

ANÁLISIS DE VIBRACIONES LIBRES DE UNA VIGA CON UN SISTEMA DE DOS GRADOS DE LIBERTAD MONTADO ELÁSTICAMENTE

Sergio A. Vera*, **Mariano Febbo***, **Carlos G. Méndez†** and **Rodrigo R. Paz†**

*Departamento de Física - Instituto de Mecánica Aplicada
Universidad Nacional del Sur - CONICET
Av. Alem 1253, 8000 Bahía Blanca, ARGENTINA
e-mail: svera@criba.edu.ar,

†Centro Internacional de Métodos Computacionales en Ingeniería
INTEC-CONICET-UNL
Guemes 3500, 3000 Santa Fe, ARGENTINA

Key Words: vibraciones, absorber dinámico, viga,.

Abstract.

En este trabajo se realiza un análisis teórico del comportamiento dinámico del sistema mencionado en el título mediante un método analítico basado en los multiplicadores de Lagrange y además por elementos finitos. Este tipo de problemas posee un interés tanto teórico como práctico. El interés teórico reside en poder estudiar la dinámica de un sistema simple, de uso universal, como la viga al que se le adosa un subsistema montado elásticamente. Esto permite analizar de que forma altera, dicho subsistema, las frecuencias naturales de vibración del sistema modificado. Desde el punto de vista de su aplicabilidad práctica este sistema representa un modelo de absorbedor dinámico (o neutralizador de vibraciones) de dos grados de libertad, por lo que es de gran importancia, el conocimiento su comportamiento, desde el punto de vista del control de vibraciones. Los resultados obtenidos por ambos métodos están en excelente acuerdo con los previamente encontrados en la literatura.

1. INTRODUCCIÓN

En este trabajo se estudia las vibraciones libres de un sistema combinado compuesto de una viga sobre la que se monta un sistema con dos grados de libertad, ver figura 1. Este estudio puede enmarcarse dentro del contexto de los sistemas dinámicos en los que se le agrega masa montada elásticamente. Como es bien conocido, el sistema combinado cambia sus frecuencias naturales de oscilaciones respecto de los sistemas separados debido a la interacción que se produce entre ellos.

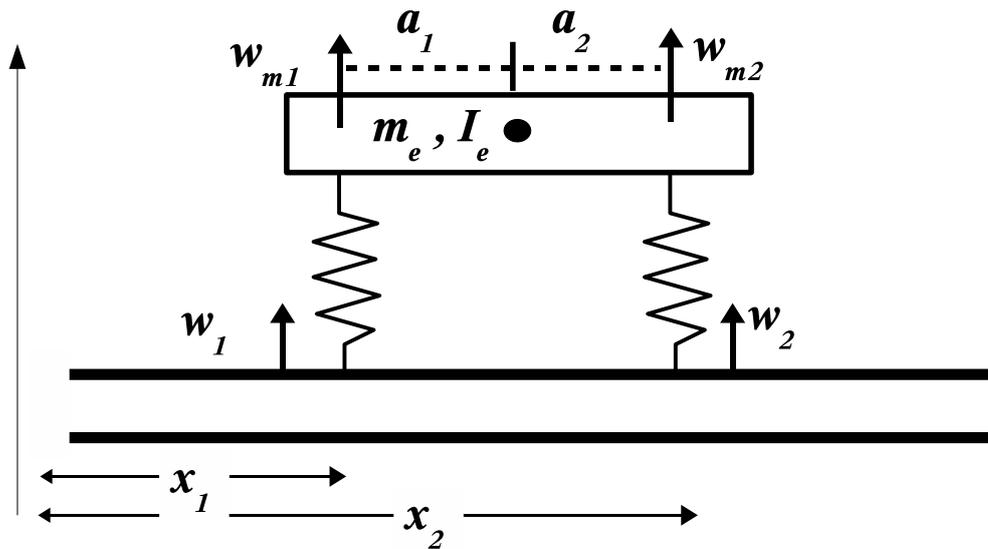


Figura 1: Sistema dinámico compuesto de una viga y un sistema 2dof

El interés teórico de este tema se remonta a los resultados de Rayleigh¹ y a partir de ahí podemos citar varios trabajos que demuestran que el interés en el tema se ha mantenido a lo largo de los años.²⁻⁶ El punto más importantes para analizar es la modificación de las frecuencias de resonancia al conectar ambos sistemas, ya que esto puede alterar los parámetros de diseño.

La aplicación práctica más importante, para la ingeniería de diseño, es su utilización como absorbedor dinámico (o como se lo denomina ahora más correctamente neutralizador de vibraciones), ya que es de utilidad en casos como las suspensiones de automóviles o en máquinas rotantes.

La modificación de un elemento estructural por el añadido de masa, resortes o ambos es una situación habitual que tiene como principal consecuencia la modificación de las frecuencias propias del sistema con lo que sería importante tratar de predecir el sentido en que ocurrirán los cambios. Es bien conocido el hecho que si se le adosa masa a un sistema sus frecuencias naturales disminuyen; mientras que si se le adosa un resorte, las mismas aumentan. En cambio no es tan conocido que ocurriría en el caso en que se conecte un sistema masa-resorte.

2. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

Para la formulación matemática del problema se recurrió a dos métodos diferentes, uno analítico y el otro numérico, para comparar en aquellos casos donde no existen valores en la literatura con el objetivo de obtener confiabilidad.

La metodología analítica se basa en el método de los modos asumidos junto con el método de los multiplicadores de Lagrange. Esto ha sido utilizado previamente por Dowell⁴ para estudiar propiedades generales del comportamiento dinámico de sistemas combinados. El método de elementos finitos también se utiliza dada su gran confiabilidad y versatilidad con fines de comparación. A continuación se presentan brevemente ambos.

2.1. Método de Lagrange

Este método se basa en asumir que el desplazamiento transversal de la viga puede desarrollarse como una serie compuesta de una combinación lineal de funciones ϕ_i , las cuales son funciones de las coordenadas espaciales, multiplicadas por coordenadas generalizadas dependientes del tiempo q_i

$$w(x, t) = \sum_{i=1}^n \phi_i(x) q_i(t) \quad (1)$$

La energía cinética puede expresarse como

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n M_i \dot{q}_i^2 + \frac{1}{2} \frac{m_e}{(a_1 + a_2)^2} (\dot{w}_{m1} a_2 + \dot{w}_{m2} a_1)^2 + \frac{1}{2} I_e (\dot{w}_{m2} - \dot{w}_{m1}) \quad (2)$$

donde los coeficientes M_i dependen de la distribución de masas del sistema y de la elección de las funciones ϕ_i . Similarmente la energía potencial queda

$$V = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n M_i \omega_i^2 q_i^2 + \frac{1}{2} k_1 (w_{m1} - w_1)^2 + \frac{1}{2} k_2 (w_{m2} - w_2)^2 \quad (3)$$

hasta aquí se consideran ambos sistemas por separado, la condición que los liga se puede expresar requiriendo que el sistema de dos grados de libertad esté conectado a la viga en $x = x_1$ y $x = x_2$

$$\begin{aligned} f_1 &= \sum_{i=1}^n q_i(t) \phi_i(x_1) - w_1 = 0 \\ f_2 &= \sum_{i=1}^n q_i(t) \phi_i(x_2) - w_2 = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

Las ecuaciones de Lagrange para este caso son

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{s}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial s_k} = \sum_{l=1}^{\nu} \lambda_l \frac{\partial f_l}{\partial s_k} \quad k = 1, \dots, N + 2 \quad (5)$$

donde λ_l son los multiplicadores de Lagrange.

Siendo la lagrangiana

$$L = T - V \quad (6)$$

reemplazando en las ecuaciones de Lagrange (5) quedan el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} M_i(\ddot{q}_i + \omega_i^2 q_i) &= \lambda_1 \phi_i(x_1) + \lambda_2 \phi_i(x_2) \\ \frac{m_e}{(a_1 + a_2)^2} a_2 (\ddot{w}_{m1} a_2 + \ddot{w}_{m2} a_1) - \frac{I_e}{(a_1 + a_2)^2} (\ddot{w}_{m2} - \ddot{w}_{m1}) + k_1 (w_{m1} - w_1) &= 0 \\ \frac{m_e}{(a_1 + a_2)^2} a_1 (\ddot{w}_{m1} a_2 + \ddot{w}_{m2} a_1) + \frac{I_e}{(a_1 + a_2)^2} (\ddot{w}_{m2} - \ddot{w}_{m1}) + k_2 (w_{m2} - w_2) &= 0 \\ k_1 (w_{m1} - w_1) &= \lambda_1 \\ k_2 (w_{m2} - w_2) &= \lambda_2 \end{aligned} \quad (7)$$

Suponiendo movimiento armónico simple para todas las variables,

$$q_i(t) = \bar{q}_i e^{i\omega t}; \quad w_{m1}(t) = \bar{w}_{m1} e^{i\omega t}; \quad w_{m2}(t) = \bar{w}_{m2} e^{i\omega t}; \quad w_1(t) = \bar{w}_1 e^{i\omega t}; \quad w_2(t) = \bar{w}_2 e^{i\omega t}$$

las ecuaciones 7 se convierten en

$$\begin{aligned} M_i(-\omega^2 + \omega_i^2) \bar{q}_i &= \lambda_1 \phi_i(x_1) + \lambda_2 \phi_i(x_2) \\ -\frac{m_e}{(a_1 + a_2)^2} a_2 \omega^2 (\bar{w}_{m1} a_2 + \bar{w}_{m2} a_1) + \frac{\omega^2 I_e}{(a_1 + a_2)^2} (\bar{w}_{m2} - \bar{w}_{m1}) + k_1 (\bar{w}_{m1} - \bar{w}_1) &= 0 \\ -\frac{m_e}{(a_1 + a_2)^2} a_1 \omega^2 (\bar{w}_{m1} a_2 + \bar{w}_{m2} a_1) - \frac{\omega^2 I_e}{(a_1 + a_2)^2} (\bar{w}_{m2} - \bar{w}_{m1}) + k_2 (\bar{w}_{m2} - \bar{w}_2) &= 0 \\ k_1 (\bar{w}_{m1} - \bar{w}_1) &= \lambda_1 \\ k_2 (\bar{w}_{m2} - \bar{w}_2) &= \lambda_2 \end{aligned} \quad (8)$$

calculando q_i , w_{m1} , w_{m2} , w_1 and w_2 en términos de λ_1 y λ_2 y sustituyendo el resultado en el sistema (4) se obtiene la siguiente ecuación matricial

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

donde los elementos α estan dados por

$$\alpha_{11} = \sum_{i=1}^n \frac{\phi_i^2(x_1)}{M_i(\omega_i^2 - \omega^2)} + \frac{1}{k_1} - \frac{I_e + m_e a_1^2}{m_e I_e \omega^2} \quad (9)$$

$$\alpha_{12} = \sum_{i=1}^n \frac{\phi_i(x_1)\phi_i(x_2)}{M_i(\omega_i^2 - \omega^2)} - \frac{I_e + m_e a_1 a_2}{m_e I_e \omega^2} \quad (10)$$

$$\alpha_{21} = \sum_{i=1}^n \frac{\phi_i(x_2)\phi_i(x_1)}{M_i(\omega_i^2 - \omega^2)} - \frac{I_e + m_e a_1 a_2}{m_e I_e \omega^2} \quad (11)$$

$$\alpha_{22} = \sum_{i=1}^n \frac{\phi_i^2(x_2)}{M_i(\omega_{ij}^2 - \omega^2)} + \frac{1}{k_2} - \frac{I_e + m_e a_2^2}{m_e I_e \omega^2} \quad (12)$$

De esta ecuación, las autofrecuencias del problema se pueden obtener, si el determinante de los coeficientes es igualado a cero.

Una vez calculados los autovalores, se puede obtener λ_1 y λ_2 de manera directa y de las ecuaciones 7, se puede expresar \bar{q}_i como

$$\bar{q}_i^{(k)} = \frac{\lambda_1^{(k)} \phi_i(x_1) + \lambda_2^{(k)} \phi_i(x_2)}{M_i(\omega_i^2 - \omega^{(k)2})} \quad (13)$$

donde el superíndice (k) denota el autovalor en consideración.

Ahora, se puede expresar los nuevos modos de la viga conectada al sistema 2-dof.

$$Y^{(k)}(x) = \sum_{i=1}^n \phi_i \bar{q}_i^{(k)} \quad k = 1..N + 2 \quad (14)$$

2.2. Formulación por FEM

De acuerdo con la teoría clásica de vigas, la ecuación que describe el desplazamiento transversal $w(x, t)$ es la bien conocida ecuación diferencial de cuarto orden

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = f, \quad \text{in } \Omega \times [0, t], \quad (15)$$

donde A es el área transversal de la viga, I el momento de'área, E el módulo de Young y Ω el dominio de la viga con el contorno $\partial\Omega$.

La discretización de la viga fue realizada con grados de libertad nodales

$$u^e = \left\{ w, \frac{\partial w}{\partial x} \right\}, \quad (16)$$

y polinomios de Hermite como funciones de forma

Las autofrecuencias son calculadas utilizando la ecuación característica

$$\det(-\omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{K}) = 0, \quad (17)$$

donde las matrices de masa y elasticidad global \mathbf{M} y \mathbf{K} , respectivamente, están dadas por

$$\mathbf{M} = \mathbf{A}_{e=1}^{nelem} A \int_{\Omega^e} \rho \mathbf{N}_e^T \mathbf{N}_e d\Omega^e, \quad (18)$$

$$\mathbf{K} = \mathbf{A}_{e=1}^{nelem} \int_{\Omega^e} EI \mathbf{B}_e^T \mathbf{B}_e d\Omega^e, \quad (19)$$

siendo A el operador de ensamblado estandar de elementos finitos y $nelem$ el número de elementos de la grilla. La matriz de deformación-desplazamiento \mathbf{B}_e se obtiene por diferenciación de las funciones de forma \mathbf{N}_e

$$\mathbf{B}_e = \frac{d^2 \mathbf{N}_e}{dx^2}. \quad (20)$$

El sistema de dos grados de libertad es tratado como en .⁷ Las matrices de masa y elasticidad para este sistema son ensambladas

$$\mathbf{m}_{sm} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_e & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_e \end{bmatrix}, \quad (21)$$

$$\mathbf{k}_{sm} = k \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & a_1 \\ 0 & 1 & -1 & -a_2 \\ -1 & -1 & 2 & (a_2 - a_1) \\ a_1 & -a_2 & (a_2 - a_1) & (a_1 + a_2) \end{bmatrix}, \quad (22)$$

con los grados de libertad asociados

$u_{sm}^e = \{w_1, w_2, w_{sm}, \theta_{sm}\}$. En este caso, $k = k_1 = k_2$; w_1 and w_2 son los desplazamientos de los puntos de la viga donde el sistema está montado; y w_{sm} y θ_{sm} son el desplazamiento and la rotación de la masa.

3. RESULTADOS Y DISCUSIONES

Se presentan resultados numéricos para dos casos: una viga empotrada en ambos extremos y una viga en voladizo.

En las tablas 1 y 2 se comparan los resultados con los obtenidos previamente por Wu y Whittaker.⁷ De aquí se observa un excelente acuerdo entre ambos trabajos con lo que se puede considerar que el método desarrollado aquí es confiable.

Otro objetivo del trabajo es mostrar la modificación de las frecuencias de oscilación de la viga desnuda por el agregado del sistema dinámico. Esto se puede ver en la tabla 3 y 4. En ambas tablas los valores de frecuencia $\omega = 287,0731, 2873,9526$ de las primeras columnas corresponden a las dos frecuencias del sistema 2dof aislado.

Cuadro 1: Primeras cinco frecuencias naturales de una viga empotrada en ambos extremos con un sistema 2-dof masa-resorte localizado en $x_1 = 0,2$ and $x_2 = 0,4$.

	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5
	275.2654	1389.1079	2881.5921	4222.6005	7837.9938
REF Wu	(273.8904)	(1388.6244)	(2880.5511)	(4222.2172)	(7837.1068)
FEM	273.8564	1388.5966	2879.7662	4221.8643	7836.9877
REF Wu	(273.8565)	(1388.5937)	(2879.7694)	(4221.9181)	(7837.4548)

Cuadro 2: Primeras cinco frecuencias naturales de una viga en voladizo con un sistema 2-dof masa-resorte localizado en $x_1 = 0,2$ and $x_2 = 0,4$.

	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5
	143.5580	325.1796	1527.9081	3335.9936	4288.8117
REF Wu	(143.4354)	(324.3061)	(1526.9812)	(3330.0140)	(4281.6266)
FEM	143.4208	324.2274	1526.8991	3326.6655	4279.7019
REF Wu	(143.4206)	(324.2268)	(1526.8963)	(3326.6748)	(4279.7603)

Se observa que las primeras cinco frecuencias del sistema combinado corresponden a ligeras modificaciones de las tres primeras de la viga y a las dos del sistema 2 dof. En ambos casos la frecuencia fundamental disminuyen mientras que las superiores aumentan.

Otro resultado a destacar es la influencia de los parámetros del sistema 2 dof en la alteración de la frecuencia fundamental. Para todo el análisis subsiguiente se toma $a_1 = a_2 = 0,1$, es decir una barra con el centro de masa en el punto medio de la separación entre los resortes y viga considerada es en voladizo.

El primer parámetro a analizar es la influencia de masa m_e de la barra. Para este caso se fijó $m_e = 1,53875$ y tomaron valores por encima y por debajo de este valor, comprobándose que la adición de masa provoca la disminución de la frecuencia fundamental.

El segundo parámetro que se analiza es el momento de inercia I_e donde la tendencia es similar, es decir que al aumentar I_e disminuye la frecuencia fundamental.

Por último se analiza la influencia de la constante de los resortes que conectan ambas estructuras, donde en este caos el aumento de este parámetro aumenta la frecuencia fundamental del sistema.

Cuadro 3: Comparación de las primeras cinco frecuencias naturales de una viga empotrada con un sistema 2-dof masa-resorte adosado.

	empotrada + 2dof	combinado
ω_1	287.0731	273.8564
ω_2	1436.9888	1388.5966
ω_3	2873.9526	2879.7662
ω_4	3961.1152	4221.8643
ω_5	7765.3697	7836.9878

Cuadro 4: Comparación de las primeras cinco frecuencias naturales de una viga en voladizo con un sistema 2-dof masa-resorte adosado.

	voladizo + 2dof	combinado
ω_1	225.8262	143.5580
ω_2	287.0731	325.1796
ω_3	1415.2288	1527.9081
ω_4	2873.9526	3335.9936
ω_5	3962.6818	4288.8117

4. CONCLUSIONES

- a) El método basado en los modos asumidos y los multiplicadores de Lagrange resultó ser muy confiable para la obtención de las frecuencias naturales y los modos del sistema combinado. También se debe destacar que el tiempo de cómputo requerido es mucho menor que el elementos finitos
- b) La metodología permite investigar la dirección de los cambios en la frecuencia y la obtención de una expresión aproximada de las formas modales.
- c) La versatilidad del método permite su extensión a problemas más complejos como por ejemplo si se adosan varios sistemas o se estudia el comportamiento de una placa. Estos tópicos serán objeto de estudios posteriores

5. AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido realizados gracias a la financiación de la Agencia Nacional de Promoción Científica y Técnica (PICT 13-13033) y por la Secretaría General de Ciencia y Tecnología de la Universidad Nacional del Sur en el Departamento of Física (PGI 24/F032 Director: C. A. Rossit).

Los autores están en deuda con el Profesor P.A.A Laura por sus útiles comentarios y críticas constructivas.

Cuadro 5: Influencia de la masa

	$0.01 m_e$	$0.1 m_e$	m_e	$10 m_e$	$100 m_e$
ω_1	149.6322	148.9566	142.4483	100.7233	39.6069

Cuadro 6: Influencia del momento de inercia

	$0.01 I_e$	$0.1 I_e$	I_e	$10 I_e$	$100 I_e$
ω_1	197.4816	192.0471	142.4483	54.0669	17.381

Cuadro 7: Influencia de la constante elástica k

	$0.01 k$	$0.1 k$	k	$10 k$	$100 k$
ω_1	28.4756	82.9547	142.4483	151.5670	152.4327

REFERENCIAS

- [1] J.W. Rayleigh. *The theory of sound*, volume I y II. Dover, (1945).
- [2] P.A.A. Laura, E.A. Susemihl, J.L. Pombo, D.E. Luisioni, and R. Gelos. On the dynamic behavior of structural elements carrying elastically mounted concentrated masses. *Applied Acoustics*, **10**, 121–145 (1977).
- [3] L. Ercoli and P.A.A. Laura. Analytical and experimental investigation on continuous beams carrying elastically mounted masses. *Journal of Sound and Vibration*, **114**, 519–533 (1987).
- [4] E.H. Dowell. On some general properties of combined dynamical systems. *ASME Journal of Applied Mechanics*, **46**, 206–209 (1979).
- [5] M. Gurgoze. On the eigenfrequencies of a cantilever beam with attached tip mass and spring-mass system. *Journal of Sound and Vibration*, **190**, 149–162 (1996).
- [6] C.A. Rossit and P.A.A. Laura. Free vibrations of a cantilever beam with a spring-mass system attached to the free end. *Ocean Engineering*, **28**, 933–939 (2001).
- [7] J.J. Wu and A.R. Whittaker. The natural frequencies and mode shapes of a uniform cantilever beam with multiple two-dof spring-mass systems. *Journal of Sound and Vibration*, **227**, 361–381 (1999).
- [8] M.U. Jen and E.B. Magrab. Natural frequencies and mode shapes of beam carrying a two degree-of-freedom spring-mass system. *ASME Journal of Vibration and Acoustics*, **115**, 202–209 (1993).