

## ANÁLISE ESTÁTICA PARA CONCEPÇÃO ESTRUTURAL DE TORRES TRELIÇADAS ESTAIADAS DE GRANDE PORTE

Tamara V. Araújo<sup>a</sup>, Marcelo Greco<sup>b</sup>

<sup>a</sup>*Departamento de Engenharia de Estruturas – Universidade Federal de Minas Gerais, Av. Antonio Carlos, 6627, 31270-901 – Escola de Engenharia – Bloco 1 – Sala 4127 – Belo Horizonte, MG, Brasil, tamara.araujo@yahoo.com.br, <http://www.pos.dees.ufmg.br>*

<sup>b</sup>*Departamento de Engenharia de Estruturas – Universidade Federal de Minas Gerais, Av. Antonio Carlos, 6627, 31270-901 – Escola de Engenharia – Bloco 1 – Sala 4127 – Belo Horizonte, MG, Brasil, mgreco@dees.ufmg.br, <http://www.pos.dees.ufmg.br>*

**Palavras chave:** Torres estaiadas; sistemas estruturais; método dos elementos finitos; estática.

**Resumo.** O artigo busca a caracterização e a análise do comportamento mecânico de torres treliçadas estaiadas de grande porte. Através das configurações usuais de torres estaiadas e das ações atuantes neste tipo de sistema estrutural buscou-se analisar o comportamento mecânico e a estabilidade, variando-se as topologias da torre treliçada, disposição dos elementos, modelos com base quadrada e triangular, posição dos estais e o nível de protensão inicial para estruturas esbeltas que apresentam comprimento não linear geométrico acentuado. Os sistemas estruturais estudados foram modelados numericamente com auxílio de programa computacional baseado no método dos elementos finitos, que utiliza formulação não linear geométrica posicional com prescrição de deformação inicial nos cabos. Foram considerados possíveis efeitos de plastificação nos elementos constituintes da estrutura, além da análise de perda da estabilidade estrutural devido à carga crítica. Foi analisado o comportamento estrutural sob ações estáticas. Os resultados obtidos indicaram quais as topologias mais adequadas para aplicações neste tipo de estrutura.

## 1 INTRODUÇÃO

Torres treliçadas estaiadas são sistemas estruturais constituídos por um mastro treliçado cuja estabilidade é garantida por um conjunto de cabos de aço tensionados, conforme ilustrado na Figura 1. Guimarães (2008) destaca que neste tipo de sistema estrutural atuam diversos tipos de ações, como peso próprio, vento, sobrecargas, ações sísmicas, gelo e ruptura dos cabos. As torres treliçadas são estruturas leves, esbeltas e com bom comportamento mecânico. No entanto, devido a estas mesmas características, quando submetidas às ações dinâmicas apresentam baixo amortecimento estrutural, sendo conseqüentemente muito sensíveis às vibrações.

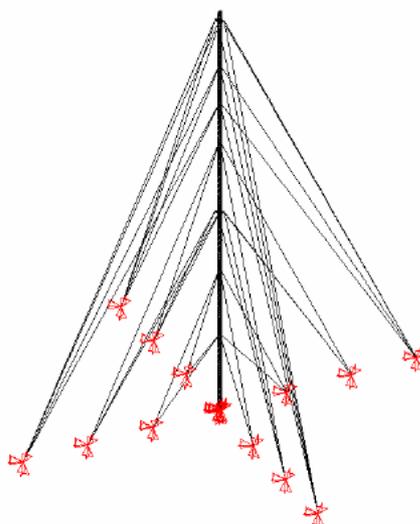


Figura 1 – Modelo de torre estaiada. Fonte: Guimarães (2008).

As torres estaiadas são estruturas muito esbeltas, sendo largamente aplicadas como torres de transmissão de ondas e estruturas de perfuração do solo. O mastro treliçado é geralmente articulado na base e sua estabilidade é garantida pelos estais. São estruturas que ocupam grande espaço físico em planta, uma vez que a área ocupada pela estrutura leva em consideração os pontos de ancoragem dos estais. Neste sentido, Guimarães (2008) procurou determinar a quantidade, a disposição e o ângulo de inclinação ótimo para os estais, considerando-se o comportamento estrutural, estabilidade e espaço ocupado pela estrutura como parâmetros de análise. Segundo Amiri (2002), as torres treliçadas estaiadas são soluções estruturais eficientes e econômicas para alturas acima de 150m, quando comparadas com outros sistemas estruturais autoportantes. Ainda segundo o autor, devido a fatores como a esbelteza e a interação dos estais com o mastro, as torres treliçadas estaiadas apresentam um comportamento estrutural complexo com acentuada não linearidade geométrica. Observa-se neste tipo de sistema estrutural uma tendência de curvatura dos estais, na forma de catenária, e eventualmente podem ocorrer efeitos não lineares físicos, relacionados com os materiais componentes da estrutura (plasticidade).

Diversos artigos, como Ekhande e Madugula (1988), Desai *et al.* (1988) e Schrefler *et al.* (1983), tratam da análise do comportamento mecânico de torres estaiadas bidimensionais constituídas por mastros e estais modelados com elementos de viga.

## 2 MÉTODO NUMÉRICO

As modelagens numéricas são baseadas nas formulações não lineares e estáticas apresentadas a seguir.

Considerando-se um sistema conservativo, o funcional de energia é dado por:

$$\Pi = U - \sum FX \quad (1)$$

Sendo que  $X$  representa o vetor das posições nodais e  $F$  as forças externas aplicadas na estrutura. Considerando-se um material elástico, homogêneo e isotrópico, a energia de deformação  $U$  em relação ao volume inicial  $V$  é obtida pela Equação (2).

$$U = \int_V u \, dV = \int_V \int \sigma \, d\varepsilon \, dV = \int_V \int E \varepsilon \, d\varepsilon \, dV = \int_V \frac{1}{2} E \varepsilon^2 \, dV \quad (2)$$

Na Equação (2),  $u$  é a energia específica e  $\sigma$  o tensor das tensões. Assim, o funcional de energia pode ser escrito em função do tensor das deformações ( $\varepsilon$ ) e do módulo de elasticidade  $E$ .

$$\Pi = \frac{E}{2} \int_V \varepsilon^2 \, dV - \sum FX \quad (3)$$

As equações anteriores são aplicáveis em domínios contínuos. Para aplicação em elementos finitos é necessário efetuar-se a discretização da estrutura e conseqüentemente definir o elemento que será utilizado (no caso elemento de treliça espacial). As Equações (4) a (6) apresentam a cinemática do elemento utilizado, que pode ser visualizado na Figura 2.

$$x = X_1 + (X_2 - X_1) \xi \quad (4)$$

$$y = Y_1 + (Y_2 - Y_1) \xi \quad (5)$$

$$z = Z_1 + (Z_2 - Z_1) \xi \quad (6)$$

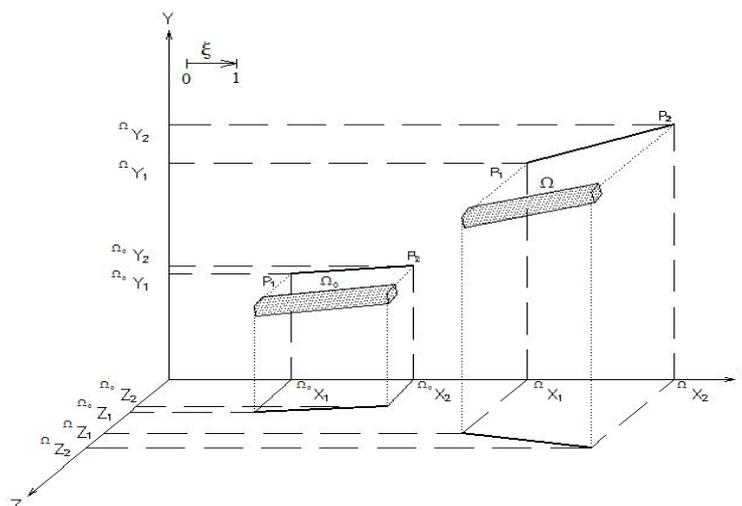


Figura 2 – Elemento de treliça espacial nas configurações inicial ( $\Omega_0$ ) e deformada ( $\Omega$ ).

A cinemática do elemento é linear e depende do parâmetro adimensional  $\xi$ , que varia de 0 (para o nó inicial) a 1 (para o nó final). Considera-se apenas a componente de deformação longitudinal. O comprimento inicial do elemento é dado por  $ds_0$  e que se torna  $ds$  após a deformação. A medida de deformação de engenharia foi utilizada neste projeto, conforme pode ser visto em Greco *et al.* (2006).

$$\varepsilon = \frac{ds/d\xi - ds_0/d\xi}{ds_0/d\xi} \quad (7)$$

Os termos  $ds_0/d\xi$  e  $ds/d\xi$  são as taxas de alongamento nas posições inicial e deformada, calculadas em função do parâmetro adimensional.

$$\frac{ds_0}{d\xi} = \left( \sqrt{\left(\frac{dx}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\xi}\right)^2} \right)_0 = \left( \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2 + (Z_2 - Z_1)^2} \right)_0 = l_0 \quad (8)$$

$$\frac{ds}{d\xi} = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\xi}\right)^2} = \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2 + (Z_2 - Z_1)^2} = l \quad (9)$$

Para considerar a deformação inicial nos elementos ( $\varepsilon_0$ ), utiliza-se um termo adicional relacionado com a variação de comprimento ( $l_D$ ) na medida de deformação, da mesma maneira que foi utilizada em Greco e Ferreira (2009) para a medida de deformação logarítmica.

$$\varepsilon = \frac{ds/d\xi - ds_0/d\xi + ds_D/d\xi}{ds_0/d\xi} \quad (10)$$

$$\frac{ds_D}{d\xi} = l_D = \varepsilon_0 l_0 \quad (11)$$

As Equações (10) e (11) são importantes para aplicação em estruturas estaiadas e tensegrities, conforme pode ser visto em von Krüger *et al* (2008). Pode-se reescrever a equação da energia de deformação em função do parâmetro adimensional.

$$U = \int_V \frac{1}{2} E \varepsilon^2 dV = l_0 \int_0^1 \frac{EA}{2} \varepsilon^2 d\xi = l_0 \int_0^1 u d\xi \quad (12)$$

A integração da Equação (12) ao longo dos elementos finitos fornece a solução exata do problema. É interessante reescrever o funcional de energia em função das posições nodais (incógnitas) do problema.

$$\Pi = l_0 \int_0^1 u_i d\xi - F_{X1} X_1 - F_{Y1} Y_1 - F_{Z1} Z_1 - F_{X2} X_2 - F_{Y2} Y_2 - F_{Z2} Z_2 \quad (13)$$

A derivada do funcional de energia fornece a equação de equilíbrio do problema. Como não há singularidade nas integrais é possível expressar o gradiente em função das incógnitas.

$$\frac{\partial \Pi}{\partial X_i} = l_0 \int_0^1 \frac{\partial u_i}{\partial X_i} d\xi - F_i = 0 \quad (14)$$

O índice  $i$  é livre e varia conforme a regra:  $(1,2,3,4,5,6)=(X1,Y1,Z1, X2,Y2,Z2)$ .

O sistema de equações obtido a partir da Equação (14), válido para apenas um elemento, é não linear em termos das posições nodais e pode ser representado de maneira implícita, conforme apresentado na Equação (15).

$$g(\mathbf{X}) = f - F = 0 \quad (15)$$

Para o sistema de Equações (15) representar toda estrutura é necessário levar em consideração as contribuições de todos os elementos finitos. Uma forma adequada de solucionar um problema não linear é linearizar a equação e aplicar um algoritmo de correção iterativo, com o uso de um critério de convergência apropriado.

$$g(\mathbf{X}) = 0 = g(\mathbf{X}_0) + \nabla g(\mathbf{X}_0) \Delta \mathbf{X} \quad (16)$$

$$\Delta \mathbf{X} = -[\nabla g(\mathbf{X}_0)]^{-1} g(\mathbf{X}_0) \quad (17)$$

A matriz Hessiana  $\nabla g(\mathbf{X}_0)$  é simétrica.

$$\nabla g(\mathbf{X}_0) = g_{i,k}(\mathbf{X}_0) = f_{i,k}(\mathbf{X}_0) - F_{i,\ell} \quad (18)$$

Considerando-se  $i=1,6$ ;  $k=1,6$  para os deslocamentos paramétricos e  $l=7,12$  para as forças externas, obtém-se uma expressão compacta para Equação (18).

$$\nabla g(X_0) = l_0 \int_0^1 j_{t,ik} d\xi \Big|_{X_0} - \delta_{i\ell} \quad (19)$$

Com o intuito de resolver o sistema, Equação (16), é necessário calcular as forças nodais no início do intervalo em que ocorrem as iterações. É oportuno destacar que o algoritmo desenvolvido não é necessariamente incremental, o valor das forças externas  $F_i$  é o total acumulado até o intervalo de análise. Através da aplicação de intervalos de força é possível acompanhar a evolução da estrutura, mas a consideração de incrementos não é obrigatória, a menos que a distância entre as posições inicial e final seja muito grande.

$$g(X_0) = l_0 \int_0^1 j_{t,i} d\xi \Big|_{X_0} - F_i \quad (20)$$

Os sistemas estruturais estudados foram modelados numericamente com auxílio de programa computacional baseado no método dos elementos finitos, desenvolvido na linguagem de programação FORTRAN, que utiliza formulação não linear geométrica posicional com prescrição de deformação inicial nos cabos.

### 3 RESULTADOS E DISCUSSÕES

As análises dos resultados das simulações realizadas foram baseadas nas modelagens numéricas das formulações não lineares e estáticas apresentadas no tópico acima. Foram projetados e simulados diversos tipos de torres treliçadas estaiadas. Com o intuito de verificar o comportamento mecânico e a estabilidade, variaram-se as topologias das torres, disposição dos elementos, modelos com base quadrada e triangular, posição e o nível de protensão inicial dos estais. O engastamento da base das torres foi feito de duas maneiras, sendo a primeira com os nós da base fixos em todas as direções e a segunda com base rotulada, onde as primeiras barras convergem para um nó central que é travado em todas as direções e ligado por barras de  $2,0\text{cm}^2$ , de área transversal, aos nós da base travados em x e z, como mostra a Figura 3. Os nós superiores da base articulada possibilitam a ocorrência de deslocamentos verticais diferenciais, o que permite simular um mecanismo rotulado.

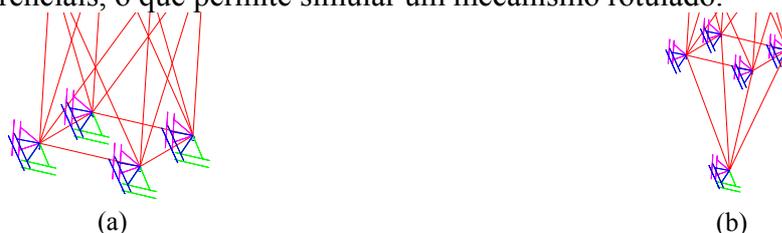


Figura 3 – Condições de contorno das bases nas torres simuladas. (a) base totalmente engastada e (b) base rotulada (articulada).

Foram criados três modelos de simulações de torres com base quadrada e quatro modelos com base triangular, sendo todos de  $100\text{ metros}$  cada e barras com área de seção transversal de  $1,0\text{ cm}^2$  e  $60\text{cm}$  de comprimento. A carga inicial aplicada foi de  $10\text{N}$  nas direções x (positivo) e y (negativo) nos nós das extremidades das torres de todos os modelos, como ilustra a Figura 4.



Figura 4 – Força inicial aplicada em ambas as torres simuladas. (a) base quadrada e (b) base triangular.

Em ambos os tipos de bases das torres variaram-se também o valor da protensão inicial dos estais, foram simuladas também torres sem estais.

As diferenças entre os modelos das estruturas de base quadrada encontram-se na configuração interna das barras, Figura 5.

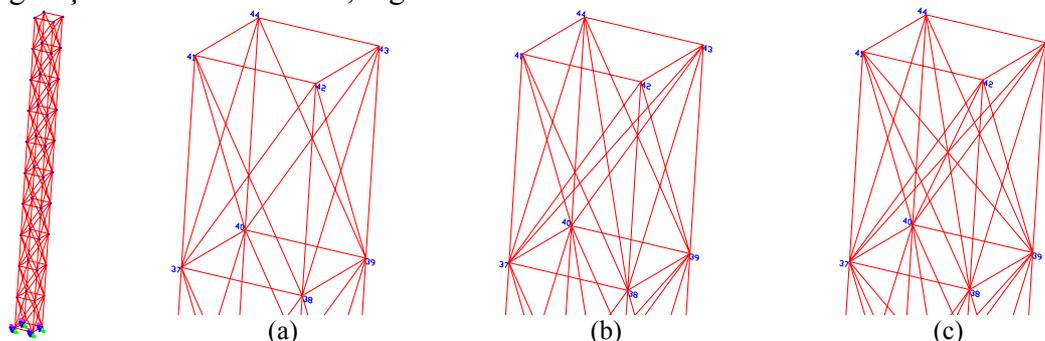


Figura 5 – Modelos utilizados para a simulação de torres de base quadrada. (a) Modelo I- sem travamento interno (b) Modelo II-com duas barras de travamento interno e (c) Modelo III- com quatro barras de travamento interno.

Já as diferenças entre as estruturas de base triangular encontram-se nas ligações diferentes das barras feitas entre os nós nas faces laterais das torres, Figura 6.

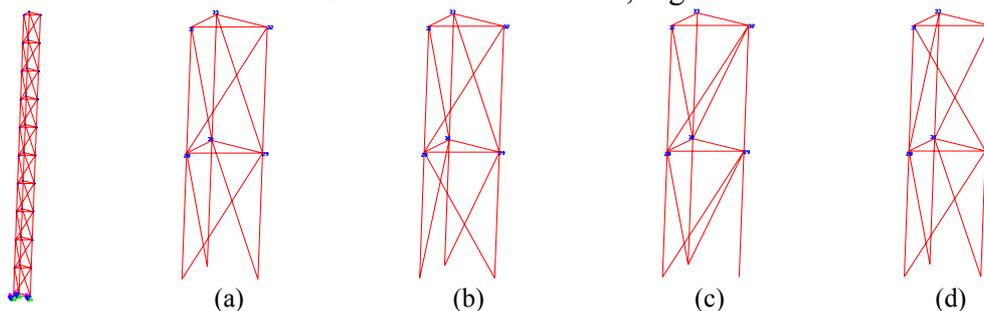


Figura 6 – Modelos utilizados para as simulações das torres de base triangular (a) Modelo I (b) Modelo II (c) Modelo III e (d) Modelo IV.

Para cada modelo de torre estaiada foram simulados três disposições diferentes dos estais, como mostra a Figura 7 para um modelo de torre de base quadrada. Primeiramente foram colocados estais no comprimento médio da estrutura, depois apenas no topo e finalmente no meio e topo das torres. As áreas das seções transversais dos estais foram reduzidas pela metade do valor das barras utilizadas para as torres, isto significa  $0,5\text{cm}^2$ , e foram aplicadas deformações iniciais de  $0.0005$  e em seguida de  $0.0010$ .

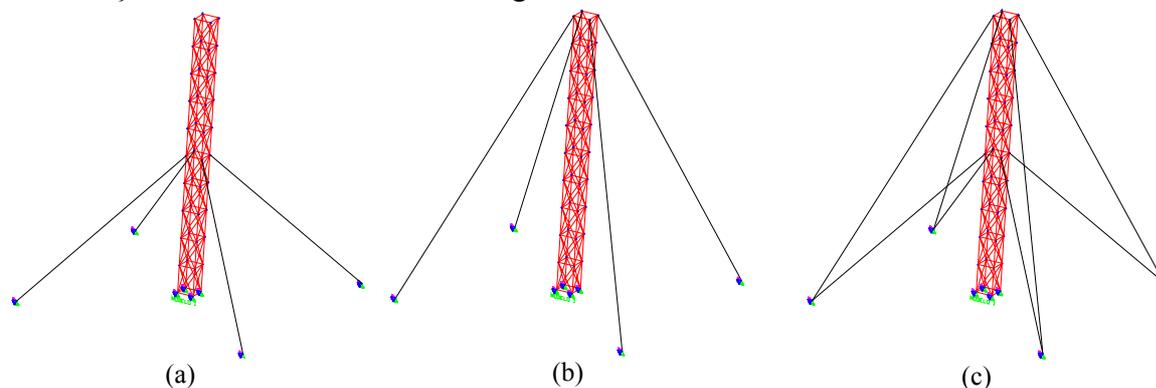


Figura 7 – Modelos utilizados para as simulações das posições diferentes dos estais (a) estais no meio da torre (b) estais no topo e (c) no meio e no topo da torre.

Feita a configuração e análise para cada tipo de torre foi selecionada a mais resistente para serem atribuídas novas quantidades e disposições dos estais ao longo do mastro.

Foi realizado um estudo comparativo com a carga final suportada pela estrutura mais resistente, Modelo I quadrada, entre os dois tipos de base diferentes, como mostra a Tabela 1.

Tabela 1- Carga suportada pelo modelo de torre de base quadrada escolhida com suas diferentes configurações de estais e dois tipos de protensão inicial.

		Carga suportada (N) pelas torres de base quadrada simuladas				
Protensão dos estais	Disposição dos estais	Base engastada	Base rotulada			
0.0005	4 estais no meio	240	240	0.00%	Aumento percentual da carga (base rotulada)/ (base engastada)	
	4 estais no topo	5020	4990	-0.60%		
	8	4210	4220	0.24%		
	16	4420	4430	0.23%		
	20	4850	5720	17.94%		
	40	7040	7440	5.68%		
	60	7370	7630	3.53%		
	80	7490	<b>7680</b>	2.54%		
0.0010	4 estais no meio	220	220	0.00%		
	4 estais no topo	2400	2410	0.42%		
	8	2620	2640	0.76%		
	16	2920	2940	0.68%		
	20	3400	4940	45.29%		
	40	5350	6090	13.83%		
	60	5850	6340	8.38%		
	80	6090	6460	6.08%		
sem estais		120	120	0.00%		

Como já era esperado, as torres com o maior número de barras, no caso 80 barras, resistiram mais às ações aplicadas e assim como modelos de alturas menores apresentados em Araújo e Greco (2010), percebeu-se que o nível de protensão inicial mais adequado para estes tipos de estruturas foi o de 0.0005, pois suportou valores de cargas críticas superiores aos de 0.0010. As torres com base rotulada apresentaram, em termos gerais, melhor desempenho estrutural que as torres com base engastada. Observou-se ainda que sem estais, as torres apresentaram cargas críticas muito baixas, além dos problemas de estabilidade inerentes a este tipo de topologia. A formulação numérica foi suficientemente precisa para realizar as análises sem estais até o nível de carga de 120N aplicados em cada nó de topo.

Uma observação importante é que os valores apresentados na Tabela 1 são por nó, neste caso como foram aplicadas ações nos últimos quatro nós da estrutura, o valor da tabela deve ser multiplicado por 4 para obter-se a carga crítica em que a estrutura poderá trabalhar.

Foi gerado um gráfico, Figura 8, força versus deslocamento para um dos últimos nós da torre de 80 estais, de base engastada, com o intuito de demonstrarmos com maior clareza a curva de comportamento da estrutura. Pode-se observar que em torno de 7490N a torre deixou de apresentar resposta proporcional ao esforço aplicado, característica de comportamento elástico. A figura apresentada é um caso típico de plastificação em engenharia de estruturas.

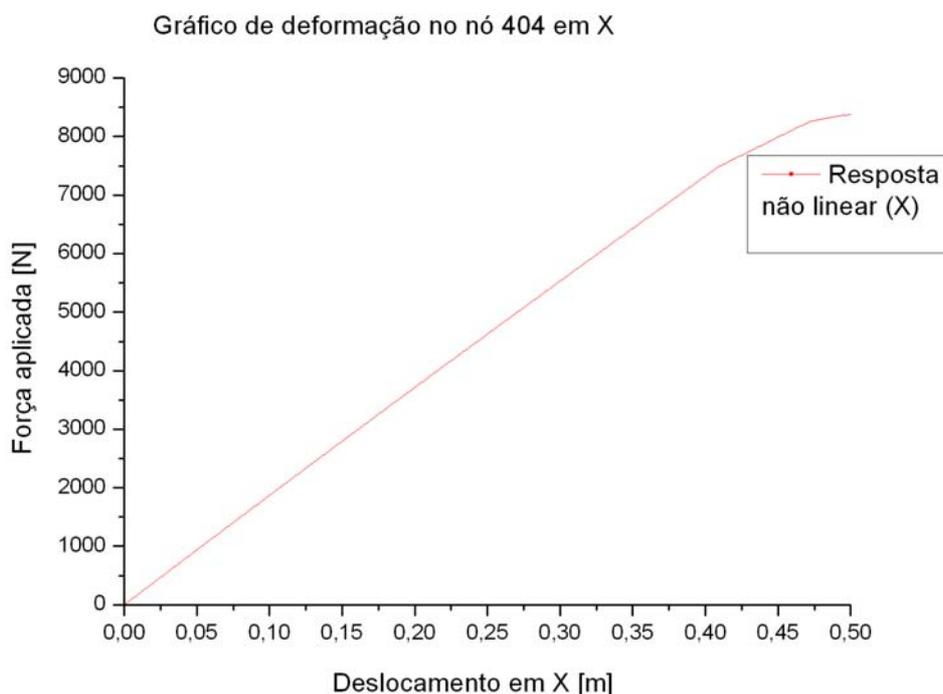


Figura 8- Gráfico de deformação no nó 404 na direção x para a torre de base engastada de 80 estais, análise estática.

Outra verificação que pode ser feita é que os modelos de torres com base rotulada suportaram, em sua maioria, maiores cargas que os de base engastada, como pode ser visto no valor percentual calculado que se encontra nas últimas colunas da Tabela 1. Este ponto deve ser analisado mais profundamente ao se fazer o projeto, pois se conseguiu aumentar a resistência, porém elevando-se o custo com execução e material empregado.

#### 4 CONCLUSÕES

Um dos maiores problemas de análise enfrentados por estas estruturas concentra-se nos estais, que têm a função de garantir a estabilidade das torres, e como foi notado que quanto maior a quantidade, mais resistente será a torre, entretanto; o custo com os materiais empregados conseqüentemente aumentará.

Também deve-se lembrar que quanto maior a torre, maior o envio de sinal, porém maior e mais cara será a área necessária para fazer-se a ancoragem dos estais pois como vimos, deve-se usar alguns critérios que garantem uma maior estabilidade como ângulo entre a torre e as barras, e número de estais por ponto.

O método dos elementos finitos utilizado com a formulação descrita no artigo foi uma ferramenta numérica que propiciou a resolução de problemas contínuos, perante certas aproximações, de maneira que a resposta se aproxime, no limite, da solução continua verdadeira, à medida que se aumente o número de variáveis discretas, como também analisou Guimarrães (2008).

#### AGRADECIMENTOS

Os autores gostariam de agradecer ao CNPq, FAPEMIG e UFMG pelos apoios financeiros concedidos.

**REFERÊNCIAS**

- AMIRI, G. G. Seismic Sensitivity Indicators for Tall Guyed Telecommunication Towers. *Computers & Structures*. v. 80, p. 349-364, 2002.
- ARAÚJO, T. V.; GRECO, M. Análise estática de torres treliçadas estaiadas. *9º Simpósio de Mecânica Computacional. SIMMEC 2010*. São João Del Rei- Minas Gerais. Brasil.
- DESAI, Y.M., POPPLEWELL, N.; SHAH, A.H.; BURAGOHAİN, D.N. Geometric nonlinear static analysis of cable supported structures. *Computers & structures*. v. 29, p. 1001-1009, 1988.
- EKHANDE, S.G.; MADUGULA, M.K.S. Geometric non-linear analysis of three-dimensional guyed towers. *Computers & structures*. v. 29, p. 801-806, 1988.
- GRECO, M.; FERREIRA, I.P. Logarithmic strain measure applied to the nonlinear positional formulation for space truss analysis. *Finite elements in analysis and design*, 2009.
- GRECO, M.; GESUALDO, F.A.R.; VENTURINI, W.S.; CODA, H.B. Nonlinear positional formulation for space truss analysis. *Finite elements in analysis and design*. v. 42, p. 1079-1086, 2006.
- GUIMARÃES, E.H. Análise do comportamento de torres de aço estaiadas sob a ação do vento. Uberlândia. 189p. *Dissertação (Mestrado)* – Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Uberlândia, 2008.
- SCHREFLER, B.A.; ODORIZZI, S.; WOOD, R.D. A total lagrangian geometrically non-linear analysis of combined beam and cable structures. *Computers & structures*. v. 17, p. 115-127, 1983.
- von KRÜGER, P.G.; RODRIGUES, F.C. ; MOREIRA, L.E.; CARRASCO, E.V.M.; GRECO, M. Mechanical behavior of a tensegrity dome. *Mechanics Research Communications*. v. 35, p. 460–465, 2008.