

ANÁLISE PARTICIONADA EM PROBLEMAS DE INTERAÇÃO ESTRUTURA-ESTRUTURA

Rafael S. Bispo e Renato Pavanello

Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica, Departamento de Mecânica Computacional. Rua Mendeleiev, s/n - Cidade Universitária Zeferino Vaz - Barão Geraldo - Caixa Postal 6122 - CEP: 13.083-970 - Campinas - SP - Brasil

Palavras Chave: Análise Particionada, Multiplicadores de Lagrange, Interação Fluido-estrutura.

Resumo. Atualmente, existe uma grande tendência no incremento da produção de energia elétrica através de fontes renováveis, em especial, as fontes de origem eólica. Neste contexto, a geração de energia elétrica produzida através de parques eólicos tem sido bastante adotada. Entretanto, devido a problemas como interferência magnética, impactos ambientais e ruído excessivo das instalações *onshore*, o modelo de usina eólica *offshore* implantado a grandes distâncias da costa aparecem como alternativa competitiva. Em águas profundas (200 a 700 m) a complexidade e alto custo de fundações e suportes do modelo *offshore* conduzem a soluções do tipo turbinas eólicas flutuantes (*Floating Wind Turbine*). Essas turbinas têm estrutura similar as convencionais excetuando a fixação em solo marinho que é realizado através de cabos. O projeto desses equipamentos envolve a modelagem dinâmica acoplada solo-fluido-estrutura que pode ser estudada usando-se a formulação particionada, onde o problema da interação entre os meios é tratado de maneira iterativa. Nesse tipo de técnica, é possível que modelos fisicamente heterogêneo, chamados de partições, possam utilizar diferentes técnicas de discretização, como por exemplo o domínio do fluido ser baseado em uma formulação de Elementos de Contorno e o domínio estrutura baseado em uma formulação em Elementos Finitos. Neste trabalho, juntamente ao tratamento particionado, é realizada uma análise no domínio da frequência é utilizada para obter as frequências características do sistema em análise considerando comportamento harmônico. A discretização do problema é realizada através do Método dos Elementos Finitos (FEM) utilizando estado plano de tensão e elemento quadrilateral de Wilson. Desta forma, a resolução de problemas de interação estrutura-estrutura utilizando a formulação particionada e os multiplicadores de Lagrange é estudada com a finalidade de avaliar a convergência e a viabilidade da técnica para posteriormente ser empregada em problemas de interação fluido-estrutura.

1 INTRODUÇÃO

Segundo dados registrados pela *World Wind Energy Association* (WWEA), a capacidade mundial instalada de geração de energia elétrica através de usinas eólicas aumentou entre os anos de 1997 e 2007, passando de 7.500 MW para 93.800 MW liderados pela Alemanha e Estados Unidos. Com o crescimento acelerado do mercado eólico mundial, países desenvolvidos e emergentes tem demonstrado interesse na introdução da energia eólica em suas matrizes energéticas. Na Dinamarca, a geração de energia eólica representa 20 % da demanda elétrica daquele país, enquanto em Portugal, Espanha e Alemanha a energia eólica representa cerca de 15 %, 14 % e 9% , respectivamente, das matrizes energéticas de cada país. A China, por exemplo, em 2009, adicionou cerca de 13.800 MW a sua capacidade instalada pulando de 5^o colocado de capacidade instalada mundialmente, em 2008, para o 2^o lugar com 16,3 % do total mundial, superado apenas pelos EUA com 22,1 % do total mundial. Entretanto, a produção total de energia eólica mundial corresponde em torno de 2 % da demanda mundial de eletricidade (Prado (2010)).

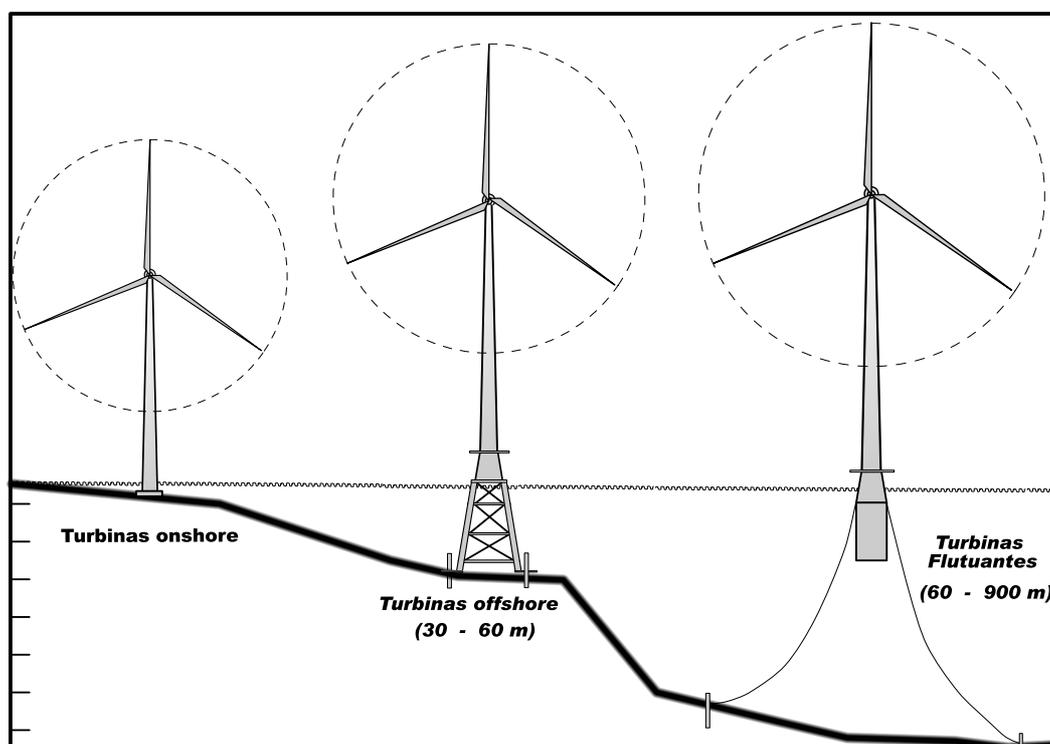


Figura 1: Turbinas eólicas em diferentes faixas de profundidades. Adaptado de Musial et al. (2006)

Como forma de instalação, as usinas são divididas em dois grupos: as *onshore*, onde as torres são instaladas em fazendas, montanhas ou terrenos e as *offshore*, onde as torres são instaladas distantes da costa marítima. A geração de energia elétrica através de usinas *offshore* tem grande potencial como fonte suplementar principalmente em locais próximos a costa marítima onde as usinas *onshore* não são permitidas (Musial et al. (2006)).

Devido a problemas como ruídos, interferência eletromagnética, impactos a flora e fauna provocados pelas turbinas eólicas *onshore*, a adoção de modelos de usinas *offshore* tem sido utilizado em vários países. Como exemplo, na Inglaterra, a usina eólica *Scroby Sands*, abastece

30.000 residências com 30 turbinas eólicas *offshore* de capacidade instalada de geração de energia elétrica de até 60 MW/ano.

Em contrapartida, os parques eólicos *offshore* não devem interferir em áreas onde são desenvolvidas atividades marítimas como pesca, rotas marítimas e recreação. Segundo (Withee (2004)), a melhor solução é utilizar os parques eólicos em profundidades superiores a 50m. Contudo, é comum que os custos de implantação de estruturas *offshore* em águas profundas aumentem devido a maior complexidade das estruturas e das fundações (Butterfield et al. (2005)). Em profundidades acima de 200m, as turbinas eólicas flutuantes podem ser a melhor opção na redução de custos e dos problemas gerados pelas turbinas *onshore*. Neste tipo de estrutura, os suportes são flutuantes promovendo assim um empuxo capaz de equilibrar o peso da turbina conforme figura (1).

O projeto das turbinas eólicas flutuantes depende de uma boa representação do comportamento dinâmico dos diferentes sub-componentes: sistema rotativo, estrutura de sustentação, plataforma de flutuação, meio fluido circundante, cabos de amarração e sistema de fixação no solo.

Os sub-componentes das turbinas eólicas apresentam interação entre meios de características físicas distintas. Nesses problemas, a interação pode ser realizada entre meios diferentes, como no caso da interação entre fluido-estrutura ou de um mesmo meio como em problemas de contato ou choque entre estruturas. Na análise desses problemas, é possível eliminar um ou mais subdomínios para atender a análises específicas e objetivos de projetos ou realizar um tratamento de unicidade onde os campos são analisados simultaneamente chamado de tratamento monolítico (Felippa e Park (2006)). Na aproximação monolítica, as equações de movimento da estrutura e do fluido são resolvidas simultaneamente.

Neste artigo, um método particionado para análise harmônica de sistemas mecânicos estruturais e acoplados estrutura-estrutura é apresentado. O estudo é baseado no trabalho de (Park et al. (2001)) e visa a implementação de uma técnica baseada em Multiplicadores de Lagrange. Apresentam-se resultados da formulação no acoplamento estrutura-estrutura para dois problemas estruturais: primeiramente é modelada um problema de viga biengastada e no segundo caso é modelada uma turbina eólica flutuante. A ampliação dessa técnica para a solução do problema de acoplamento solo-fluido-estrutura será apresentado em trabalhos futuros. A solução deste problema, utilizando técnicas computacionais eficientes ainda é um desafio importante desta área de pesquisa.

2 ANÁLISE PARTICIONADA

Os sistemas mecânicos encontrados na maioria dos problemas de engenharia apresentam interação entre componentes de características físicas diferentes. A análise deste tipo de estrutura, é denominada de análise multi-física, e tem sido amplamente estudada nos últimos anos.

Os sistemas multi-físicos podem ser modelados e solucionados de forma integrada, denominada análise monolítica, ou de forma iterativa, denominada análise particionada.

No que se diz respeito a dificuldades, o processo monolítico apresenta problemas em relação ao mau condicionamento do sistema devido as rigidezes do fluido e da estrutura serem diferentes, isto é, $\frac{E}{\rho_f c^2} \approx 10^5 - 10^7$ sendo E é o módulo de Elasticidade da estrutura, ρ_f é a massa específica do fluido e c a velocidade de propagação do som no fluido. Com essa diferença, a solução da interação, especificamente na interface entre os meios, tem uma maior influencia das características da estrutura do que da combinação dos meios (Park et al. (2001)). Além disso, a análise simultânea gera um sistema não simétrico dificultando a formulação por elementos

finitos e aumentando o tempo de processamento e memória.

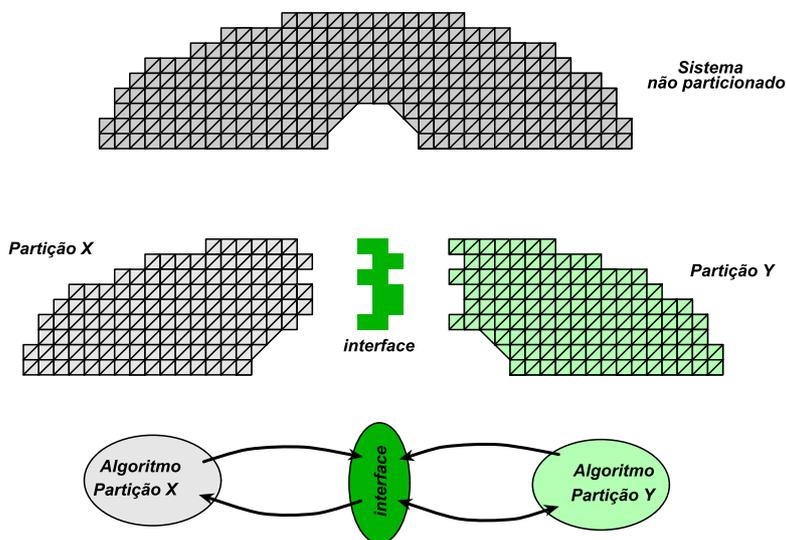


Figura 2: Exemplo do processo particionado

Devido a necessidade de alta fidelidade dos modelos estruturais discretizados através do FEM, em algumas análises são requeridos cerca de cinco milhões graus de liberdade e, em problemas de maior escala, a extrema demanda por recursos computacionais requisitada pelos métodos de resolução direta ocasiona a progressiva adoção de algoritmos iterativos por partes dos softwares comerciais relacionados a área de Elementos Finitos estrutural e análises térmicas. Além disso, o significativo progresso no desenvolvimento de rápidos e robustos algoritmos iterativos para solução de problemas da mecânica dos sólidos e o advento de máquinas de alto processamento em paralelo trazem melhorias aos resultados dos algoritmos iterativos (Mandel et al. (1995)).

Em alternativa ao método monolítico a modelagem de componentes e campos distintos podem ser aproximadas através do processo *Particionado*, onde o problema é reduzido em modelar a interação entre os componentes de forma iterativa conforme figura (2). O termo *particionado* identifica o processo de separação espacial de um modelo discreto mecânico dentro de uma interação entre componentes chamada de *Partições* (ver figura (2)). Nesse tipo de processo, as formulações dos sub-sistemas fisicamente heterogêneos podem utilizar diferentes técnicas de discretização, como por exemplo o domínio do fluido ser baseado em uma formulação de Elementos de Contorno e o domínio estrutura baseado em uma formulação em Elementos Finitos (Park e Felippa (2000)).

Segundo Felippa e Park (2006), as principais vantagens do sistema particionado ao sistema monolítico são:

- *Customização*: Cada campo pode ser tratado por técnicas de discretização e algoritmos de resolução que proporcionem maior eficiência a cada campo;
- *Modelagem independente*: A aproximação particionada facilita o uso de malha não coincidentes na interface;

- *Reuso de software*: Possibilidade de utilização de algoritmos já implementados, inclusive softwares comerciais e livre trabalhando juntos;
- *Flexibilidade*: Caso seja necessário a implementação de um modelo estrutural não-linear, por exemplo, é preciso apenas trocar o algoritmo estrutural sem mexer nos algoritmos dos demais campos.

3 MÉTODO DOS MULTIPLICADORES DE LAGRANGE

Para o sucesso do processo particionado, os nós pertencentes a mais de uma partição devem possuir condições específicas que garantam a continuidade da solução. Neste caso, as condições de compatibilidade cinemáticas entre os domínios pode ser realizada através do Método Clássico dos Multiplicadores de Lagrange - MML (Park e Felippa (2000)).

No MML, o problema é tratado como se todos os corpos fossem inteiramente livres e o trabalho virtual é formulado através da soma das contribuições dos corpos livres em cada corpo individualmente.

A figura (3) ilustra um sistema mecânico particionado. Durante o particionamento, os nós g_1 e g_2 são desacoplados dando origem aos nós 1 e 2 presentes a primeira partição e os nós 3 e 4 pertencentes a segunda partição. Em seguida, é necessário manter as condições de compatibilidade cinemática entre os nós das partições presentes na interface. Essa compatibilidade é alcançada com a inserção de equações de restrições onde os nós das partições são forçados a manter os deslocamento iguais na interface.

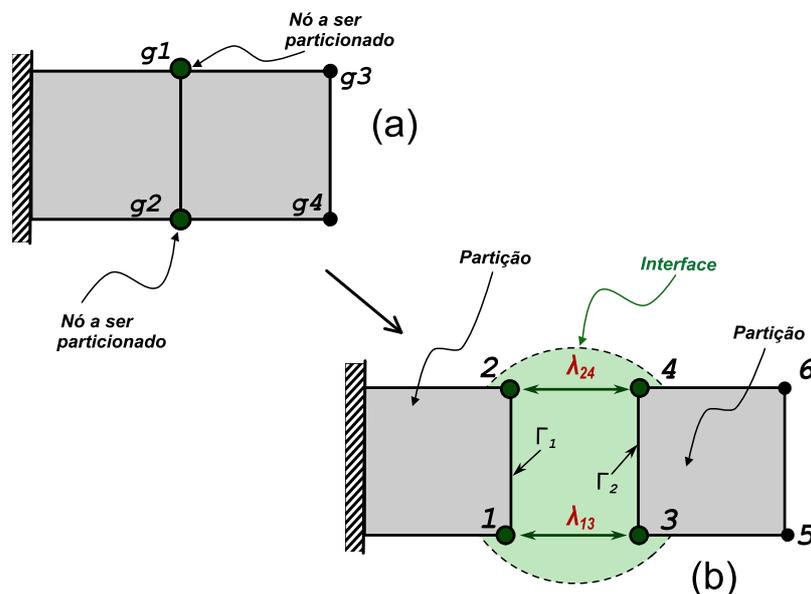


Figura 3: (a) Sistema simples sem partições; (b) Sistema particionado

Pelo MML, as equações de restrição são multiplicadas por um coeficiente indeterminado e adicionado ao trabalho virtual das partições produzindo o trabalho virtual total do sistema. Nessa formulação, o somatório de todas as equações de restrição multiplicadas cada uma por seu respectivo coeficiente são iguais a zero onde, após a eliminação dos coeficientes indeterminados, são promovidas as condições necessárias ao equilíbrio (Park et al. (2000)). Os coeficientes indeterminados, também chamados de Multiplicadores de Lagrange, representam fisicamente a força de reação entre duas partições nos nós presentes na interface.

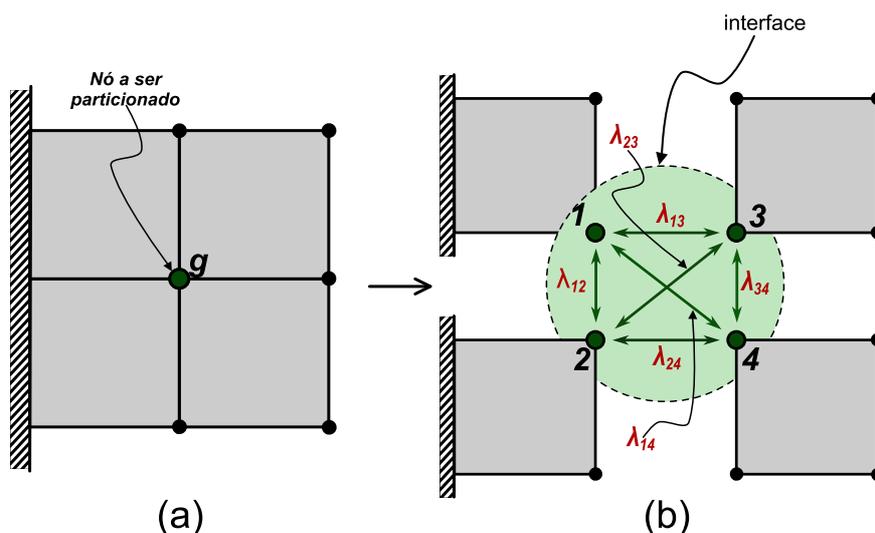


Figura 4: (a) Sistema simples sem partições; (b) Sistema particionado

3.1 Versão Clássica do Método dos Multiplicadores de Lagrange - MML

Considerando o exemplo da figura (3) tem-se um sistema particionado em 2 subdomínios ou partições. Na interface, as equações de restrição que forçam a compatibilidade cinemática dos meios nos contornos Γ_1 e Γ_2 são do tipo

$$u_{\Gamma_1} - u_{\Gamma_2} = 0; \quad u^T = \{ u_1 \quad u_2 \quad u_3 \quad u_4 \quad u_5 \quad u_6 \} \quad (1)$$

e de forma estendida

$$\begin{aligned} c_{13} = u_1 - u_3 = 0 \\ c_{24} = u_2 - u_4 = 0 \end{aligned} \Rightarrow C_{cl}^T u = 0 \quad C_{cl}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

e o funcional das restrições pode ser descrito por

$$\pi_{localizado}(u, \lambda_{ij}) = \lambda_{13}(u_1 - u_3) + \lambda_{24}(u_2 - u_4) \quad (3)$$

Nesse exemplo, as equações de restrição descritas em (2) são únicas, isto é, são linearmente independentes, levando a uma solução única também dos multiplicadores.

Em problemas onde o sistema particionado é composto de um número maior de partições, como no exemplo ilustrado na figura (4), a construção das equações de compatibilidade, através do MML, apresenta dificuldades em manter a unicidade, já que, considerando apenas o nó g , as equações de restrição são do tipo

$$\begin{aligned} c_{12} = u_1 - u_2 = 0, & \quad c_{13} = u_1 - u_3 = 0 \\ c_{14} = u_1 - u_4 = 0, & \quad c_{23} = u_2 - u_3 = 0 \\ c_{24} = u_2 - u_4 = 0, & \quad c_{34} = u_3 - u_4 = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

Como é possível observar em (4), as restrições c_{23} , c_{24} e c_{34} são linearmente dependentes às restrições c_{12} , c_{13} e c_{14} fazendo com que a unicidade da solução seja perdida. Por esse motivo, quando o particionamento utiliza o Método clássico para o tratamento da interface, a escolha

dos multiplicadores, em consequência das equações de compatibilidade cinemática, demonstra-se não ser única, visto que, podem surgir inúmeras combinações que proporcionam ao problema um conjunto de restrições linearmente independentes como ilustrado na figura (5). Para um caso de 10 partições por exemplo, existem um total de 45 possibilidades de restrições onde 9 apenas são linearmente independentes.

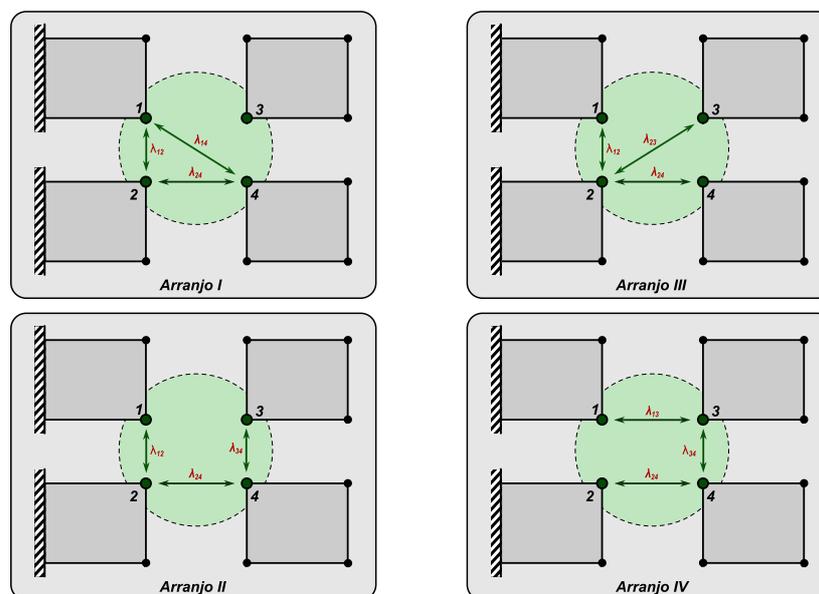


Figura 5: Exemplos de conjuntos de multiplicadores linearmente independentes

Por fim, o MML pode apresentar problemas em relação a transferência de perturbações. No arranjo (II), mostrado na figura (5), a restrição $u_1 - u_3 = 0$ é resultado da combinação linear entre as restrições c_{12} , c_{24} e c_{34} . Devido essa combinação, caso haja alguma perturbação no nó 1, o nó 3 será excitado apenas após a perturbação ser transmitida entre os nós 2 e 4 causando assim um possível atraso na resposta conforme (Park et al. (2000)).

3.2 Versão localizada do método dos multiplicadores de Lagrange - método- λ

Em busca de melhorar a performance do MML no processo de análise particionada, principalmente em problemas com grande números de partições ligadas a único nó, Park e Felippa (2000) e Park et al. (2000) apresentaram uma versão localizada do MML chamada de método- λ . Nessa versão, diferentemente do MML, é incluída uma referência entre os domínios responsável por transferir informações entre as partições formando assim, um conjunto único de equações de restrição linearmente independentes como ilustrado na figura (6).

No método localizado é criado um nó na interface entre os meios e cada partição possui um multiplicador responsável pela transferência de informações de uma partição para outra. Desta forma, as equações de restrição que promovem as condições para a compatibilidade cinemática exclusivas ao nó \mathbf{g} são do tipo

$$\begin{aligned} c_1 &= u_1 - u_g = 0 & c_2 &= u_2 - u_g = 0 \\ c_3 &= u_3 - u_g = 0 & c_4 &= u_4 - u_g = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

Nota-se que o processo de construção das equações descritas em (5) faz com que as restrições sejam exclusivas de cada partição, promovendo assim, unicidade das equações e dos multipli-

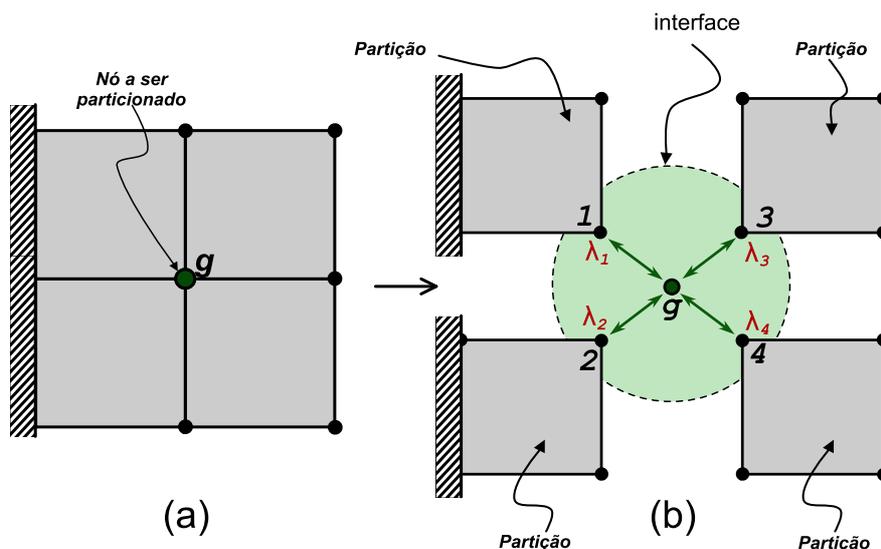


Figura 6: Partição do sistema em dois subdomínios. Interface modelada através do método- λ

cadores e excluindo o processo de escolha de restrições como no método clássico. Além disso, devido aos nós de cada domínio estarem interligados com o nó da interface, uma perturbação em qualquer nó de uma das partições é automaticamente transmitido aos demais diferentemente do processo do método clássico. O processo localizado apresenta uma desvantagem no que se diz respeito aos graus de liberdade necessários à solução. Devido as restrições serem exclusivas a cada partição, cada domínio criado necessita da determinação de um multiplicador de Lagrange diferentemente do método clássico onde duas partições compartilham o mesmo multiplicador. Entretanto, a eliminação do processo de escolha das restrições ativas compensa o aumento dos graus de liberdade a determinar. Em problemas onde as partições excedam 3 é vantajosa a utilização do método localizado (Park et al. (2000)).

Segundo Park et al. (2001), dentre as vantagens da utilização da versão localizada, é a possibilidade de desenvolver uma modelagem do problema que reflita as características físicas de cada subdomínio associado a cada multiplicador. Em sistemas fluido-estrutura, por exemplo, as rigidezes do fluido e da estrutura possuem ordens de grandes diferentes. Essas características intrínsecas de cada domínio pode ser inserida na aproximação dos multiplicadores através de esquema de normalização flexível, modificando o funcional que impõe a compatibilidade cinemática entre as partições da seguinte maneira

$$\pi_{localizado}(u, \lambda_l, u_g) = \bar{\lambda}_{p1} D_1 (u_4 - u_g) + \bar{\lambda}_{p2} D_2 (u_5 - u_g) \quad (6)$$

onde D_1 e D_2 são fatores de flexibilidade na normalização dependentes das características de cada partição ou domínio e, conforme Park et al. (2000), acelera a solução iterativa das equações de movimento dinâmicas.

3.3 Utilização da Análise particionada em problemas singulares

Considerando o exemplo da figura (3), e utilizando o MML, o funcional de energia do sistema consiste na energia das duas partições argumentadas com as condição de restrição na

interface. Desta forma, para o caso estático e quase-estático, tem-se que

$$\Pi(u, \lambda_{cl}) = u^T \left(\frac{1}{2} K u - f \right) + \lambda_{cl}^T C_{cl}^T u, \quad (7)$$

$$u = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{Bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} K_1 & 0 \\ 0 & K_2 \end{bmatrix} \quad \lambda_{cl} = \begin{Bmatrix} \lambda_{13} \\ \lambda_{24} \end{Bmatrix} \quad (8)$$

As restrições na interface podem ser demonstradas como

$$\begin{cases} c_{13} = u_1 - u_3 = 0 \\ c_{24} = u_2 - u_4 = 0 \end{cases} = C_{cl}^T u = 0 \Rightarrow C_{cl}^T = \begin{bmatrix} C_{cl}^{(1)T} & C_{cl}^{(2)T} \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$C_{cl}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (10)$$

onde u é o vetor de deslocamentos nodais das partições, K é a matriz de rigidez do sistema formada pelas matrizes de rigidezes das partições K_1 e K_2 , f é o vetor de carregamento nodais e matriz, λ_{cl} é o vetor que contém os multiplicadores que acoplam as partições e C_{cl} é matriz responsável por mapear as restrições na interface.

Conforme ilustração da figura (3), a partição 1 é completamente fixa no espaço devido ao engaste proporcionando que o vetor de deslocamentos nodais $u^{(1)}$, associado a partição 1, pode ser determinado como sendo

$$u^{(1)} = K_1^{-1} \left(f^{(1)} - C_{cl}^{(1)T} \lambda_{cl}^{(1)} \right) \quad (11)$$

Entretanto, a partição 2 é "flutuante" (livre-livre) e segundo [Park e Felippa \(1998\)](#) $u^{(2)}$ é dado por

$$u^{(2)} = K_2^+ \left(f^{(2)} - C_{cl}^{(2)T} \lambda_{cl}^{(2)} \right) + R^{(2)} \alpha, \quad R^{(2)} = I - K_2^+ K_2 \quad (12)$$

onde K_2^+ é a inversa generalizada de Moore-Penrose de K_2 . Conforme [Stewart e Sum \(1990\)](#) citado em [Park e Felippa \(1998\)](#) a solução de $u^{(2)}$ é alcançada fazendo $\alpha = 0$. Todavia, esta escolha geralmente leva a soluções fisicamente incorretas. Assim, em busca de contornar essas singularidades, o vetor de deslocamento nodal u é decomposto em dois componentes segundo [Park et al. \(2000\)](#)

$$u = d + r, \quad r = R\alpha \quad (13)$$

onde d e r são o deformativo e deslocamentos de corpo-rígido respectivamente. O vetor α define uma amplitude de modo rígido que promove, dentro de um modo deformativo, os nós u_{Γ_1} da partição 1 e u_{Γ_2} da partição 2 presentes na interface coincidam.

Os deslocamentos de corpo-rígido podem ser expressos em termos dos modos de corpo-rígido \mathbf{R} e as amplitudes generalizadas do vetor α :

$$r = R\alpha \quad \text{tal que} \quad KR = 0 \quad (14)$$

$$\alpha = \begin{Bmatrix} \alpha^{(1)} \\ \vdots \\ \alpha^{(N_s)} \end{Bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} R^{(1)} & & & \\ & R^{(2)} & & \\ & & \ddots & \\ & & & R^{(N_s)} \end{bmatrix} \quad (15)$$

onde N_s é o número de partições do problema e R é igual a zero ($K^+K = I$) caso todas as partições estejam restritas como a partição 1 da figura 3, e diferente de zero quando uma das partições for flutuante ($K^+K \neq I$).

A depender do problema, é necessário a inclusão do deformacional na resolução do problema particionado.

4 PROBLEMA PRELIMINAR

Neste trabalho, a formulação particionada é estudada através de um modelo estrutura-estrutura, onde as partições possuem as mesmas características físicas. O intuito é o de analisar parâmetros como adequação dos multiplicadores, viabilidade e convergência do método. Para isso, é proposto preliminarmente como modelo físico uma viga biengastada com Módulo de Elasticidade E igual a $2,1e11 \text{ N/m}^2$, massa específica ρ igual a 7800 kg/m^3 e coeficiente de Poisson ν igual a $0,3$. A estrutura é discretizada através do Método dos Elementos Finitos considerando o estado plano de tensão e elemento quadrilateral de Wilson (Wilson et al. (1973)). Além disso, a análise particionada é efetuada com duas partições como ilustrado na figura (7).

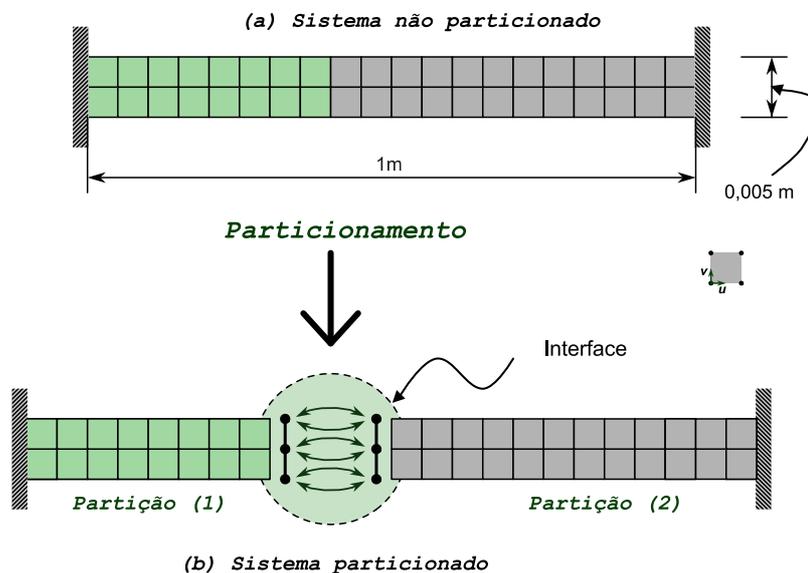


Figura 7: Problema proposto. (a) Viga biengastada; (b) Viga particionada

O método- λ é indicado em problemas com número de partições elevado onde alguns nós são pertencentes a mais de duas partições. Assim, neste trabalho é adotado a formulação clássica do MML. Por fim, é realizada uma análise de resposta no domínio da frequência para o sistema particionado, obtendo-se as curvas típicas de resposta em frequência.

5 MODELO DE TURBINA EÓLICA FLUTUANTE

As torres eólicas *off-shore* ou *on-shore* são composta basicamente de quatro partes: conjunto gerador (rotor, gerador, pás de hélice), torre, suporte e cabos de fixação como ilustrado na figura (8). No caso de turbinas eólicas *off-shore* flutuantes a diferença está na concepção do suporte que se trata de um suporte flutuante.

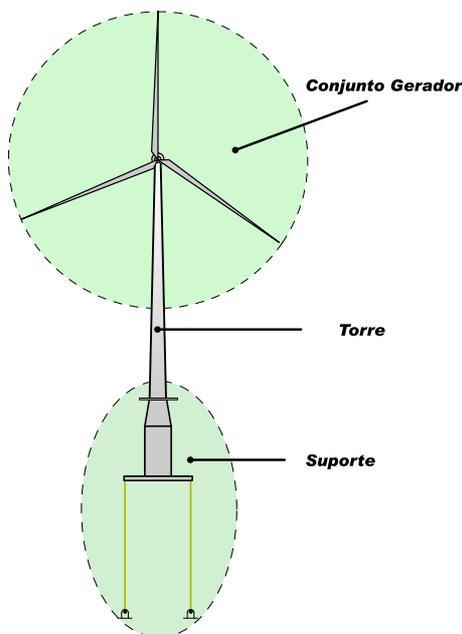


Figura 8: Composição de turbinas eólicas

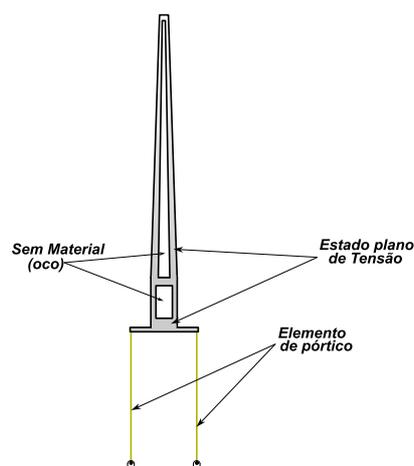


Figura 9: Modelo adaptado na análise particionada

No caráter construtivo, as turbinas eólicas possuem hélices que alcançam diâmetros de 82 m e torre com 65 m acima do nível do mar como a turbina piloto *HyWind* desenvolvida pela empresa Norueguesa *StatoilHydro* em parceria com a *Siemens*. As pás são construídas de fibra de carbono ou vidro enquanto a torre e os suportes são confeccionados de estruturas tubulares e chapas metálicas. A fixação no solo marinho é realizada através de cabos metálicos (Butterfield et al. (2005); Withee (2004)). Neste trabalho, a geometria de turbina eólica flutuante utilizada é baseada no modelo proposto por Withee (2004) como modelo físico do problema em questão. O suporte e os cabos são baseados em plataformas do tipo *Tension Leg* bastante utilizado na indústria petrolífera *offshore* devido a estabilidade apresentada.

Em relação a análise, a discretização do problema é realizada através do FEM e bidimensionalmente como ilustrado na figuras (9) e (10). O suporte e a torre são modelados com a formulação de estado plano de tensão e elementos quadrilaterais de Wilson e os cabos são modelados como elemento de pórtico. Como propriedades mecânicas e geométricas, as três partes da turbina possuem Módulo de Elasticidade E igual a $2,1e11 \text{ N/m}^2$, massa específica ρ igual a 7800 kg/m^3 e coeficiente de Poisson ν igual a 0,3. Os cabos possuem Área de seção transversal A igual a 0.0764 m^2 e Momento de Inércia da seção I igual a $4,6510^{-4} \text{ m}^4$.

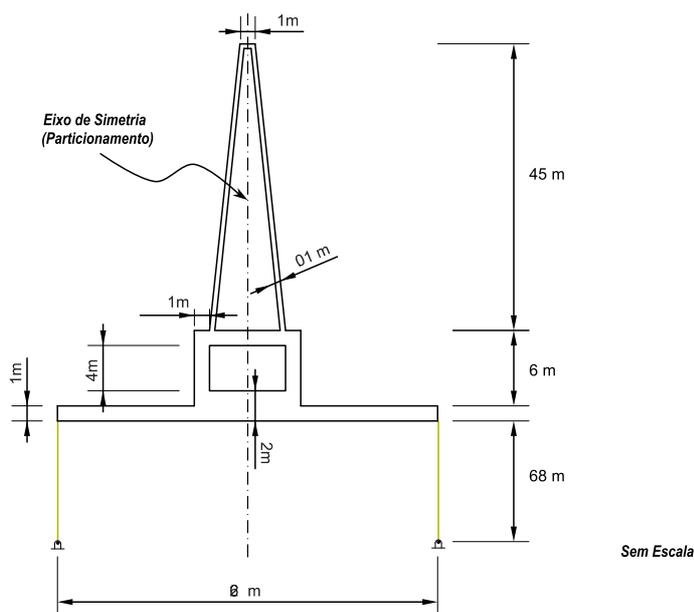


Figura 10: Modelo da turbina eólica flutuante.

5.1 FORMULAÇÃO PARTICIONADA BASEADA NO MÉTODO CLÁSSICO DE LAGRANGE - MML

Segundo Mandel et al. (1995), na modelagem do problemas da figura (7), o funcional de energia consiste na energia das duas partições argumentadas com as condição de restrição na interface. O problema é resolvido através da minimização da energia de deformação do sistema sujeito as condições de continuidade cinemática na interface

$$\text{Minimizar} \quad \varepsilon(u_s) = u_s^T \left(\frac{1}{2} K_s u_s + M_s \ddot{u}_s - f \right) \quad (16)$$

sendo que

$$\text{s.a} \quad C_{cl} u_s = 0 \quad (17)$$

$$u_s = \begin{Bmatrix} u_{s1} \\ u_{s2} \end{Bmatrix}, \quad K_s = \begin{bmatrix} K_{s1} & 0 \\ 0 & K_{s2} \end{bmatrix} \quad M_s = \begin{bmatrix} M_{s1} & 0 \\ 0 & M_{s2} \end{bmatrix} \quad (18)$$

onde u_s é o vetor de deslocamentos nodais da estrutura, K_s é a matriz de rigidez, M_s é a matriz de massa, f é o vetor de carregamento nodais e C_{cl} é matriz responsável por descrever as condições de compatibilidade cinemática na interface. Os índices $s1$ e $s2$ representam as contribuições das partições 1 e 2 respectivamente.

As equações (16) e (17) são equivalentes a um problema de ponto de sela. Utilizando λ_{cl} como multiplicadores de Lagrange associados com as restrições de continuidade, tem-se que o Lagrangeano do problema é dado por

$$L(u_s, \lambda_{cl}) = u_s^T \left(\frac{1}{2} K_s u_s + M_s \ddot{u}_s - f \right) + \lambda_{cl}^T C_{cl}^T u_s \quad (19)$$

Nota-se que para um dado vetor λ_{cl} , o funcional $u_s^T \left(\frac{1}{2} K_s u_s + M_s \ddot{u}_s - f \right) + \lambda_{cl}^T C_{cl}^T u_s$ é convexo. Desta maneira, uma condição necessária e suficiente para um mínimo é que o gradiente

em relação a u_s tende a zero, isto é,

$$K_s u_s + M_s \ddot{u}_s - f + \lambda_{cl}^T C_{cl}^T = 0 \quad (20)$$

Assim, o problema dual pode ser reescrito da seguinte forma

$$\text{Maximizar} \quad u_s^T \left(\frac{1}{2} K_s u_s + M_s \ddot{u}_s - f \right) + \lambda_{cl}^T C_{cl}^T u_s \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \text{s.a} \quad & K_s u_s + M_s \ddot{u}_s - f + \lambda_{cl}^T C_{cl}^T = 0 \\ & \lambda_{cl} \neq 0 \end{aligned} \quad (22)$$

Para o problema de vibrações onde $\ddot{u}_s = -\omega^2 u_s$ e, assumindo que K_s e M_s são matrizes positivo definidas, a solução única de (22) é dada por

$$u_s = (K_s - \omega^2 M_s)^{-1} (f - \lambda_{cl}^T C_{cl}^T) \quad (23)$$

Substituindo (23) em (21) o problema dual resulta em

$$\begin{aligned} \text{Maximizar} \quad & -\frac{1}{2} \lambda^T F \lambda + \lambda^T v - h \\ \text{s.a} \quad & \lambda_{cl} \neq 0 \end{aligned} \quad (24)$$

ou melhor escrevendo

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & - \left(-\frac{1}{2} \lambda^T F \lambda + \lambda^T v - h \right) \\ \text{s.a} \quad & \lambda_{cl} \neq 0 \end{aligned} \quad (25)$$

sendo que

$$\begin{aligned} F &= C_{cl} K_g C_{cl}^T; & v &= C_{cl} K_g f; \\ K_g &= (K_s - \omega^2 M_s)^{-1} & h &= -\frac{1}{2} K_g f^T f \end{aligned} \quad (26)$$

A solução do problema (16) equivale a solução do sistema contínuo não particionado.

5.2 Método do Gradiente Conjugado

Na resolução do problema (25) é utilizado o Método do Gradiente Conjugado (MGC) como algoritmo de resolução. A estrutura do algoritmo tem a seguinte forma

- *Início*: Determinação do λ_0 ;

A partir da escolha do λ_0 é determinada a direção de descida:

- *Cálculo do Gradiente*: $g_0 = (F \lambda_0 - v)$;
- *Determinação da direção de Descida*: $d_0 = -g_0$;

Após o cálculo da direção de descida, é determinado a magnitude do vetor de descida e em seguida a atualização de λ_{k+1} e d_{k+1} através das seguintes expressões:

- *Atualização* λ_{k+1} : $\lambda_{k+1} = \lambda_k + \alpha_k d_k$
 $\alpha_k = \frac{g_k^T d_k}{d_k^T F d_k}$

- **Atualização** d_{k+1} : $d_{k+1} = -g_{k+1} + \beta_k d_k$

$$\beta_k = \frac{g_{k+1}^T F d_k}{d_k^T F d_k}$$

Aplicando o algoritmo do Método do Gradiente Conjugado no problema os multiplicadores são determinados resolvendo assim o problema desacoplado demonstrado em (16).

6 RESULTADOS

Tabela 1: Frequências Naturais, em HZ

N ⁰	Resp. Analítica Blevins (1993)	Malha 20x2	Malha 40x4	Malha 60x6
1	26,668	26,975	26,779	26,731
2	73,512	75,352	74,050	73,778
3	144,112	150,642	145,836	144,905
4	238,225	255,675	242,558	240,134
5	355,866	394,930	365,134	359,843

Realizou-se a análise modal do problema preliminar ilustrado na figura (7) utilizando-se de três malhas distintas para obtenção das frequências naturais do sistema conforme dados demonstrados na tabela 1. A viga biengastada em questão possui comprimento $L = 1m$ e altura $h = 0,005m$.

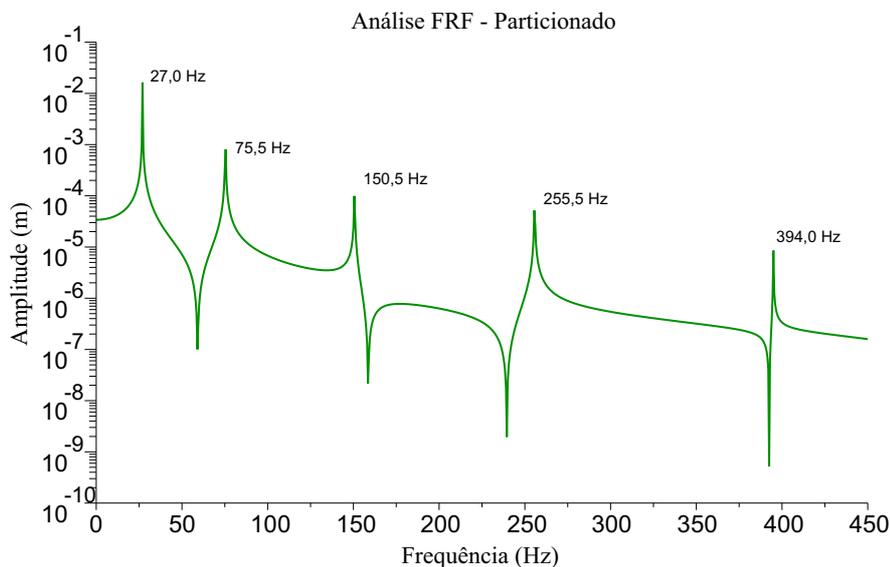


Figura 11: Varredura em frequência (0-450Hz). Malha: 20x2. quad + 2. Passo: 0,5 Hz

Na primeira análise particionada, ilustrada na figura (7), a partição 1 é discretizada com uma malha 8x2 (8 divisões na direção x e 2 divisões na direção y) e a partição 2 uma malha de 12x2 (12 divisões na direção x e 2 divisões na direção y) totalizando 40 elementos. Na interface são utilizados 6 multiplicadores de Lagrange correspondentes a 6 equações de compatibilidade

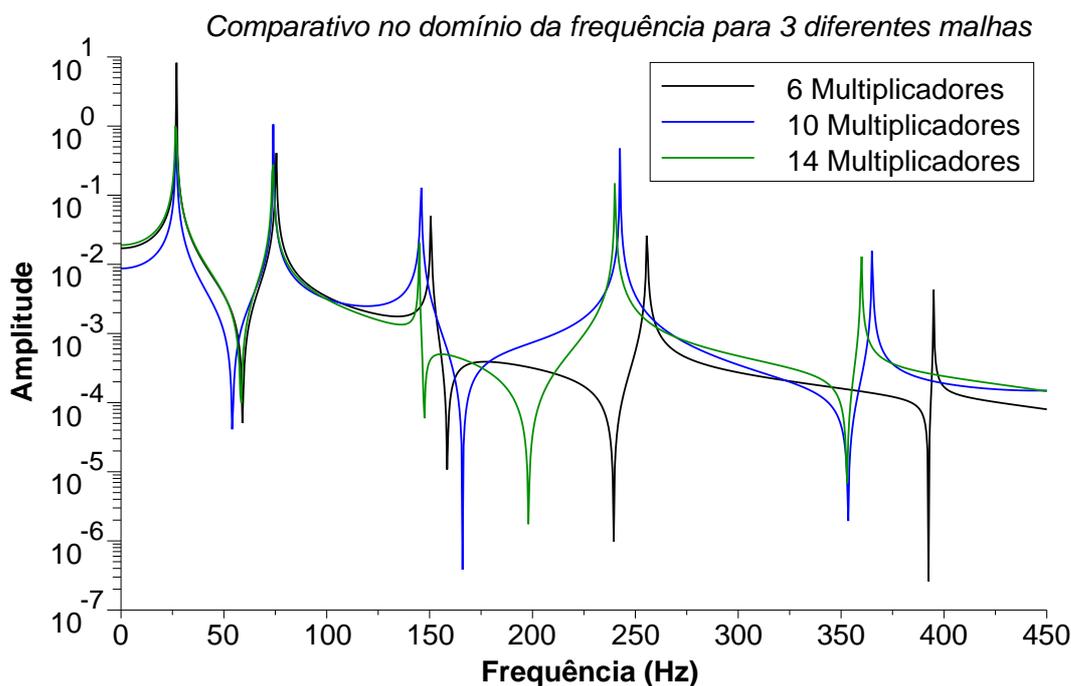


Figura 12: Análise em função da frequência. Comparativo. Passo: 0,5 Hz

de deslocamentos nodais nas direções u e v . Para análise no domínio da frequência, utilizou-se a excitação como sendo uma carga concentrada aplicada na direção y no valor de $-10N$ localizada no nó de coordenadas $x = 0.4m$ e $y = 0.0025m$. Com o passo de $0,5Hz$ para frequência, a análise particionada apresentou excelentes resultados em comparação a análise modal como demonstrado na tabela (1) para a mesma malha (20x2). A curva de resposta em frequência está ilustrada na figura como observado na figura (11). Nesse exemplo, o número de condição espectral de $\sqrt{\left(\frac{K_s}{M_s}\right)}$ é igual a 87,67.

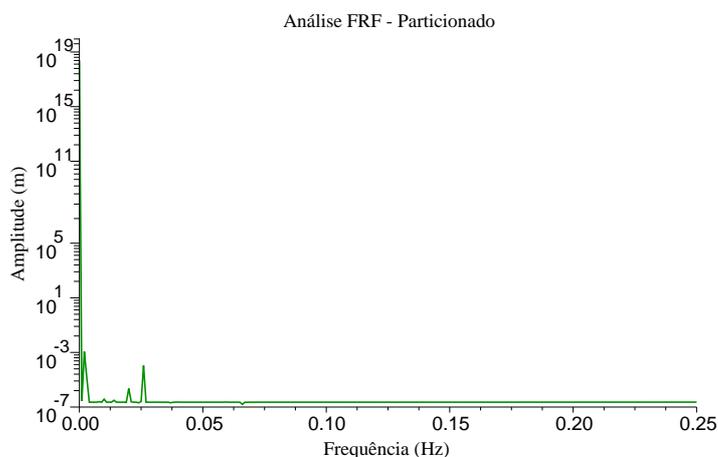


Figura 13: Análise em função da frequência. Comparativo. Passo: 0,001 Hz

Para avaliar os resultados da análise particionada em relação a quantidade dos multiplicadores de Lagrange utilizados na interface, realizou-se 2 análises adicionais com malhas iguais

a 40x4 e 60x6, aumentando assim o número de multiplicadores na interface do problema. Em seguida, comparou-se os resultados da resposta em função da frequência com os dados da primeira análise. Nesse comparativo, o aumento dos multiplicadores não apresentou problemas como ilustrado na figura (12).

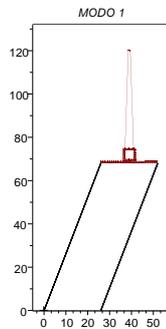


Figura 14: Modo de Vibrar da turbina - 0,0000 Hz

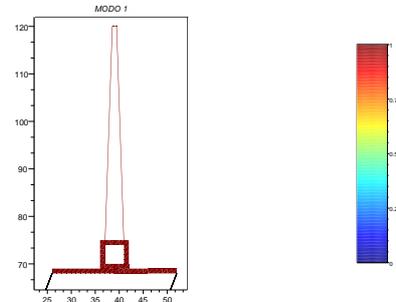


Figura 15: Detalhe da torre e do suporte

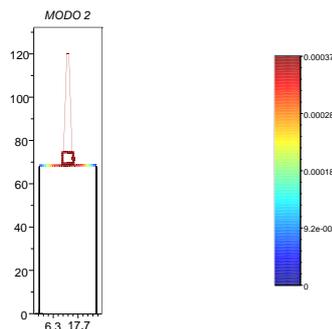


Figura 16: Modo de Vibrar da turbina - 0.1526 Hz

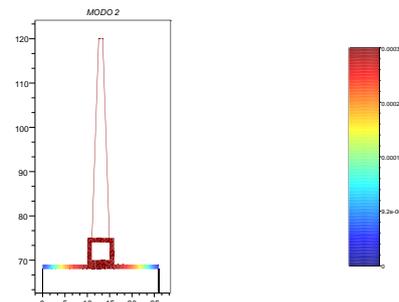


Figura 17: Detalhe da torre e do suporte

A variação das curvas de respostas em frequência demonstra a convergência do resultados, e portanto do método, para as malhas mais refinadas.

Em seguida, realizou-se a análise modal do problema da turbina eólica flutuante considerando as dimensões demonstradas na figura (10). Utilizando-se um elemento de pórtico para a modelagem de cada cabo, elementos quadrilaterais de dimensão 1x1 no suporte e cinco elementos quadrilaterais na discretização da torre. As frequências naturais são: 0.0000 Hz (corpo rígido), 0.1526 Hz, 0.1554 Hz, 0.6992 Hz e 0.7026 Hz. Os modos de Vibrar estão ilustrados nas figuras (13)-(22). Nesse exemplo, o número de condição espectral de $\sqrt{\left(\frac{K_s}{M_s}\right)}$ é igual a 1575679, 24.

As curvas de resposta em função da frequência demonstradas nas figuras (23) e (24) não apresentam resultados equivalentes as frequências encontradas na análise modal. As restrições de deslocamento nas direções u e v aplicadas nos cabos não foi suficiente para evitar a singularidade desse tipo de estrutura, no caso, turbinas eólicas flutuantes. Desta forma, a presença de modos de corpo-rígido promoveu soluções físicas incorretas para o problema particionado da turbina (Park e Felippa (1998)). Portanto, em estruturas de caráter singular, é necessário a utilização do conceito do deformacional proposto por Park et al. (2000).

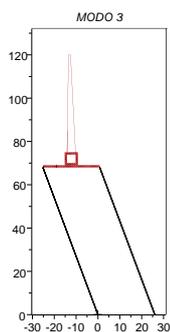


Figura 18: Modo de Vibrar da turbina - 0.1554 Hz

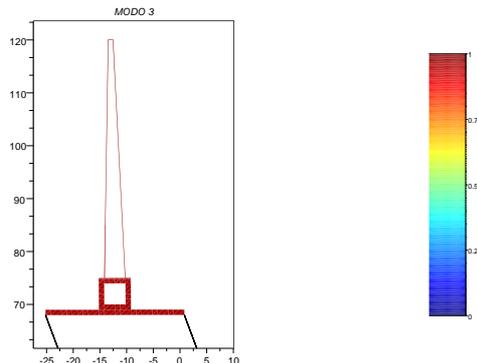


Figura 19: Detalhe da torre e do suporte

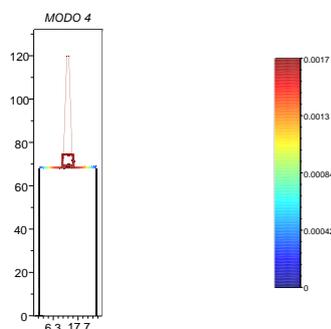


Figura 20: Modo de Vibrar da turbina - 0.6992 Hz

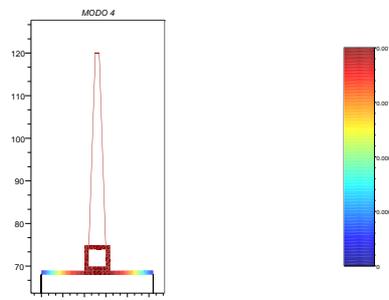


Figura 21: Detalhe da torre e do suporte

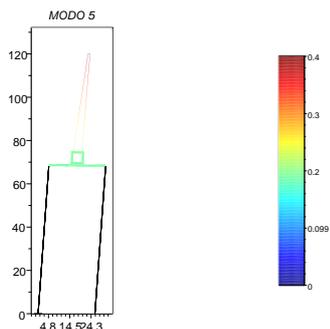


Figura 22: Modo de Vibrar da turbina - 0.7026 Hz

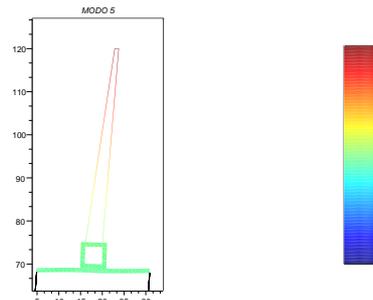


Figura 23: Detalhe da torre e do suporte

7 CONCLUSÃO

A análise de sistemas mecânicos através da formulação particionada apresenta-se como alternativa ao processo monolítico, uma vez que, transforma problemas não simétricos em problemas de simétricos com menor tamanho de graus de liberdade, comparado com a modelagem simultânea, aumentando a fidelidade dos resultados e melhorando a capacidade de processamento através do FEM.

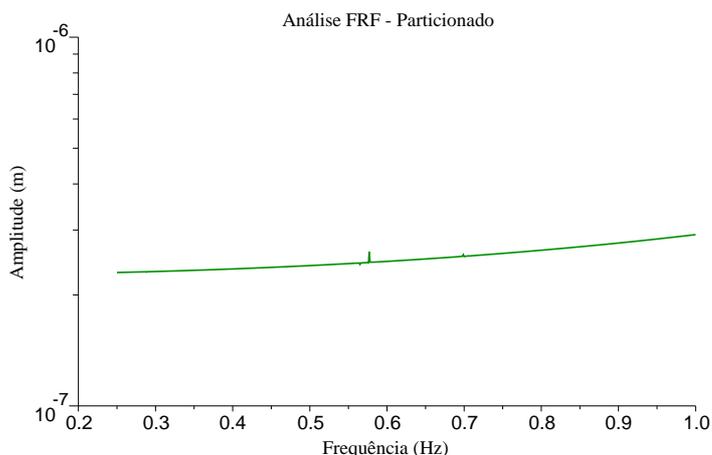


Figura 24: Análise em função da frequência. Comparativo. Passo: 0,001 Hz

Dentre as particularidades do Método particionado, o Método clássico dos Multiplicadores de Lagrange aparece com responsável pelo acoplamento das subestruturas, ou partições, entre si através dos contornos em comum. Em sistemas de maiores graus de liberdade, a versão localizada dos Multiplicadores vem como solução para a eliminação das redundâncias dos multiplicadores gerada no Método clássico.

A análise particionada demonstrou-se estável para as diferentes malhas testadas apresentando resultados coerentes em comparação aos resultados da análise modal previamente realizada. A utilização do Método do Gradiente Conjugado como algoritmo de minimização apresentou-se viável computacionalmente devido a função objetivo ser do tipo quadrática e a implementação do Método ser simples.

Em relação as desvantagens, a análise de varredura em frequência aplicado na análise particionada de estruturas apresenta como dificuldade, a necessidade de inverter a matriz $K_g = (K_s - \omega^2 M_s)^{-1}$ em cada passo de frequência para a obtenção da nova direção de descida no gradiente. Problema esse que pode ser otimizado em trabalhos futuros com uma redução modal do sistema ou uma resolução proposta com decomposição triangular de Gauss, por exemplo.

Em problemas onde o sistema demonstra-se quase singular, as curvas de resposta em função da frequência apresentaram soluções distantes das obtidas através da análise modal devido a presença de modos de corpo-rígido que modificam a solução. Em trabalhos futuros, pretende-se implementar o conceito de deformacional na análise de problemas singulares.

Por fim, a análise particionada apresenta-se com uma ótima alternativa a sistemas com número de graus de liberdade alto principalmente em análise estáticas e transiente onde o termo associado a frequência não está presente eliminando assim a inversão de matrizes a cada passo de frequência como na análise de varredura em frequência. Na interação fluido-estrutura, essa inversão torna-se uma grande barreira para a utilização desse método.

REFERÊNCIAS

- Blevins R.D. *Formulas for Natural Frequency and Mode Shape*. Krieger Pub Co, 1993.
- Butterfield S., Musial W., Jonkman J., Sclavounos P., e Wayman L. Engineering challenges for floating offshore wind turbines. Copenhagen Oshore Wind 32 2005 Conference and Expedition Proceedings,, Danish Wind Energy Association, Copenhagen, Denmark, 2005.
- Felippa C.A. e Park K.C. Partitioned simulation of coupled system: I. tools for methods design.

- Computational Aspects of Structural Acoustic and Vibrations, CISM - Centre International des Sciences Mécaniques, 2006.
- Mandel J., Tezaur R., e Farhat C. An optimal lagrange multiplier based domain decomposition method for plate bending problems. Relatório Técnico, University of Colorado at Denver Denver, CO, USA, 1995.
- Musial W., Butterfield S., e Ram B. Energy from off-shore wind. OTC 18355. Off-shore Technology Conference, Houston, 2006. NREL/CP-500-39450.
- Park K.C. e Felippa C.A. A variational framework for solution method developments in structural mechanics. *Journal of Applied Mechanics*, 65:242–249, 1998.
- Park K.C. e Felippa C.A. A variational principle for the formulation of partitioned structural systems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 47:395–418, 2000.
- Park K.C., Felippa C.A., e Gumaste U.A. A localized version of the method of lagrange multipliers and its applications. *Computational Mechanics*, 24:476–490, 2000.
- Park K.C., Felippa C.A., e Ohayon R. Partitioned formulation of internal fluid-structure interaction problems by localized lagrange multipliers. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190:2989–3007, 2001.
- Prado L. Energia eólica - expande-se rapidamente a capacidade instalada de geração. 2010. Acessado em 25/08/2010.
- Stewart G.W. e Sum J. *Matrix Perturbation Theory (Computer Science and Scientific Computing)*. Academic Press, 1990.
- Wilson E.L., Taylor R.L., Doherty W.P., e Ghaboussi J. *Numerical and Computer Methods in Structural Mechanics*. S. J. Fenves, et al., Academic Press, Inc., N. Y. and London, 1973.
- Withee J.E. *Fully Coupled Dynamic Analysis of a Floating Wind Turbine System*. Ph.d dissertation, Massachusetts Institute of Technology (MIT), Department of Ocean Engineering, MIT, Cambridge, MA, USA, 2004.