

## INFLUENCIA DE IMPERFECCIONES INICIALES EN LA INESTABILIDAD DE CÁSCARAS CILÍNDRICAS DELGADAS

**Emilio Feijóo, Juan C. Carrara**

*Departamento Mecánica, Facultad de Ingeniería, Universidad Austral, Avenida Juan de Garay 125,  
(C1063ABB) Ciudad Autónoma de Buenos Aires, Argentina, [efeijoo@austral.edu.ar](mailto:efeijoo@austral.edu.ar),  
<http://www.austral.edu.ar>*

**Palabras Clave:** Mecánica Estructural, Inestabilidad Cáscaras Cilíndricas.

**Resumen.** Las cargas críticas obtenidas en ensayos de cáscaras cilíndricas delgadas sometidas a compresión axial presentan una marcada dispersión y resultan significativamente menores que las predicciones correspondientes a la teoría clásica lineal. El marco teórico vigente atribuye las discrepancias observadas a razones de comportamiento no lineal y a factores de “sensibilidad a imperfecciones” relacionados con desviaciones de la geometría circular, apartamientos de la condición de simple apoyo, deformaciones inducidas por restricciones en extremos y distribución de cargas axiales. Los ensayos de inestabilidad por acción del peso propio en cáscaras cilíndricas de goma siliconada, con base inferior sólida y extremo superior libre, desarrollados por Calladine & Barber y Mandal & Calladine, facilitan una base de referencia experimental libre de incertidumbres inherentes a condiciones de borde, deformaciones emergentes de restricciones en extremos y distribución de cargas axiales. El presente trabajo está orientado a determinar la efectiva incidencia de desviaciones iniciales de la geometría circular en las cargas críticas y modos de colapso asociados a los modelos ensayados por los autores de referencia. Su desarrollo contempla la implementación de soluciones de inestabilidad no lineal, basadas en el Método de Elementos Finitos, con perturbaciones de amplitud variable. Los resultados obtenidos permiten identificar dos modos de colapso diferenciados, análogos a los observados experimentalmente; las predicciones de carga crítica-desviación inicial respectivas indican que la ocurrencia de uno u otro modo de colapso está determinada por la amplitud de la perturbación inducida.

## 1 INTRODUCCIÓN

Las cáscaras cilíndricas delgadas están asociadas a un amplio rango de aplicaciones concretas, particularmente en los ámbitos propios de las ingenierías aeroespacial, mecánica, naval y petroquímica. La inestabilidad de cáscaras cilíndricas isotrópicas delgadas sometidas a cargas de compresión axial, si bien ha sido tratada teórica y experimentalmente por diferentes autores, continúa siendo objeto de intensivas investigaciones.

El trabajo pionero de Euler sobre la estabilidad elástica de columnas esbeltas sentó las bases para el desarrollo de la teoría clásica de pandeo elástico, basada en simplificaciones lineales, en que la solución del problema de autovalores resultante permite determinar las cargas críticas de bifurcación y sus modos de deformación asociados. La teoría clásica de inestabilidad de cáscaras cilíndricas fue extensivamente utilizada, entre las décadas de 1910 y 1930, por distintos investigadores independientes que incluyen a Timoshenko, Lorenz, Southwell, von Mises, Flügge, Schwerin y Donnell, ver Timoshenko & Gere (1961) para mayor detalle. La tensión crítica correspondiente a dicha teoría clásica de inestabilidad de cáscaras cilíndricas isotrópicas delgadas, con condiciones de borde caracterizadas por extremos simplemente apoyados, está dada por

$$\sigma_{cl} = \frac{E}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \left( \frac{t}{R} \right) \quad (1)$$

donde,  $E$  denota al Módulo de Elasticidad Longitudinal,  $\nu$  al Coeficiente de Poisson,  $t$  al espesor de pared y  $R$  al radio de la cáscara.

Las tensiones críticas obtenidas en ensayos desarrollados en la década de 1930 presentan una marcada dispersión y resultan significativamente menores que las predicciones correspondientes a la teoría clásica lineal. La discrepancia observada se acentúa a medida que aumenta la relación radio/espesor ( $R/t$ ), ver Figuras 1 y 2.

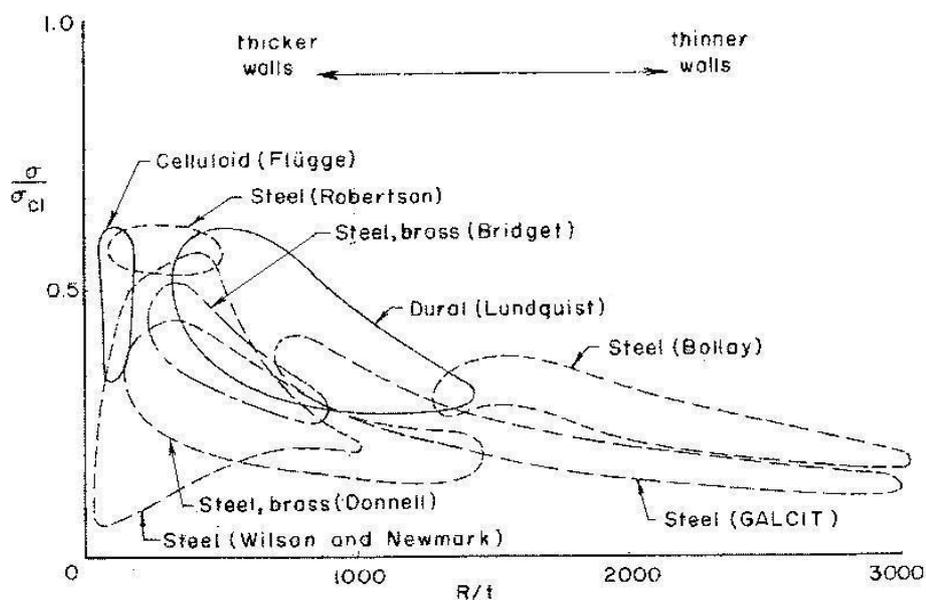


Figura 1: Comparación relaciones de tensiones críticas experimentales y clásicas (Donnell & Wan, 1950).

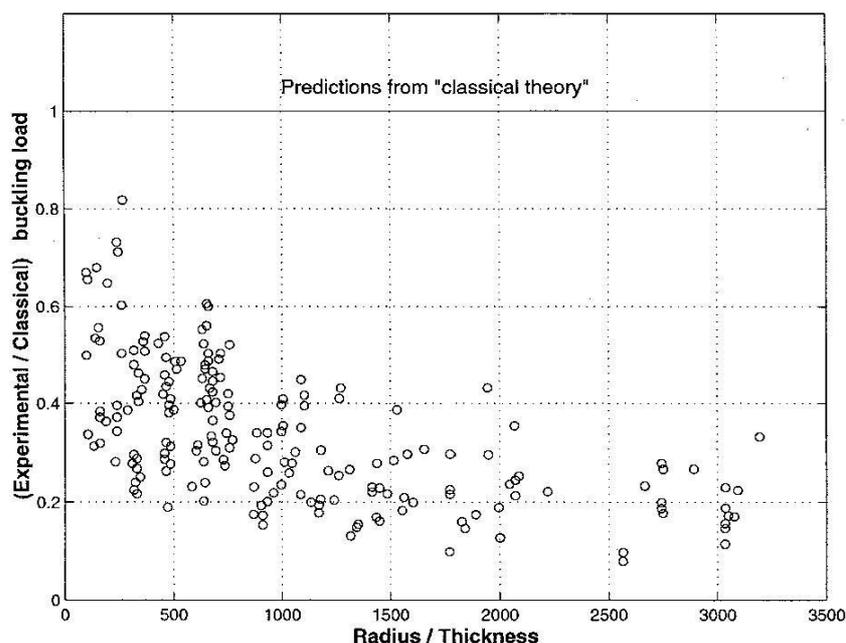


Figura 2: Distribución de tensiones críticas experimentales y clásicas (Brush & Almroth, 1975).

Estos aspectos conflictivos y la observación de frecuentes fallas catastróficas despertaron el interés de numerosos investigadores. Donnell (1934) incorporó el efecto de imperfecciones geométricas iniciales, introduciendo un conjunto simplificado de ecuaciones diferenciales no lineales. En la década de 1940, von Karman, Dunn & Tsien (1940) y von Karman & Tsien (1941) resaltaron que el comportamiento de las cáscaras cilíndricas sometidas a compresión axial es esencialmente no lineal y que la capacidad portante se reduce significativamente con posterioridad a alcanzar el máximo valor de carga. Koiter (1945) desarrolló una teoría general no lineal de la estabilidad elástica, idónea para predecir la estabilidad del equilibrio en el punto de bifurcación de pandeo y sus proximidades, determinando que las cáscaras cilíndricas bajo compresión axial exhiben un inestable comportamiento post pandeo y que su capacidad portante resulta singularmente afectada por la presencia de desviaciones geométricas iniciales. En la década de 1960, Babcock (1962) condujo un trabajo experimental orientado a cuantificar la incidencia de imperfecciones iniciales en la inestabilidad de cáscaras cilíndricas sometidas a compresión axial, registrando la geometría de los especímenes ensayados y la distribución de cargas axiales. Arbocz & Babcock (1969) si bien señalaron como posibles factores de imperfecciones a los apartamientos de la condición de simple apoyo, deformaciones inducidas por restricciones en los extremos y desviaciones de la geometría circular, estas últimas constituirían el agente de degradación principal de la capacidad portante respectiva.

La reducción de carga crítica emergente de imperfecciones distribuidas y/o localizadas ha sido también objeto de investigaciones más recientes por parte de Yamaki (1984), Bushnell (1989), Godoy (1993), Gusic, Combescure & Jullien (2000) y Arbocz (2005).

Kim & Kim (2002) trataron el efecto de una imperfección geométrica inicial generalizada con forma de superposición modal en la inestabilidad de cáscaras y tanques sobre fundaciones tanto rígidas como elásticas, determinando una significativa reducción de carga crítica como consecuencia del incremento en amplitud de dicha imperfección.

Hubner, Teng & Saal (2006) utilizaron métodos numéricos para analizar imperfecciones inducidas por soldadura, obteniendo resultados que corroboran los de estudios precedentes.

Khamlichi, El Bahaoui, El Bakkali, Bezzazi & Liman (2010) analizaron la interacción de dos imperfecciones geométricas localizadas, identificando a su separación como un parámetro adicional de reducción de carga crítica.

Las investigaciones relacionadas con inestabilidad se han extendido al tratamiento de la interacción fluido-estructura. Goncalves, da Silva & del Prado (2006) desarrollaron estudios relacionados con el comportamiento dinámico no lineal de cáscaras cilíndricas sometidas a sollicitación axial, utilizando la versión dinámica de las ecuaciones de Donnell, discretizadas con el método de Galerkin, partiendo de una configuración inicial de pre-pandeo. Amabili, Karagiozis & Paidoussis (2008), analizaron el efecto de imperfecciones geométricas en la estabilidad no lineal de cáscaras cilíndricas que transportan fluidos, haciendo uso de las teorías no lineales de Donnell y de Sanders-Koiter.

En términos generales, los desarrollos reseñados precedentemente sientan bases que permiten atribuir las discrepancias observadas a un carácter no lineal del fenómeno de inestabilidad y a factores de “sensibilidad a imperfecciones”, relacionados con desviaciones de la geometría circular, apartamientos de la condición de simple apoyo, deformaciones inducidas por restricciones en extremos y distribución de cargas axiales.

En la búsqueda de la definición de un parámetro representativo de la sensibilidad a imperfecciones de cáscaras cilíndricas, cabe recurrir a los análisis de Koiter, basados en asumir deformaciones iniciales de geometría coincidente con el autovector asociado a la inestabilidad del cilindro circular.

## 2 LOS ENSAYOS DE MANDAL Y CALLADINE

Calladine & Barber (1970) desarrollaron experimentos de inestabilidad por acción del peso propio en cáscaras cilíndricas delgadas de goma siliconada, con base inferior sólida y extremo superior libre. Los especímenes, manufacturados en un molde rotatorio, tenían un diámetro exterior de 172 mm y espesores que variaban entre 0,23 mm y 1,12 mm. Los cilindros respectivos fueron acortados en longitud hasta lograr que, apoyados sobre sus bases en posición vertical, permanecieran en condición de equilibrio estable. Las alturas experimentalmente determinadas, fueron consideradas como longitudes críticas ( $L_{Cr}$ ) asociadas a la sollicitación del propio peso. En esa oportunidad, se ensayaron siete especímenes con relaciones radio/espesor correspondientes al rango  $80 < R/t < 400$ .

Dichos investigadores identificaron dos modos de colapso diferenciados. A diferencia de los cilindros de mayor altura y espesor, que colapsaban con modos iniciados en proximidades de las bases (*base crumpling*), los más delgados y cortos lo hacían desde el borde libre superior (*wall falling inward*).

A efectos de correlacionar los resultados obtenidos con la teoría clásica, los autores formularon la hipótesis de que el fenómeno de pandeo acontecía cuando la tensión de compresión en la base por acción del peso propio, alcanzaba la tensión crítica clásica  $\sigma_{Cl}$ . En estos términos, la relación entre longitudes y tensiones críticas queda explicitada por

$$\sigma_{Cl} = L_{Cr} \rho g = \frac{E}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \left( \frac{t}{R} \right) \quad (2)$$

donde,  $\rho$  denota la densidad del material y  $g$  la constante gravitacional.

Del análisis respectivo, surgen las siguientes conclusiones relevantes: en general, la ocurrencia de pandeo no responde a la teoría clásica; la dispersión de resultados es significativamente menor que la recopilada en la literatura de ensayos de cilindros delgados; la mejor aproximación de tendencia asociada a los datos experimentales puede expresarse como

$$\frac{L_{Cr} \rho g}{E} \propto \left( \frac{t}{R} \right)^{1.5}, \quad 80 < \frac{R}{t} < 400 \quad (3)$$

Con el objeto de corroborar la experiencia detallada precedentemente, Mandal & Calladine (2000) condujeron una nueva serie de ensayos con especímenes de diámetro exterior un 40% mayor que los modelos originales. Los cilindros fueron conformados en el molde rotativo esquematizado en la Figura 3.

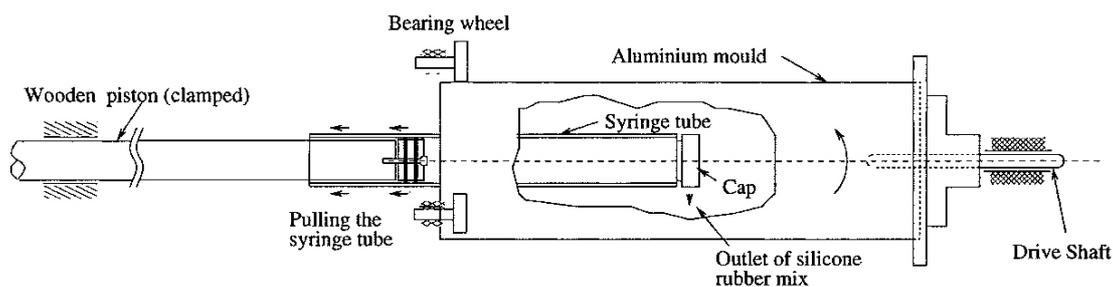


Figura 3: Detalle esquemático molde rotativo (Mandal & Calladine, 2000).

El dispositivo, similar al utilizado por Calladine & Barber, era accionado por un motor eléctrico de velocidad variable. La solución de goma siliconada (ICI Silicoset 105; ICI Silicones F111/5000, 10% en volumen; Curing Agent A, 1% en volumen) era previamente desaireada y depositada dentro del molde que rotaba con una velocidad del orden de 10-15 rpm. Una vez introducida la cantidad de solución requerida, la velocidad de rotación se incrementaba a 600 rpm hasta lograr una dispersión uniforme. El proceso de moldeo culminaba aplicando la menor velocidad por un término de entre 4 y 5 horas. Verificado el endurecimiento del material, el molde era removido de su emplazamiento y dispuesto verticalmente para verter la solución que conformaría una base inferior de 15 mm de espesor. En esa oportunidad, se moldearon un total de cinco especímenes cuya geometría se detalla en Tabla 1.

Especímen	Espesor Promedio (mm)	Desviación Estándar en Espesor (mm)	Diámetro Externo (mm)	$\frac{R}{t}$
Cilindro 1	1.13	0.032	241	106
Cilindro 5	0.97	0.022	241	124
Cilindro 2	0.76	0.012	241	158
Cilindro 4	0.58	0.016	241	208
Cilindro 3	0.37	0.012	241	326

Tabla 1: Geometría Especímenes Ensayados (Mandal & Calladine, 2000).

La metodología de erección escogida era manual, aspecto que demandaba una particular coordinación por parte del grupo de trabajo. Dado que todos los cilindros fueron moldeados con alturas mayores que las longitudes críticas predichas por la teoría clásica lineal, invariablemente colapsaban en el primer intento de mantenerse estables al apoyarlos sobre su base inferior. Seguidamente, los especímenes se acortaban en el rango de 5 mm a 10 mm y se repetía el intento. En correspondencia con cada nueva altura, se desarrollaba una serie de cinco o seis conatos sucesivos; en caso de no tener éxito se continuaba el proceso hasta alcanzar un equilibrio vertical estable y registrar la longitud crítica de pandeo respectiva. La

Tabla 2 presenta un resumen de propiedades materiales, modos de colapso representativos y longitudes críticas experimentales con una confianza de  $\pm 5$  mm.

Espécimen	Espesor Promedio (mm)	$\frac{E}{\rho g}$ (m)	$L_{Cr}$ (mm)	$\frac{R}{t}$	Modo de Colapso
Cilindro 1	1.13	119	595	106	Base
Cilindro 5	0.97	114	512	124	Base
Cilindro 2	0.76	120	331	158	Borde superior
Cilindro 4	0.58	120	230	208	Borde superior
Cilindro 3	0.37	117	100	326	Borde superior

Tabla 2: Longitudes Críticas y Modos de Colapso (Mandal & Calladine, 2000).

Los modos de colapso observados resultaron análogos a los identificados en los estudios previos conducidos por Calladine & Barber en la década de 1970. La Figura 4 presenta los resultados adimensionales de  $\sigma_{Cr}/E$  en función de la relación  $R/t$  correspondientes a ambas experiencias.

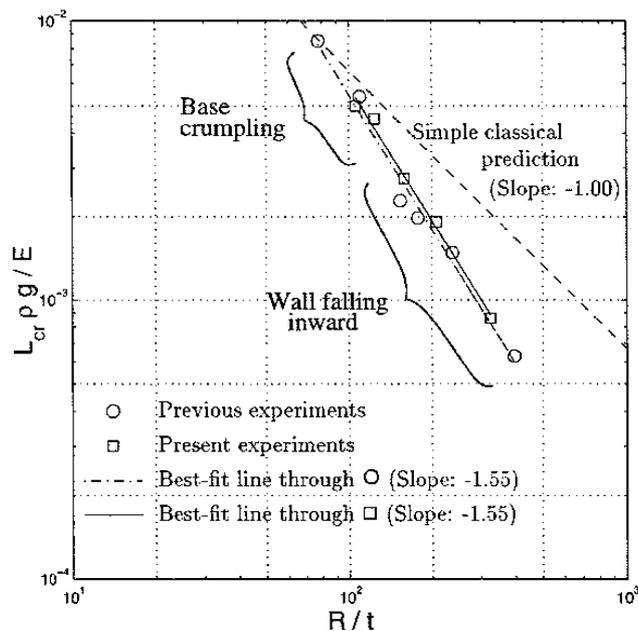


Figura 4: Resultados Experimentales (Mandal & Calladine, 2000).

Si bien las aproximaciones de tendencia asociadas a los experimentos previo y actual presentan pendientes prácticamente idénticas, los datos recientes resultan un 3% más altos, con una desviación estándar de 6% en contraposición con el 13% original. Convalidada la relación (3), Mandal & Calladine (2000) efectuaron la regresión lineal de los resultados experimentales de tensiones críticas de cáscaras cilíndricas sometidas a sollicitación axial recopilados por Brush & Almroth (1975), obteniendo una pendiente cercana a -1.5 en el gráfico logarítmico que muestra la Figura 5.

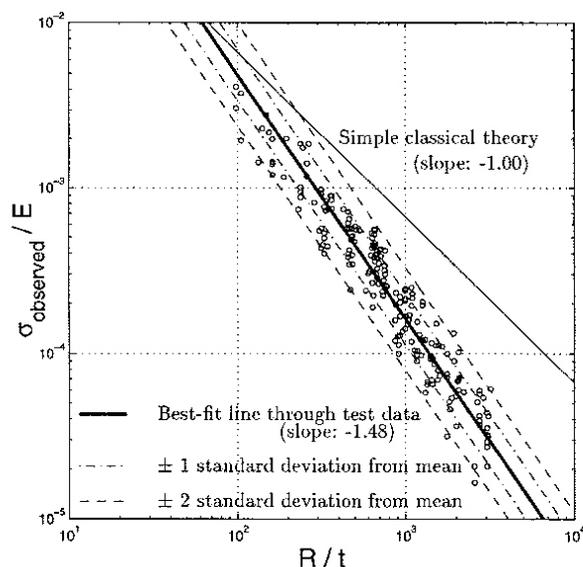


Figura 5: Regresión Datos Experimentales Adimensionales (Mandal & Calladine, 2000).

En particular, resulta notorio que la dispersión de datos experimentales presenta uniformidad para un amplio intervalo de  $R/t$ ; prácticamente, todos los valores yacen dentro del rango de 0.6 a 1.6 con respecto a la curva de regresión lineal, correspondiente a  $\pm 2$  desviaciones estándar. Cabe señalar que dichos investigadores resaltan que von Karman, Dunn & Tsien (1940) determinaron que las cargas críticas experimentales disponibles eran proporcionales a  $(t/R)^{1.4}$ , en vez de  $(t/R)^{1.0}$  como predice la teoría clásica.

### 3 EL ANÁLISIS NUMÉRICO DE MANDAL

Con el propósito de comprender los mecanismos del fenómeno de inestabilidad por acción del peso propio en cáscaras cilíndricas de goma siliconada con extremo superior abierto, Mandal (1997) desarrolló el análisis de Elementos Finitos de algunos especímenes utilizando el Código ABAQUS con carga gravitacional variable, recurriendo al Método de Riks modificado.

En el caso particular del Cilindro 4, ilustrado esquemáticamente en la Figura 6, la imperfección inicial utilizada estaba dada por

$$w(z, \theta) = -0.25t \left( \frac{z}{L} \right) e^{-6.9\theta^2} \cos(7\theta) \quad (4)$$

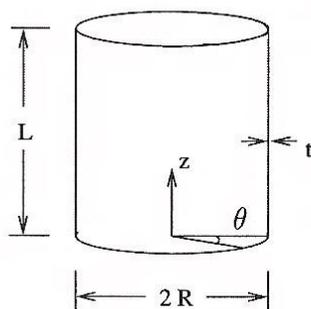


Figura 6: Geometría Cáscara Cilíndrica (Mandal, 1997).

Los resultados de un análisis representativo, ilustrados en la Figura 7, muestran que la cáscara no pierde su estabilidad hasta alcanzar una carga de **1.8g**, nivel próximo a la carga crítica lineal. Consecutivamente, la carga desciende al orden de **1.3g**, con un desplazamiento radial muy pequeño; en postrimerías de esta etapa tiene lugar un significativo incremento de deformación conforme al patrón indicado en la Figura 8.

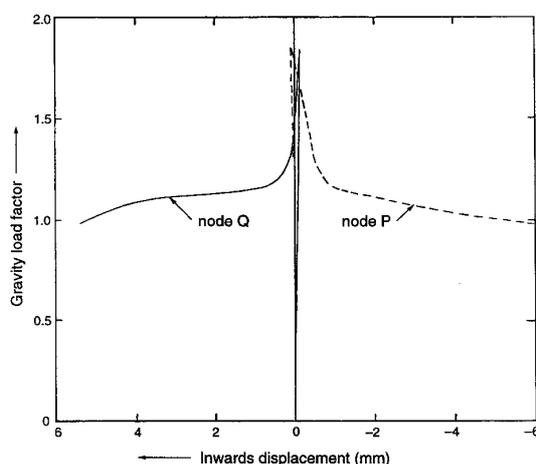


Figura 7: Factor Carga Gravitacional versus Deformación Radial (Zhu, Mandal & Calladine, 2002).

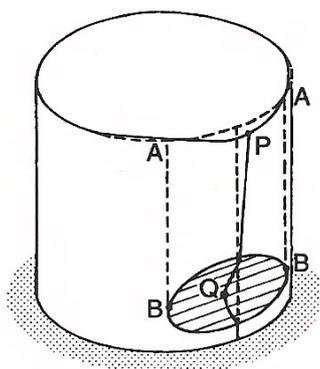


Figura 8: Representación Esquemática Modo post Pandeo (Zhu, Mandal & Calladine, 2002).

En proximidades de la base se desarrolla una concavidad localizada, por encima de la cual, la cáscara se deforma con un simple patrón inextensional, permaneciendo sus generatrices rectas. La Figura 7 permite apreciar la aparición de una meseta post pandeo en que las magnitudes de los desplazamientos radiales asociados a los puntos **P** y **Q** resultan prácticamente iguales. Cabe resaltar que, en coincidencia con un desplazamiento del orden de 5% del radio, la carga alcanza **1.0g**, nivel correspondiente a la inestabilidad constatada en el ensayo físico.

Basados en que las cargas críticas experimentales registradas guardan correlación con la meseta asociada a las curvas de carga-deformación numéricas, Zhu, Mandal & Calladine (2002) concluyen que las cargas críticas obtenidas en los ensayos de referencia, responden a un comportamiento característico de post pandeo.

#### 4 MODELACIÓN Y ANÁLISIS POR EL MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS

Los ensayos de inestabilidad por acción del peso propio en cáscaras cilíndricas de goma

siliconada, con base inferior sólida y borde superior libre, desarrollados por Calladine & Barber y por Mandal & Calladine, facilitan una base de referencia experimental libre de incertidumbres inherentes a condiciones de borde, deformaciones emergentes de restricciones en extremos y distribución de cargas axiales. La inexistencia de otros factores de sensibilidad a imperfecciones, permite implementar soluciones de inestabilidad no lineal basadas en el Método de Elementos Finitos, orientadas a determinar la efectiva incidencia de desviaciones iniciales de la geometría circular en las cargas críticas y modos de colapso asociados a los especímenes en cuestión.

La metodología de trabajo adoptada contempla instrumentar la solución “Non Linear Buckling Analysis” (SOL 106) del Código NX Nastran, induciendo deformaciones iniciales de amplitud variable, que conforman perturbaciones de geometría análoga a la del autovector asociado a la pérdida de estabilidad del cilindro circular.

El empleo del Código NX Nastran, que dispone de una aproximación simple al análisis no lineal de estabilidad, facilita formular un enfoque alternativo a la modelación numérica desarrollada por Mandal (1997), utilizando el Código ABAQUS y el Método de Riks modificado.

#### 4.1 La Solución implementada

La solución *Non Linear Buckling Analysis* (SOL 106) del Código NX Nastran, basada en una extrapolación cuadrática, aproxima la carga crítica de pandeo en términos del estado de carga próximo a la inestabilidad y un factor de inestabilidad crítica, conforme a

$$\{P_{cr}\} = \{P_n\} + \alpha \{\Delta P\} \quad (5)$$

donde,  $\alpha$  denota al factor de inestabilidad crítica y  $\{\Delta P\} = \{P_n\} - \{P_{n-1}\}$ , la variación de cargas entre los estados  $n$  y  $n-1$ , próximos a la inestabilidad. En particular, el cómputo del factor de inestabilidad crítica está dado por la expresión

$$\alpha = \frac{\lambda \{\Delta U\}^T [K_n + \frac{1}{2} \lambda \Delta K] \{\Delta U\}}{\{\Delta U\}^T \{\Delta P\}} \quad (6)$$

en la cual

$$\begin{aligned} \{\Delta U\} &= \{U_n\} - \{U_{n-1}\} \\ \Delta K &= K_n - K_{n-1} \end{aligned} \quad (7)$$

donde,  $\lambda$  denota al autovalor no lineal;  $K_n$  y  $K_{n-1}$ ,  $\{U_n\}$  y  $\{U_{n-1}\}$ , las matrices de rigidez y los desplazamientos evaluados en los estados  $n$  y  $n-1$  en vecindades de la ocurrencia de inestabilidad.

#### 4.2 El modelo de elementos finitos

Con el propósito explícito de reflejar la geometría real de los especímenes ensayados y no introducir incertidumbres relacionadas con condiciones de borde, los modelos a analizar incluyen sus respectivas bases sólidas de 15 mm de espesor, cuyos bordes inferiores se consideran simplemente apoyados. La Figura 9 muestra los detalles pertinentes de medio modelo representativo.

Las coordenadas axial, circunferencial y radial, denotadas como  $x$ ,  $y$ ,  $z$  y los respectivos desplazamientos de la superficie de la cáscara, indicados como  $u$ ,  $v$  y  $w$ , se muestran en la

Figura 10.

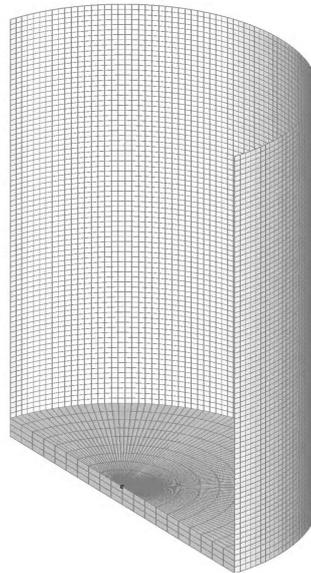


Figura 9: Geometría de medio modelo representativo.

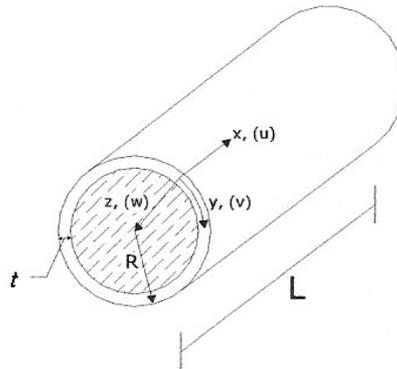


Figura 10: Geometría de la cáscara y sistema de coordenadas.

La modelación de las bases de los distintos especímenes contempla elementos sólidos CHEXA y CPENTA. Las cáscaras respectivas se modelan con elementos bidimensionales CQUAD4, cuya formulación responde a la teoría de Mindlin-Reissner. La Tabla 3 resume detalles específicos.

Especímen	Elementos del Modelo		Grados de Libertad
	Sólidos	CQUAD4	
Cilindro 2	5400	14220	128544
Cilindro 4	5400	9900	102624
Cilindro 5	5400	21960	174984

Tabla 3: Elementos y grados de libertad.

El material es idealizado como elástico lineal e isotrópico. Los Módulos de Elasticidad Longitudinal pertinentes se obtienen de los valores consignados en la Tabla 2 y una densidad de goma siliconada curada de  $1200 \text{ kg/m}^3$ ; el Coeficiente de Poisson adoptado es de 0,45.

### 4.3 Geometría de la perturbación

Koiter (1945) demostró, en sus primeros estudios no lineales, que una deformación inicial de la forma del autovector clásico relacionado con el estado crítico de carga podía tener un gran impacto en el comportamiento subsecuente. Bajo este criterio rector, a efectos de explorar la sensibilidad a imperfecciones iniciales de cáscaras cilíndricas, se adopta una perturbación con amplitud variable, de geometría coincidente con la forma del autovector no lineal asociado a la inestabilidad del cilindro circular.

Los desplazamientos radiales inherentes a la deformación inicial inducida se expresan por

$$w(x, \theta) = w_0 f_{axial} \cos(n\theta) \quad (8)$$

donde,  $w_0$  denota la amplitud de deformación inicial,  $f_{axial}$  y  $n$  las funciones de forma axial y número de lóbulos circunferenciales relativos a la inestabilidad no lineal de los respectivos cilindros circulares.

Las funciones adimensionales de forma axial, correspondientes a los distintos especímenes modelados, reflejan la distribución axial de los máximos desplazamientos radiales emergentes de los autovectores no lineales normalizados, asociados a la pérdida de estabilidad de las cáscaras cilíndricas circulares.

La Figura 11 muestra la función de forma axial del Cilindro 4, obtenida del autovector no lineal pertinente.

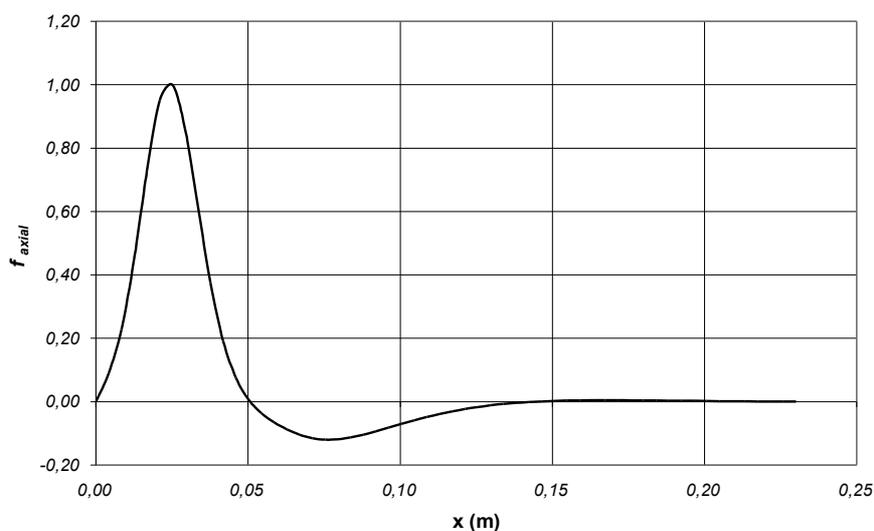


Figura 11: Función de forma axial Cilindro 4.

La Tabla 4 resume características geométricas y los números de lóbulos circunferenciales correspondientes a los Cilindros 2, 4 y 5.

Especímen	$L_{Cr}$ (mm)	$t$ (mm)	$\frac{R}{t}$	$n$
Cilindro 5	512	0.97	124	9
Cilindro 2	331	0.76	158	11
Cilindro 4	230	0.58	208	12

Tabla 4: Geometría y número de lóbulos circunferenciales.

## 5 EL ANÁLISIS DE RESULTADOS OBTENIDOS

Las Figuras 12 a 14 presentan las predicciones lineales y no lineales de carga crítica en función de la amplitud de perturbación y los modos de colapso no lineal característicos de los Cilindros 2, 4 y 5.

El fenómeno de no linealidad geométrica se manifiesta en problemas que involucran la existencia de grandes desplazamientos y rotaciones. En particular, los efectos no lineales adquieren relevancia cuando la forma de la estructura deformada difiere apreciablemente de la geometría original. A diferencia de la aproximación clásica lineal de pandeo, la solución *Non Linear Buckling Analysis* (SOL 106) contempla la ocurrencia de grandes desplazamientos y rotaciones, actualizando la matriz de rigidez en correspondencia con los sucesivos estados de deformaciones, perspectiva que permite explicar la divergencia entre predicciones lineales y no lineales obtenidas.

La solución no lineal implementada permite determinar que la totalidad de modelos analizados presentan dos modos de falla de características diferenciadas: un colapso de geometría lobular, localizado en proximidades de las bases y el colapso del borde libre superior. La ocurrencia de uno u otro modo de falla es dependiente de la amplitud de la deformación inicial inducida. Ambas modalidades detectadas responden a los patrones *base crumpling* y *wall falling inward* observados en los ensayos de Mandal & Calladine.

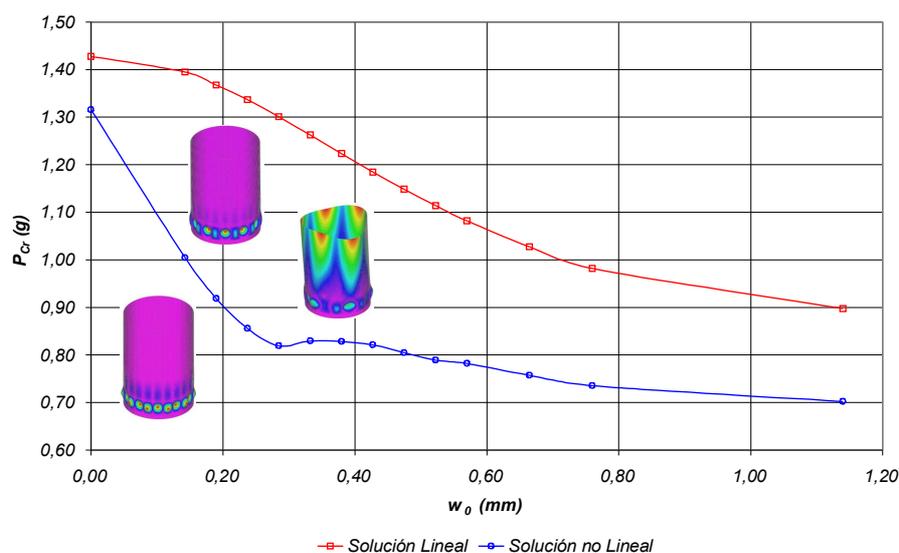


Figura 12: Curvas carga crítica – amplitud Cilindro 2.

Las predicciones no lineales de carga crítica en función de la amplitud de deformación inicial obtenidas exhiben, como rasgo en común, tres etapas consecutivas caracterizadas por distintas leyes de variación. En una primera etapa, el incremento en amplitud de deformación inicial redundaría en significativas reducciones de carga crítica, este estadio se extiende hasta que la carga crítica alcanza su mínimo relativo. En una segunda etapa, tras un incremento marginal de carga crítica, se materializa una “meseta” en que las cargas respectivas permanecen constantes para propósitos prácticos. En una tercera etapa, se retoma la tendencia descendente, con pendientes sensiblemente menores que las verificadas en la fase inicial. La extensión de las mesetas características disminuye a medida que aumenta el espesor y altura del espécimen considerado; el inicio de las mismas resulta más temprano para los especímenes de menor espesor y altura.

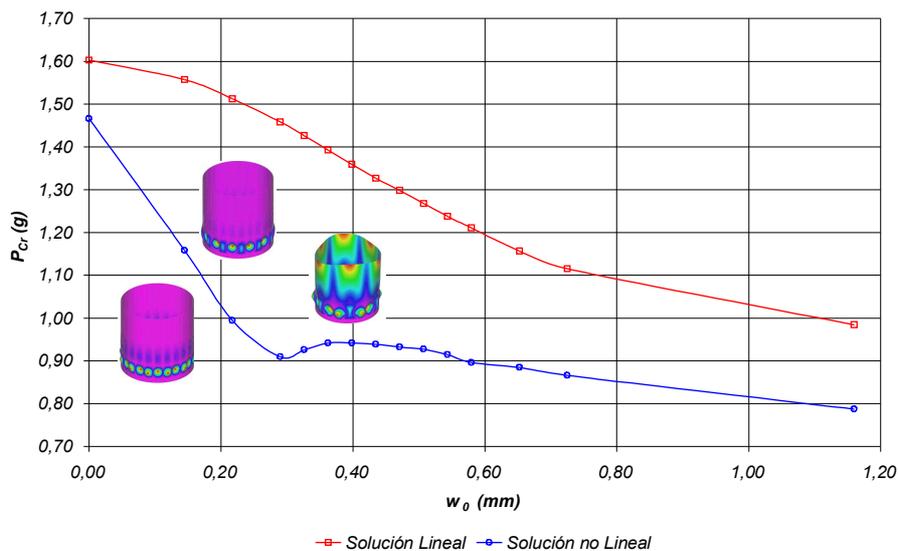


Figura 13: Curvas carga crítica – amplitud Cilindro 4.

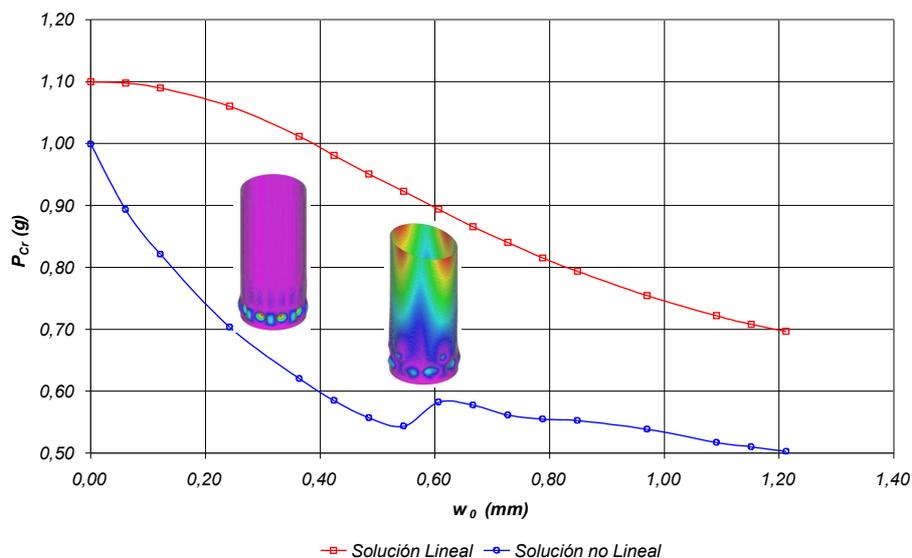


Figura 14: Curvas carga crítica – amplitud Cilindro 5.

La primera y segunda etapas reseñadas precedentemente exhiben modos de falla distintivos. Mientras que el colapso lobular localizado en proximidades de la base es propio del desarrollo de la primera etapa, el colapso del borde libre superior está asociado a la meseta de carga crítica. En este contexto, cabe correlacionar los modos de falla determinados numéricamente con aquellos observados experimentalmente. El modo de falla observado en los Cilindros 2 y 4, que responde a la modalidad de colapso del borde libre superior, permite inferir que sus cargas críticas experimentales guardan relación directa con las respectivas mesetas características emergentes del análisis numérico. El modo de falla *base crumpling* observado en el Cilindro 5 y la magnitud de carga crítica numérica reflejan el colapso propio de un espécimen de geometría prácticamente circular.

Adoptando como cargas críticas de los Cilindros 2 y 4 las asociadas a las mesetas características correspondientes y como carga crítica del Cilindro 5 la computada para la condición circular, la regresión lineal de predicciones numéricas presenta una pendiente del

orden de  $-1.6$  en el gráfico logarítmico de la Figura 15. La curva respectiva yace entre los resultados experimentales y la aproximación de Mandal & Calladine.

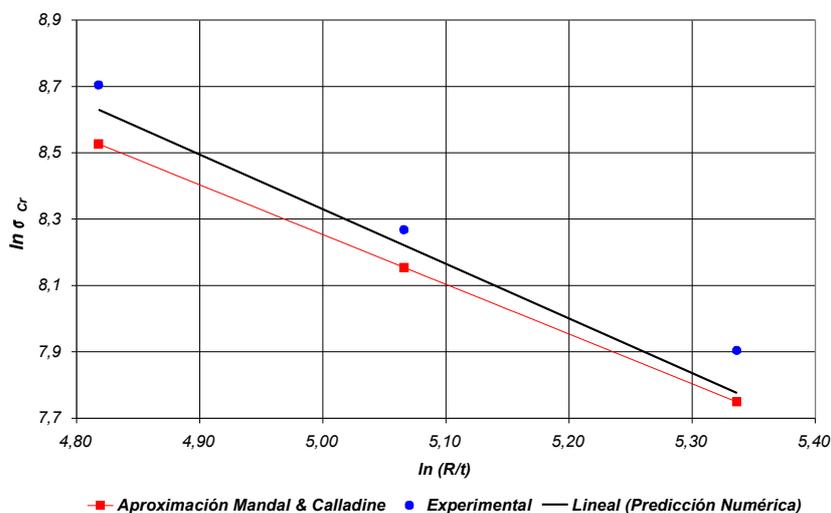


Figure 15: Regresión de resultados.

## 6 CONCLUSIONES

La metodología de trabajo adoptada permitió obtener predicciones no lineales de carga crítica en función de la amplitud de perturbación y los modos de colapso característicos de los Cilindros 2, 4 y 5 ensayados por Mandal & Calladine (2000).

La totalidad de modelos analizados presentan dos modos de falla de características diferenciadas: un colapso de geometría lobular, localizado en proximidades de las bases y el colapso del borde libre superior. Ambas modalidades detectadas responden a los patrones *base crumpling* y *wall falling inward* observados en los ensayos de Calladine & Barber (1970) y Mandal & Calladine (2000). La ocurrencia de uno u otro modo de falla es dependiente de la amplitud de la deformación inicial inducida.

Las predicciones no lineales obtenidas exhiben, como rasgo en común, tres estadios consecutivos: una primera etapa caracterizada por significativas reducciones en carga crítica a medida que se incrementa la amplitud de deformación, una segunda etapa caracterizada por una “meseta” en que las cargas respectivas permanecen constantes para propósitos prácticos, una tercera etapa donde se retoma la tendencia descendente con pendientes sensiblemente menores que las verificadas en la fase inicial.

El inicio y la extensión de las mesetas características de la segunda etapa son dependientes del espécimen considerado.

El modo de falla por colapso lobular localizado en proximidades de la base es propio de la primera etapa de las curvas no lineales de carga crítica deformación inicial; el colapso del borde libre superior está asociado a la mesetas características.

La correlación de los modos de falla determinados con aquellos observados experimentalmente permite inferir que las cargas críticas experimentales correspondientes a los Cilindros 2 y 4 guardan relación directa con las respectivas mesetas características emergentes del análisis numérico. La carga crítica experimental del Cilindro 5 refleja el colapso de un espécimen de geometría prácticamente circular.

La regresión lineal de resultados correlacionados permite concluir que las tensiones críticas

inherentes a los Cilindros 2, 4 y 5 son proporcionales a  $(t/R)^{1,6}$ .

## REFERENCIAS

- Amabili, M., Karagiozis, K. & Paidoussis, M.P., *Effect of Geometric Imperfections on Nonlinear Stability of Cylindrical Shells Conveying Fluid*, ENOC 2008, Saint Petersburg, Russia, June 30-July 4, 2008.
- Arbocz, J. & Babcock, C. D., The Effect of General Imperfections on the Buckling of Cylindrical Shells, *Transactions of the ASME*, march 1969.
- Arbocz, J., On a High Fidelity Hierarchical Approach to Buckling Load Calculations, *Proceedings of the European Conference on Spacecraft Structures, Materials and Mechanical Testing 2005*, May 10-12, Harvard, Noordwijk, The Netherlands, pp: 54-57, 2005.
- Babcock, C. D. Jr., *The Buckling of Cylindrical Shells with an Initial Imperfection under Axial Compression Loading*, Ph.D. Thesis, California Institute of Technology, 1962.
- Bushnell, D., *Computerized Analysis of Shells, Mechanics of Elastic Stability*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London, 1989.
- Brush, D. O. & Almroth, B. O., *Buckling of Bars, Plates and Shells*, McGraw-Hill, 1975.
- Calladine, C. R., Barber, J. N., Simple Experiments on Self-Weight Buckling of Open Cylindrical Shells, *Journal of Applied Mechanics*, Transactions ASME 1970.
- Donnell L. H., A New Theory for the Buckling on Thin Cylinders under Axial Compression and Bending, *Transactions of the American Society of Mechanical Engineers*, november 1934.
- Donnell, L. H. & Wan, C. C., Effect of Imperfections on Buckling of Thin Cylinders and Columns under Axial Compression, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 17, N° 1, 1950.
- Godoy, L. A., On Loads Equivalent to Geometric Imperfections in Shells, *J. Eng Mech. ASCE*, 119: 186-190, 1993.
- Goncalves, P. B., da Silva, F. M. A. & del Prado, Z. J. G. N, Transient Stability of Empty and Fluid Filled Cylindrical Shells, *J. Braz. Soc. Mech. Sci & Eng. Vol. 20 no. 3*, Rio de Janeiro July/Sept., 2006.
- Gusic, G., Combescure, A. & Jullien, J. F., The Influence of Circumferential Thickness Variations on the Buckling of Cylindrical Shells under External Pressure, *Comput. Struct.*, 74: 461-477, 2000.
- Hubner, A., Teng, J. G. & Saal, H., Buckling Behaviour of Large Steel Cylinders with Patterned Welds, *Int. J. Pressure Vessels Pip.*, 83: 13-26, 2006.
- Khamlichi, A., El Bahaoui, J., El Bakkali, L., Bezzazi, M. & Liman, A., Effect of Two Interacting Localized Defects on the Critical Load for Thin Cylindrical Shells under Axial Compression, *Am. J. Eng. Applied Sci.*, 3: 464-469, 2010.
- Kim, S. E., & Kim, C. S., Buckling Strength of the Cylindrical Shell and Tank Subjected to Axially Compressive Loads, *Thin-Walled Struct.*, 40: 329-353, 2002.
- Koiter, W. T., *On the Stability of Elastic Equilibrium*, Ph.D. Thesis, Delft, 1945.
- Mandal, P., *Buckling of Thin Cylindrical Shells under Axial Compression*, Ph.D. Thesis, University of Cambridge, Department of Engineering, 1997.
- Mandal, P., Calladine, C. R., Buckling of Thin Cylindrical Shells under Axial Compression, *International Journal of Solids and Structures* 37, 2000.
- NX Nastran, *Handbook for Nonlinear Analysis* (SOL 106).
- Timoshenko, S. P. & Gere, J. M., *Theory of Elastic Stability*, Chapter 11, McGraw-Hill, 1961.
- von Karman, T., Dunn, L. G. & Tsien, H., The Influence of Curvature on the Buckling

- Characteristics of Structures, *Journal of the Aeronautical Sciences* 7, 1940.
- von Karman, T. & Tsien, H., The Buckling of Thin Cylindrical Shells under Axial Compression, *Journal of the Aeronautical Sciences* 8, 1941.
- Yamaki, N., *Elastic Stability of Circular Cylindrical Shells*, Elsevier Science Pub. Co., Amsterdam, New York, 1984.
- Zhu, E., Mandal, P., Calladine, C. R., Buckling of Thin Cylindrical Shells: an Attempt to Resolve a Paradox, *International Journal of Mechanical Sciences* 44, 2002.