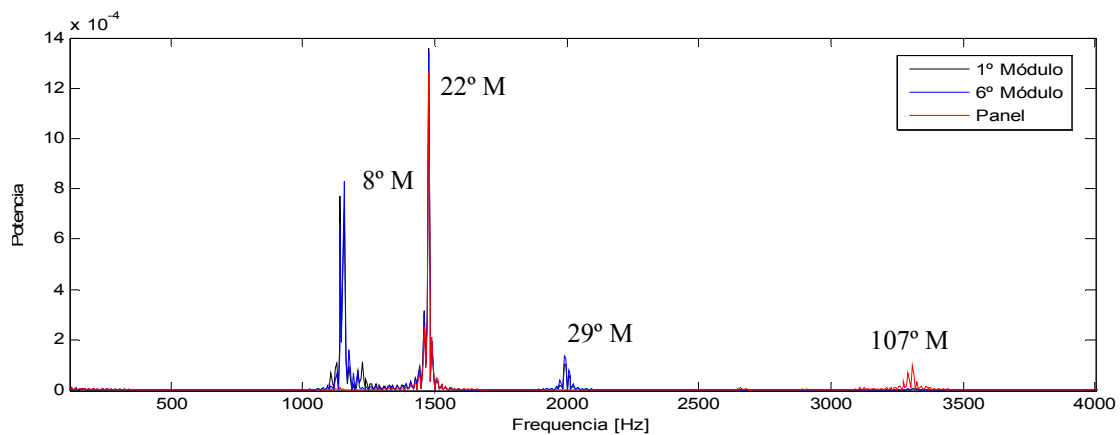


Figura 11: Transformada discreta de Fourier de las aceleraciones de los nodos de salida

El espectro en frecuencia anterior indica que la respuesta se compone fundamentalmente de cuatro modos, acorde con un comportamiento uniforme en el cual el conjunto de los componentes estructurales se desplazan al unísono, tal y como se observa en las deformadas siguientes:

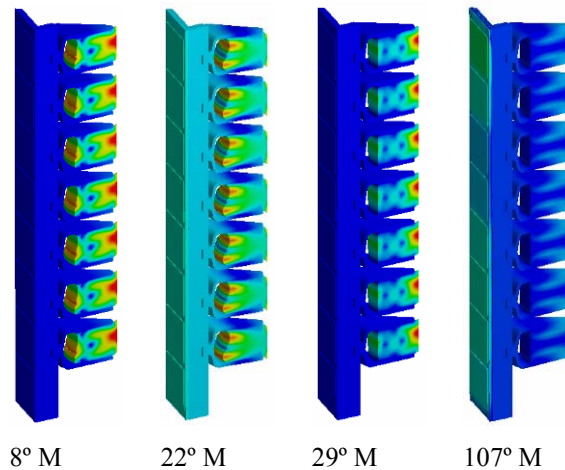


Figura 12: Modos oscilatorios relevantes según la TDF

Los modos más energéticos que son detectados por el espectro de frecuencia de la simulación son los siguientes:

- El 8° Modo a 1150,64Hz, con oscilaciones sólo en módulos.
- El 22° Modo a 1474,28Hz, con oscilaciones en módulos y paneles
- El 29° Modo a 1996,38Hz, con oscilaciones sólo en módulos.
- El 107° Modo a 3306,80Hz, con oscilaciones sólo en paneles.

### 5.5 Comparación de Resultados

Al considerar los resultados presentados por [Zapico, et al. \(2008\)](#) de simulaciones de modelos de parámetros concentrados de 10 grados de libertad con el empleo de un PAF amortiguante, es evidente la desaparición de las vibraciones de alta frecuencia, aunque se alcanzan igualmente los valores elevados de aceleraciones. Como los choques producidos por el lanzador genera movimientos oscilatorios característicos de baja frecuencia (450Hz), las mayores aceleraciones se asocian con los efectos propios de la excitación sobre el satélite.

El empleo de un PAF con características de amortiguador tangente genera los perfiles de choque para las tarjetas y los paneles solares tal como se muestran en la [Figura 13](#). Allí se observa que el nivel de aceleraciones de todos los componentes es idéntico e independiente a su ubicación, mientras que la comparación con el modelo en espacio de estado evidencia que la magnitud máxima es similar al obtenido por módulos y un 35% menor al estimado en de paneles. El uso de un amortiguador con dureza variable aumenta la sollicitación máxima en los componentes, pero elimina las elevadas frecuencias estructurales, dominando un movimiento oscilatorio a baja frecuencia de 300Hz.

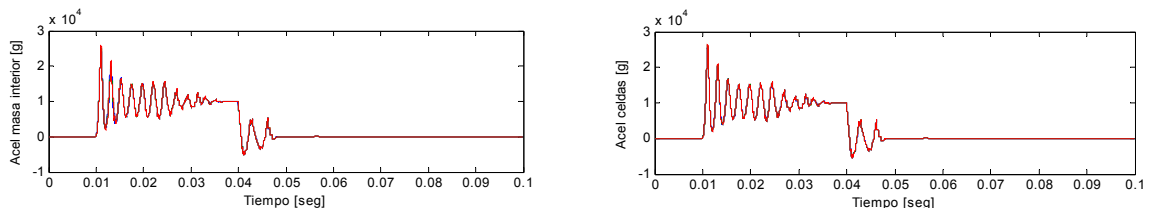


Figura 13: Aceleraciones de módulo y panel empleando un PAF tangente

El empleo de un PAF con características amortiguadoras lineales genera los perfiles de

choque para las tarjetas y los paneles solares tal como se muestran en la [Figura 14](#). Allí se observa que el pico de aceleración inicial para todos los componentes desciende un 50% respecto al estimado por los modelos en espacio de estado de paneles y un 40% en módulos, aunque el final del escalón produce un movimiento oscilatorio de mayor amplitud que el inicial. Este amortiguador también elimina las elevadas frecuencias estructurales, dominando un movimiento oscilatorio de baja frecuencia similar al anterior de 350Hz.

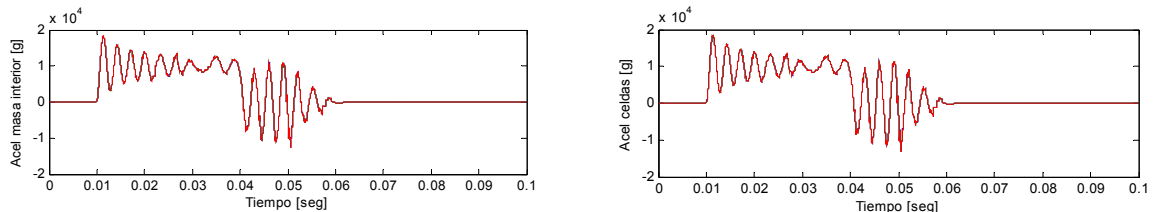


Figura 14: Aceleraciones de módulo y panel empleando un PAF lineal

## 6 CONCLUSIONES

La simulación empleando modelos reducidos en el espacio de estado es una herramienta importante en la etapa de diseño de una nueva estructura sometida a cargas dinámicas, ya que facilita el uso de diversas herramientas numéricas y experimentales para ajustar el modelo dinámico y modificar el propio diseño del satélite.

La reducción balanceada facilita la clasificación de los modos importantes a considerar, permitiendo lograr siempre para el número de modos retenidos, el modelo más preciso.

La aplicación de la técnica de reducción de orden al diseño del satélite propuesto permitió obtener varios modelos dinámicos del mismo, representativos del comportamiento de tres nodos de salida que se consideraron críticos y que condicionarían el rediseño posterior.

El análisis y simulación de los modelos anteriores permite extraer algunas conclusiones útiles en esta etapa del proyecto:

- El modelado previo mediante elementos finitos resulta adecuado en la estimación preliminar de modos y frecuencias, pero deberá ser ajustado en posteriores ensayos sobre modelos físicos, particularmente para obtener los amortiguamientos modales.
- Ambos modelos reducidos son adecuados para simular el comportamiento dinámico del satélite, al considerar su dinámica lineal, mientras que los efectos no lineales pueden considerarse posteriormente como concentrados en el PAF.
- El comportamiento de los modelos demostró ser robusto respecto del número estados considerados, sin observarse cambios importantes en el comportamiento oscilatorio del sistema reducido ante reducciones drásticas del número de modos considerados.
- Para el análisis de cofia y paneles, un modelo con sólo 9 modos resulta óptimo, mientras que para un análisis de módulos se requiere de hasta 15 modos para capturar adecuadamente la magnitud de las aceleraciones, ya que la severidad de éstas disminuyen en un 20% aunque se mantiene el mismo comportamiento oscilatorio.
- Se identificó al 6º módulo como el menos perturbado por los efectos del choque, por lo que se prevé allí la instalación de elementos masivos tales como baterías.
- Aunque los paneles solares estén sometidos a las más altas aceleraciones de todo el satélite, presentan un movimiento oscilatorio bastante regular y dominado por el modo 22, lo que provoca que todos ellos se desplacen en conjunto y no comprometan sus interconexiones eléctricas.
- Los nuevos modelos presentan una apreciable mejora en su performance respecto de

aquellos obtenidos sólo por parámetros concentrados, ya que se pudo capturar las frecuencias naturales de cada componente crítico del satélite, caracterizando su comportamiento mediante las FRF y mientras que el uso de la TDF permitió determinar cuáles son los modos que dominan realmente el movimiento durante el lanzamiento.

- La comparación de las magnitudes de aceleraciones en cofia y módulos evidencian una disminución de sus magnitudes máximas para los modelos reducidos respecto a los estimados por Zapico, et al. (2008), mientras que se eliminan las elevadas frecuencias estructurales, al dominar un movimiento oscilatorio de baja frecuencia característico del elemento amortiguador.

- El empleo de un PAF con características de amortiguación tangente produce mayores niveles de aceleración que el obtenido con amortiguamiento lineal. Según su posibilidad constructiva, posteriormente será importante el ensayo del satélite con diversos PAFs que permitan analizar los efectos reales de disminución del nivel máximo de aceleraciones.

## REFERENCIAS

Hatch, M.R., *Vibration Simulation Using Matlab and Ansys*, Chapman & Hall/CRC, 2001.

Matlab®, *The Control Systems Toolbox™ User's Guide - 2007*, The Mathworks, Inc.

Paz, R. - Un estudio acerca de la integridad estructural de paneles solares de microsátélites - *Trabajo Final, Escuela de Ingeniería Mecánica Aeronáutica*, Universidad Nacional de Córdoba, 1999.

Pernebo, L., Silverman, L. - Model Reduction via Balanced State Space Representations. - *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol AC-27, No.2, April 1982.

Zapico, E., González De Cecco, L., Torresán, G., Aguirre, L. - Dynamic Behaviour of a railgun-launched nanosatellite. *Brazilian Symposium on Aerospace Eng. & Applications*, S. J. Campos, SP, Brazil, 2009. 2009 BR-AERO / III CTA-DLR.

Zapico, E., Torresán, G., Aguirre, L. - Análisis Dinámico de la Estructura de un Nanosatélite lanzado por Cañón Electromagnético – Presentado en el XXVII Congreso de Mecánica Computacional, San Luis, 2008.

Zapico, E.; Torresán, G.; Garay, R. - Análisis estructural preliminar de un nanosatélite lanzado por cañón electromagnético – *Mecánica Computacional*, Vol. XXIV, ISSN 1666-6070, Buenos Aires, 2005.