

USO DA EQUAÇÃO HIPER-SINGULAR NA ANÁLISE DA INTERAÇÃO SOLO-ESTACA

Alessandra K. da Rosa e João B. Paiva

Departamento de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, Av. Trabalhador São-carlense, 400, São Carlos/SP, Brasil, alessandra.rosa@usp.br, paiva@sc.usp.br, <http://www.set.eesc.usp.br>

Palavras Chave: Interação solo-estaca, Estacas, Método dos Elementos de Contorno, Método dos Elementos Finitos

Resumo: Neste trabalho é apresentada uma nova formulação numérica para a análise da interação estaca-solo, onde as estacas estão sujeitas a cargas horizontais e momentos aplicados no topo da mesma. As estacas são representadas pelo Método dos Elementos Finitos (MEF) e o maciço de solo pelo Método dos Elementos de Contorno (MEC).

Para a análise da interação estaca-solo é utilizada também a derivada da equação integral do deslocamento no solo no nó correspondente ao topo da estaca, a fim de compatibilizar o giro da estaca com o respectivo do solo.

Um sistema de equações em deslocamentos é obtido para a estaca a partir do MEF. Para o maciço de solo, considerado um meio contínuo, elástico-linear, semi-infinito, isótropo e homogêneo, utiliza-se a solução fundamental de MINDLIN, resultando em um sistema de equações em deslocamentos do solo.

A combinação MEF/MEC se faz compatibilizando os deslocamentos e as forças de interação obtendo-se um sistema de equações nos deslocamentos nodais. São apresentados resultados numéricos que mostram o bom comportamento da formulação.

1. INTRODUÇÃO

A interação solo-estrutura é atualmente um dos problemas que tem recebido especial atenção de pesquisadores nos mais diversos centros de pesquisa, principalmente por suas aplicações de caráter prático.

As estacas de um sistema de fundação além das cargas verticais são freqüentemente submetidas a altas forças horizontais, como por exemplo, em estacas-pranchas, de fundações de pontes, de edifícios altos, de estruturas "off-shore", de torres de transmissão de energia, de muros de arrimo entre outras. Forças essas que podem ser causadas pelo vento, ondas marítimas, empuxo de terra e, em alguns casos, atuam simultaneamente, como nos pilares de pontes que são solicitados pela ação do vento, pelo fluxo da água e pela frenagem dos veículos sobre o tabuleiro.

A estaca tem a função de suportar carregamentos como:

- Elemento ativo, quando as cargas são provenientes de ações que agem sobre a estrutura chegando à fundação através da ligação superestrutura-fundação (esforços solicitantes na seção de ligação);
- Elemento passivo, quando as cargas são aplicadas sobre o maciço de solos ou quando são transmitidas através do maciço de solos (sobrecargas verticais, sismo ou estacas de reforço de taludes).

Portanto são muitos os problemas que necessitam do cálculo de estacas submetidas a esforços horizontais e verticais.

Com relação ao estudo da interação solo-estrutura em que o maciço de solos é representado por um meio contínuo tridimensional, vários autores apresentaram trabalhos, tais como CHEUNG & NAG (1968); CHAKRATORTY & GOSH (1975); POULOS (1980); FATEMI-ARDAKANI (1987); ZAMAN et al. (1988); HEMSLEY (1990-a,b); MESSAFER & COATES (1990); PAIVA (1993); FERRO (1993); CALDERÓN (1996); MENDONÇA (1997).

Com relação à interação solo-estaca, em POULOS & DAVIS (1980) é apresentada uma formulação do Método dos Elementos de Contorno para este estudo onde a estaca é dividida em vários elementos de contorno e as tensões na interface estaca-solo são supostas uniformemente distribuídas nestes elementos. Nesta formulação são escritas as equações integrais para cada nó desses elementos e a estaca propriamente dita é analisada usando a teoria de vigas e sua equação diferencial é representada por diferenças finitas. A partir da compatibilização dos deslocamentos nos nós da estaca e do equilíbrio de forças na interface solo-estaca, é escrito um sistema de equações cujas incógnitas são tensões ao longo da estaca. Após a resolução deste sistema os deslocamentos na interface estaca-solo são facilmente obtidos.

Esta formulação foi posteriormente estendida para permitir uma análise simplificada de grupos de estacas. Inicialmente foi feito um estudo paramétrico da interação entre duas estacas e o solo e, a partir dos resultados obtidos, o método foi aplicado ao estudo de grupos de estacas, considerando a superposição elástica da influência de todos os elementos do grupo tomados dois a dois. Nesta formulação, cada problema é tratado de forma diferente, com uma variante da formulação específica para ele. Assim tem-se uma formulação para estaca articulada no bloco (sem momento aplicado no topo da estaca), uma formulação para estaca engastada no bloco e uma formulação para estacas com cargas verticais. Embora esta formulação apresente as limitações acima mencionadas, ela é sempre muito utilizada, a partir

dos ábacos disponíveis por [POULOS & DAVIS \(1980\)](#) e assim os resultados são sempre limitados pelas aproximações adotadas.

Neste trabalho apresenta-se uma formulação alternativa da formulação do Método dos Elementos de Contorno (MEC) para a análise da interação estaca-solo, onde a estaca é um elemento finito composto de 4 nós e 5 parâmetros nodais (de deslocamentos e rotação). As estacas são modeladas pelo Método dos Elementos Finitos (MEF) e o maciço de solos foi representado pelo MEC utilizando também a equação hiper-singular do deslocamento, sendo que os coeficientes de influência do solo foram obtidos através das soluções fundamentais de [MINDLIN \(1936\)](#).

2. SISTEMA DE EQUAÇÕES PARA O SOLO

A representação integral desse problema incorpora a solução fundamental de [MINDLIN \(1936\)](#), empregada para domínios semi-infinitos homogêneos, elástico-lineares. Para o caso em que as forças de volume são desprezadas, o deslocamento de um ponto qualquer e sua derivada podem ser escritos como:

$$u_1 = \int_{\Gamma} u_{11}^*(s, q) p_1(q) d\Gamma(q) \quad (1)$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_3(s)} = \int_{\Gamma} \frac{\partial u_{11}^*(s, q)}{\partial x_3(s)} p_1(q) d\Gamma(q) \quad (2)$$

onde: $u_{11}^*(s, q)$ é a componente do tensor de deslocamento devido a uma carga unitária aplicada no ponto “s” na direção x_1 e com resposta no ponto “q” na direção x_1 ; e p_1 é a força de interação na direção x_1 .

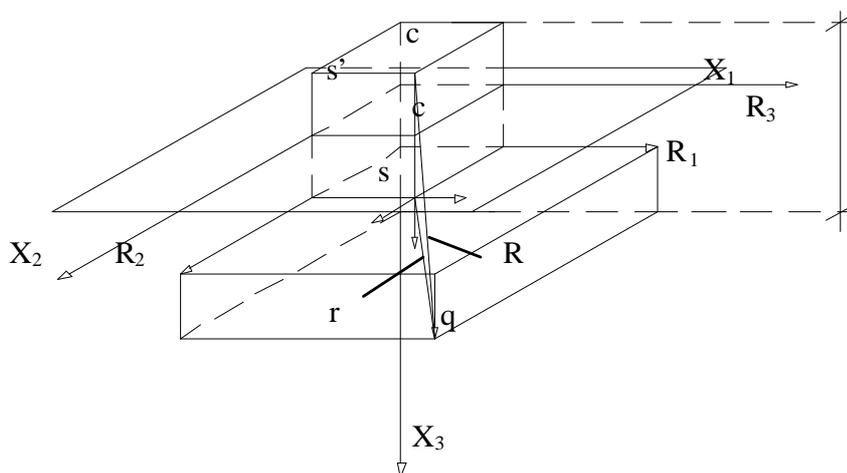


Figura 1: Esquema adaptado por [NAKAGUMA \(1979\)](#) – Problema de Mindlin.

A componente do tensor de deslocamento e sua respectiva derivada possuem as seguintes formas:

$$u_{11}^* = kd \left\{ \frac{3-4\nu}{r} + \frac{1}{R} + \frac{r_1^2}{r^3} + \frac{(3-4\nu)r_1^2}{R^3} + \frac{2CZ}{R^3} \left(1 - \frac{3r_1^2}{R^2} \right) + \frac{4(1-\nu)(1-2\nu)}{R+R_3} \left[1 - \frac{r_1^2}{R(R+R_3)} \right] \right\} \quad (3)$$

$$\frac{\partial u_{11}^*(s, q)}{\partial x_3(s)} = kd \left\{ \frac{(3-4\nu)r_3}{r^3} - \frac{R_3}{R^3} + \frac{3r_1^2 r_3}{r^5} - \frac{3(3-4\nu)r_1^2 R_3}{R^5} + \frac{2Z}{R^5} (r + CZ - 3C^2) - \frac{6Zr_1^2}{R^7} (r - CZ - 5C^2) + \right. \\ \left. - \frac{4(1-\nu)(1-2\nu)}{(R+R_3)^2 R^3} \left[(R+R_3)r_0 + R_3^3 + RR_3^2 - (2R+R_3)r_1^2 \right] \right\} \quad (4)$$

onde:

$$kd = \frac{1+\nu}{8\pi \cdot E(1-\nu)} \quad (5)$$

$$r = (r_i \ r_i)^{1/2} \quad (6)$$

$$R = (R_i \ R_i)^{1/2} \quad (7)$$

$$r_i = x_i(q) - x_i(s) \quad (8)$$

$$R_i = x_i(q) - x_i(s') \quad (9)$$

$$C = x_3(s) = L > 0 \quad (10)$$

$$Z = x_3(q) = L > 0 \quad (11)$$

r_0 = raio da estaca.

Admite-se que as forças de interação têm variação dada por uma equação do 4º grau no domínio dos elementos de contorno, de tal maneira que suas funções de forma podem ser escritas como:

$$\{\bar{\phi}\} = \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \\ \phi_5 \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{Bmatrix} -24,75\xi^4 + 45\xi^3 - 21,25\xi^2 + 1 \\ -4,5z \cdot \xi^3 + 9z \cdot \xi^2 - 5,5z \cdot \xi + z \\ 40,5\xi^4 - 67,5\xi^3 + 27 \cdot \xi^2 \\ -20,25\xi^4 + 27\xi^3 - 6,75\xi^2 \\ 4,5\xi^4 - 4,5\xi^3 + \xi^2 \end{Bmatrix}}_{\text{funções de forma}} \quad (12)$$

sabendo-se que:

$$\xi = \frac{z}{L} \quad (13)$$

onde: ξ é a cota adimensional; z é a cota do ponto em questão; e L o comprimento total da estaca.

Com esta aproximação, as Eq. (1) e (2) podem ser escritas da seguinte forma:

$$\{u\} = \sum_{e=1}^{Ne} \left[\int [U^*] \{\bar{\phi}\}^T d\Gamma \right] \{p\} \quad (14)$$

onde: $\{u\}$ é o vetor de deslocamentos e rotação dos pontos de colocação; $[U^*]$ é a matriz de soluções fundamentais de Mindlin; $\{\bar{\phi}\}^T$ é o vetor de funções interpoladoras para as forças de interação; $\{p\}$ é o vetor de forças da interface estaca-solo; e N_e é o número de linhas de carga ou de estacas.

Escrevendo a Eq. (14) para o deslocamento e giro do primeiro nó da estaca e deslocamentos dos demais nós, e efetuando o cálculo das integrais e derivada indicadas, obtém-se a representação algébrica do maciço de solos, também chamada de equação geral de deslocamentos do solo, dada por:

$$\{u_s\} = [H]\{p_s\} \quad (15)$$

onde: $\{u_s\}$ é o vetor de deslocamentos no solo; $[H]$ é a matriz com os coeficientes de influência do solo; e $\{p_s\}$ é o vetor das forças de interação que ocorrem no solo. Assim, sendo:

$$\{u_s\}^T = \{u_i \quad u_i' \quad u_j \quad u_k \quad u_l\} \quad (16)$$

3. SISTEMA DE EQUAÇÕES PARA A ESTACA

A estaca é analisada pelo MEF, utilizando um elemento com 4 nós e 5 parâmetros nodais como mostra a Figura 2:

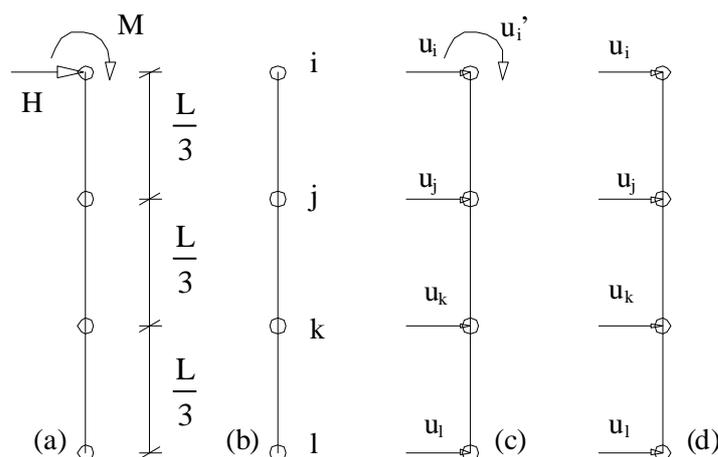


Figura 2: Discretização do Problema; a) Forças no topo da estaca; b) Pontos nodais; c) Parâmetros nodais na estaca; d) Parâmetros nodais no solo.

O polinômio aproximador de deslocamentos será de 4º grau:

$$u_{ap}(z) = Az^4 + Bz^3 + Cz^2 + Dz + E \quad (17)$$

E para as rotações:

$$u'_{ap}(z) = 4Az^3 + 3Bz^2 + 2Cz + D \quad (18)$$

Como as forças de interação também são aproximadas por um polinômio de 4º grau, essas forças são modeladas da seguinte forma:

$$p_{ap}(z) = Az^4 + Bz^3 + Cz^2 + Dz + E \quad (19)$$

Pelo método da energia potencial total, o funcional da estaca, com a contribuição do carregamento externo e da reação das forças da interface estaca-solo, pode ser escrito como:

$$\Pi_{ap} = \frac{E_p I_p}{2} \int_0^L u_1''(z)^2 dz + \int_0^L p_1(z) u_1(z) dz - H u_1 - M u_1' \quad (20)$$

Minimizando o funcional de energia potencial total, ou seja, derivando-se a Eq. (20) em função dos parâmetros nodais e igualando-se a zero, obtém-se, matricialmente, o seguinte sistema de equações:

$$[G]\{u_p\} = \{F\} + [Q]\{p_p\} \quad (21)$$

onde: $[G]$ é a matriz com os coeficientes de elementos finitos; $\{u_p\}$ é o vetor de deslocamentos na estaca; $\{F\}$ é o vetor de forças nodais externas; $[Q]$ é a matriz de transformação das forças de interação em forças nodais equivalentes; e $\{p_p\}$ é o vetor das forças da interface estaca-solo.

4. ACOPLAMENTO MEC/MDF

Com as deduções anteriores, pode ser feita agora a interação MEC/MEF.

Da equação geral de deslocamentos do MEC, Eq. (15), tem-se que a equação do solo é:

$$\{u_s\} = [H]\{p_s\} \quad (22)$$

onde os seus vetores e matrizes já foram determinados anteriormente.

Sabe-se também que a equação da estaca do MEF é a seguinte:

$$[G]\{u_p\} = \{F\} + [Q]\{p_p\} \quad (23)$$

onde os seus vetores e matrizes também já foram determinados anteriormente.

Colocando a equação do solo em função das forças de interação, obtém-se:

$$\{p_s\} = [H]^{-1}\{u_s\} \quad (24)$$

Levando-se em consideração as condições de compatibilidade de deslocamentos e de equilíbrio ao longo da interface estaca-meio contínuo, isto é:

$$\{u_s\} = \{u_p\} \quad (25)$$

e

$$\{p_s\} + \{p_p\} = 0 \quad (26)$$

Da compatibilidade de deslocamentos, tem-se agora que:

$$\{u_s\} = \{u_p\} = \{u\} \quad (27)$$

Pode-se substituir a Eq. (24) na Eq. (23), ou seja:

$$[G]\{u\} = \{F\} - [Q][H]^{-1}\{u\} \quad (28)$$

onde:

$$[Q][H]^{-1} = [M] \quad (29)$$

O vetor de deslocamentos é representado por:

$$\{u\} = \{u_i \quad u_i' \quad u_j \quad u_k \quad u_l\} \quad (30)$$

Portanto:

$$[[G] + [M]]\{u\} = \{F\} \quad (31)$$

Finalizando:

$$[K]\{u\} = \{F\} \quad (32)$$

onde: $[K]$ é a matriz final do sistema de interação (MEC/MEF); $\{u\}$ é o vetor que engloba todos os deslocamentos considerados no sistema, inclusive as rotações; e $\{F\}$ é o vetor de cargas externas aplicadas no topo da estaca (forças horizontais e momentos).

5. AVALIAÇÃO NUMÉRICA

Do conhecimento dos autores deste trabalho, o único resultado de análise numérica de uma estaca submetida a um momento aplicado em seu topo é o apresentado por [VALLABHAN & SIVAKUMAR \(1986\)](#). O exemplo em questão é o de uma estaca de 6,096 m de comprimento, com diâmetro igual a 0,6096 m e submetida a um momento em torno do eixo X_2 de -95,826 kN.m. O módulo de Young da estaca é admitido como sendo 21111000 kN/m² e a relação entre os módulos do solo e da estaca igual a 100 ($k = E_{\text{estaca}}/E_{\text{solo}}$). O coeficiente de Poisson do solo é igual a 0,2.

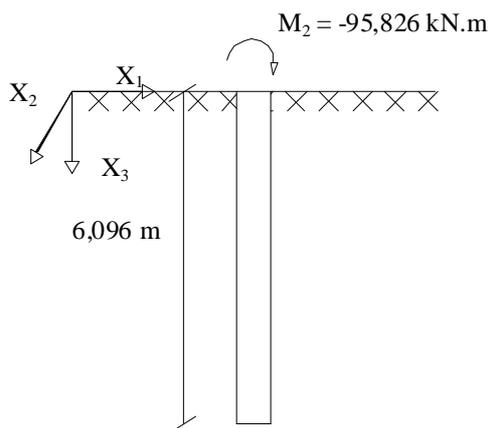


Figura 3: Figura adaptada de [FERRO \(1993\)](#) - Estaca em meio semi-infinito sujeita a um momento.

Na análise numérica apresentada por estes autores o solo é considerado como um bloco finito de dimensões 6,096 m x 6,096 m x 12,19 m. O solo foi modelado com o MEC e, aproveitando a simetria do problema, a metade do bloco foi discretizada com 102 elementos de contorno quadrilaterais e a estaca foi modelada com 20 elementos finitos hexaédricos. Obviamente esta modelagem é muito pobre para representar um meio elástico semi-infinito, entretanto é o único resultado conhecido para esta comparação.

A análise deste problema somente com o MEF fica inviabilizada pelo grande número de dados necessários para representar o problema corretamente. Assim, foi realizado um estudo onde o solo é aproximado por um meio contínuo plano com as mesmas características do problema original. A análise partiu de um sólido de dimensões iguais à do corte transversal do problema original e depois as dimensões do sólido foram duplicadas e quadruplicadas. O que se observou foi que para os resultados decorrentes da estaca submetida a um momento aplicado em seu topo, estes diminuem significativamente quando as dimensões do solo aumentam, como indica a [Figura 4](#).

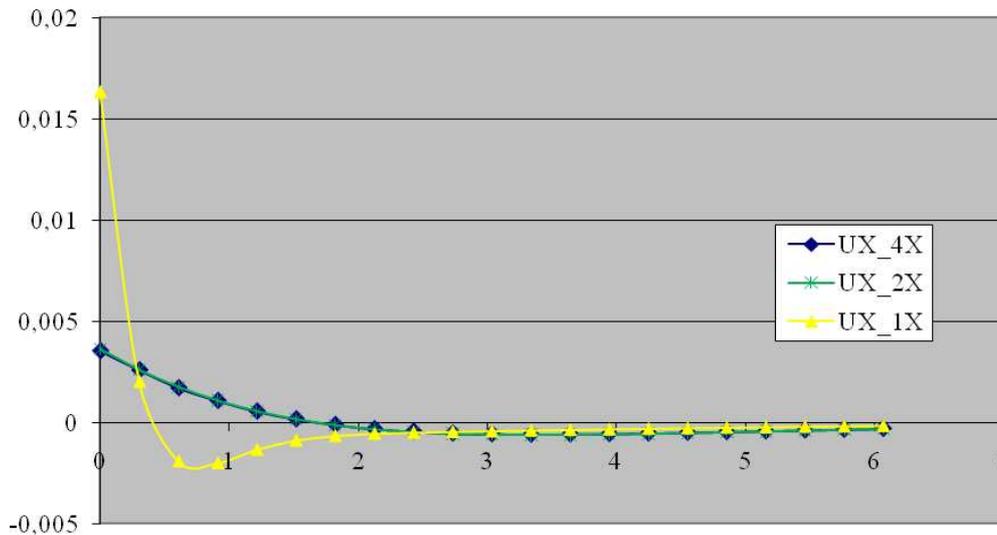


Figura 4: Simulações de problema apresentado por VALLABHAN & SIVAKUMAR (1986), alterando as dimensões do bloco de solo.

Na legenda da Figura 4: UX_1X foi o resultado obtido para o problema original; UX_2X foram os resultados obtidos ao se duplicar as medidas originais; e UX_4X foram os resultados obtidos quadruplicando as medidas originais.

Pode-se observar que os valores dos deslocamentos sofrem uma forte redução e depois se estabilizam como era de se esperar.

A partir destes resultados pode-se esperar que o mesmo ocorra no caso tri-dimensional e, portanto os resultados apresentados por VALLABHAN & SIVAKUMAR (1986) sejam maiores que os obtidos em uma modelagem do solo como meio contínuo semi-infinito tridimensional. Na Figura 5 apresentam-se os resultados obtidos com a formulação aqui proposta e os obtidos por VALLABHAN & SIVAKUMAR (1986). Pode-se observar que os resultados obtidos estão coerentes com o esperado, ou seja, menores que os obtidos pela referência.

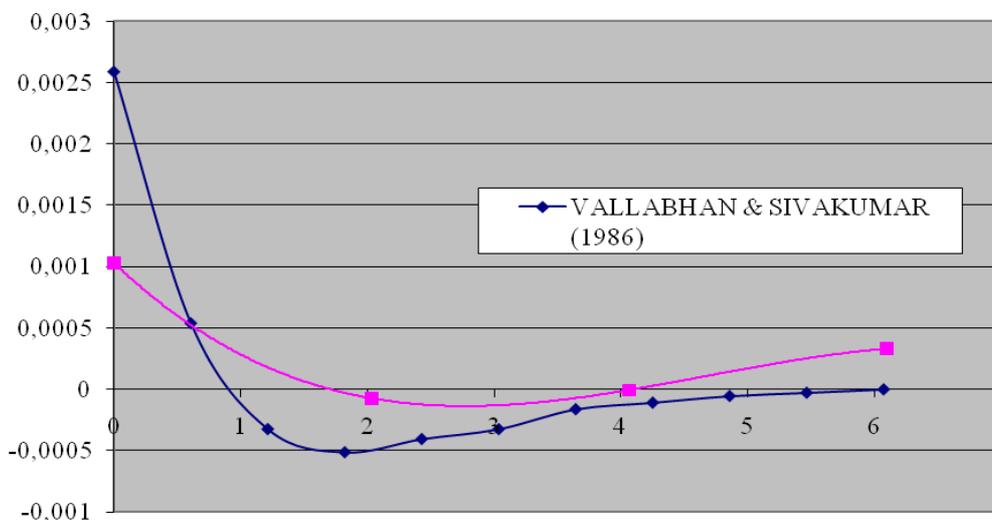


Figura 5: Resultados obtidos com a formulação aqui proposta e os obtidos por VALLABHAN & SIVAKUMAR (1986).

5.1. Exemplo 1

Para este exemplo foi considerada uma estaca isolada com comprimento de 6,096 m e raio de 0,3048 m, submetida a uma carga horizontal de 181,6 kN. O momento de inércia da estaca igual a $6,779 \cdot 10^{-3} \text{ m}^4$, o módulo de elasticidade longitudinal da estaca igual a 21111000 kN/m² e o do solo igual a 211110 kN/m². O coeficiente de Poisson do solo igual a 0,2.

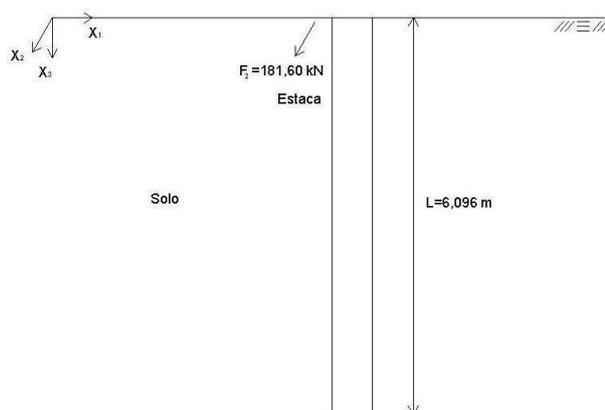


Figura 6: Configuração do exemplo 1.

Para verificação dos resultados obtidos neste trabalho utilizou-se o trabalho desenvolvido por ROSA (2009), onde a estaca é modelada pelo Método das Diferenças Finitas (MDF) e o solo pelo MEC. Para o MEC foi utilizada a solução fundamental de MINDLIN (1936).

A Figura 7 apresenta os deslocamentos horizontais ao longo da estaca constatando-se uma concordância entre os valores obtidos pelos diferentes métodos.

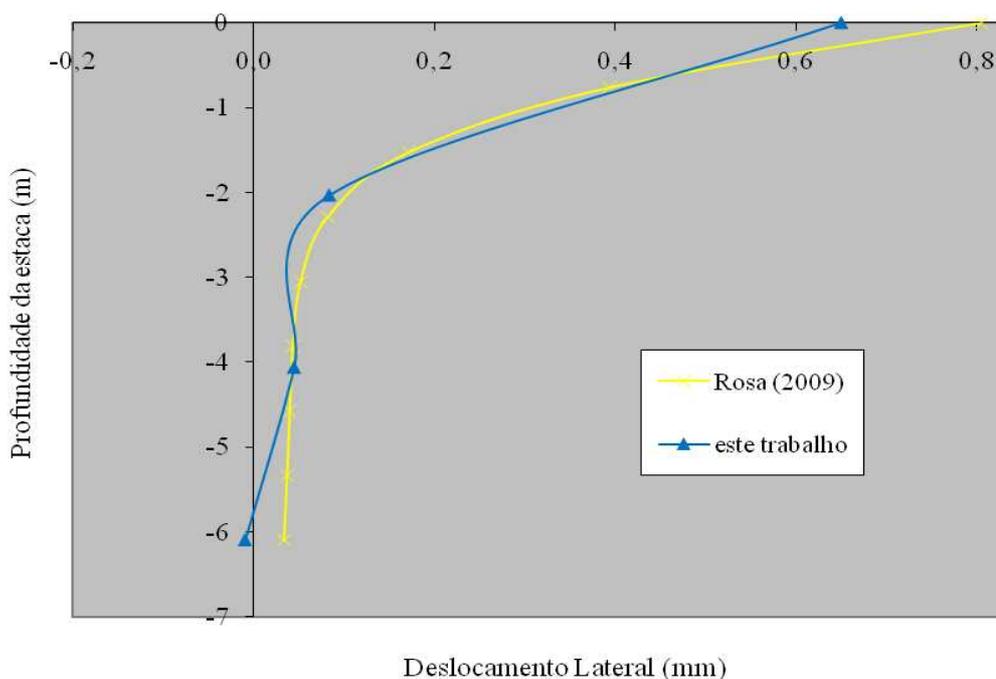


Figura 7 - Deslocamento horizontal na direção X_1 ao longo da estaca.

5.2. Exemplo 2

KÉRISEL & ADAM (1967), realizaram um ensaio numa estaca isolada cravada em solo argiloso, com comprimento de 4,65 m e diâmetro equivalente de 0,3573 m, submetida a uma carga horizontal de 60 kN, na direção X_1 , e a um momento de -69 kN.m, em torno do eixo X_2 . O módulo de elasticidade longitudinal da estaca é igual a 20000000 kN/m², o do solo (determinado experimentalmente, com base na média dos três primeiros metros) é igual a 9233 kN/m² e o coeficiente de Poisson do solo é igual a 0,3. O momento de inércia da estaca igual a 8.10^{-4} m⁴.

Para comparação dos resultados foi utilizado o trabalho desenvolvido por ALMEIDA (2003), onde a estaca e solo foram considerados sólidos tridimensionais e modelados pelo MEC, utilizando a solução fundamental de Kelvin (LOVE (1944)).

A Figura 8 apresenta os deslocamentos laterais ao longo da estaca constatando-se uma concordância entre os valores obtidos por este trabalho e pela referência.

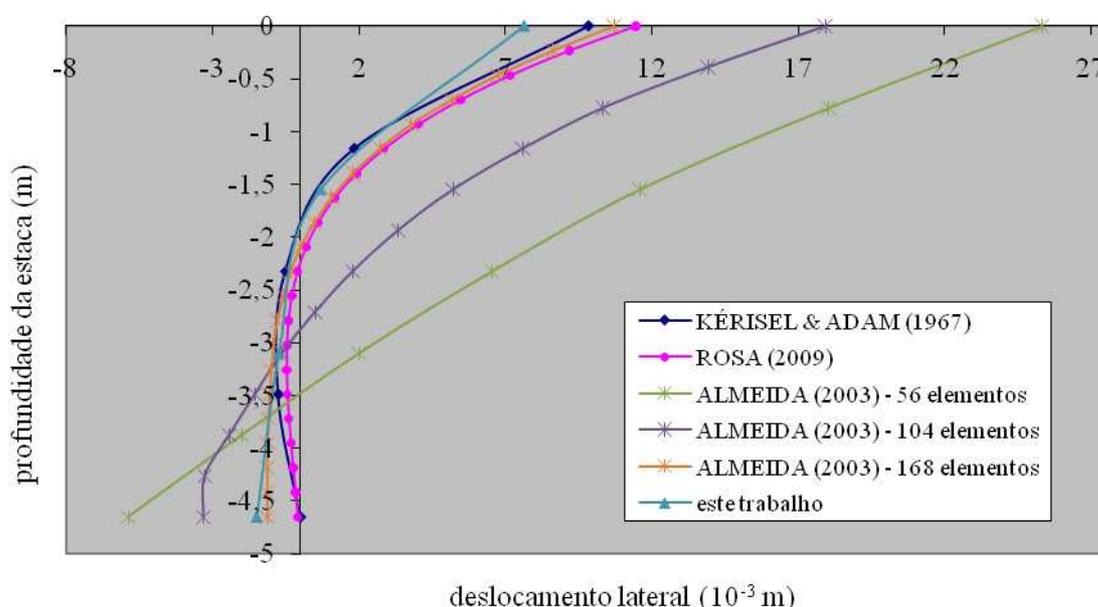


Figura 8: Deslocamento horizontal X_1 ao longo da estaca.

6. CONCLUSÕES

Neste trabalho apresentou-se uma formulação alternativa da formulação do MEC para a análise da interação estaca-solo, onde a estaca é modelada pelo MEF e o solo, suposto meio contínuo semi-infinito, é modelado pelo MEC, utilizando também a equação hiper-singular do deslocamento.

As tensões na interface estaca-solo foram aproximadas por um polinômio do 4º grau. A matriz de rigidez da estaca também foi obtida com os deslocamentos transversais aproximados por um polinômio do 4º grau, onde são incógnitas do problema: o deslocamento e rotação do primeiro nó da estaca e deslocamentos dos demais. A rotação é considerada para compatibilizar o momento do topo da estaca.

São apresentados resultados numéricos que mostram concordância com os obtidos em ensaios e por outros métodos numéricos.

REFERÊNCIAS

- ALMEIDA, V. S. (2003). *Análise da interação solo não-homogêneo/estrutura via acoplamento MEC/MEF*. São Carlos. Tese (doutorado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- CALDERÓN, E. T. (1991). *Uma formulação alternativa para o estudo de placas sobre fundação elástica pelo método dos elementos de contorno*. São Carlos. Dissertação (mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- CALDERÓN, E. T. (1996). *Sobre o uso do MEC para o estudo de interação de placas com o meio contínuo*. São Carlos. Tese (doutorado). Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- CHEUNG, Y. K. & NAG, D. K. (1968). *Plates and beams on elastic foundations-linear and non-linear behavior*. Géotechnique, vol. 18.
- FATEMI-ARDAKANI, B. (1987). *A contribution to the analysis of pile-supported raft foundations*. Southampton. Tese (doutorado). Universidade de Southampton.
- FERRO, N. C. P. (1993). *Uma Combinação do método dos elementos de contorno com o método dos elementos finitos para análise de fundações enrijecidas por estacas*. São Carlos. Dissertação (mestrado). Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo. Departamento de Estruturas.
- HEMSLEY, J. A. (1990a). *Elastic solutions for large matrix problems in foundation interaction analysis*. In: Proc. Inst. Civ. Engrs.
- HEMSLEY, J. A. (1990b). *Application of large matrix interaction analysis to raft foundations*. In: Proc. Inst. Civ. Engrs.
- KÉRISEL, J. & ADAM, M. (1967). *Calcul des forces horizontales applicables aux fondations profondes dans les argiles et limons*. Annales L.T.B.T.P., n. 239, p. 1653.
- MATOS FILHO, R. F. de (1999). *Análise da interação estaca-solo via uma combinação do Método dos Elementos Finitos com o Método dos Elementos Contorno*. São Carlos. Dissertação (mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- MENDONÇA, A.V. (1997). *Análise da interação placa-estaca-solo via um combinação do método dos elementos finitos com o método dos elementos de contorno*. São Carlos. Dissertação (mestrado). Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- MESSAFER, T. & COATES, L. E. (1990), *An application of FEM/BEM coupling to foundation analysis*. Advances in Boundary Methods, vol. 3.
- MINDLIN, R. D. (1936). *Force at a point in the interior of a semi-infinite solid*. Physics 7, p. 195 -202.
- PAIVA, J. B. (1993). *Formulação do método dos elementos de contorno para análise de interação solo-estrutura*. São Carlos. Tese (livre docência). Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- POULOS, H. G. & DAVIS, E. H. (1980). *Pile foundation analysis and design*. John Wiley & Sons, New York, N.Y.
- ROSA, A. K. & PAIVA, J. B. (2009). *Análise da interação estaca-solo via combinação diferenças finitas/método dos elementos de contorno*. In: XXX Congresso Ibero-Latino Americano sobre Métodos Computacionais em Engenharia, 2009, Búzios-RJ/Brasil.
- VALLABHAN, C. V. G. & SIVAKUMAR, J. (1986). *Coupling of BEM and FEM for 3D problems in geotechnical engineering*. In: BREBBIA, C. A. & CONNOR, J. J., eds. BETECH 86. Southampton: CML Publ., p. 675-686.

ZAMAN, M. M.; ISSA, A.; KUKRETI, A. R. (1988). *Analysis of circular plate-elastic half-space interaction using an energy approach*. Applied Math. Modeling, vol. 18, June.