

VALIDACIÓN EXPERIMENTAL DE METODOLOGÍAS Y MODELOS EN EL CÁLCULO DE FRECUENCIAS DE UN PUENTE METÁLICO

Daniel H. Felix ^a, Salvador La Malfa ^b, Carlos A. Rossit ^{a,b}, Enrique Gil ^a, Alejandro Sardón ^{a,c}

^aDepartamento de Ingeniería, Instituto de Mecánica Aplicada (IMA), Universidad Nacional del Sur, (UNS), Avda. Alem 1253, 8000 Bahía Blanca, Argentina <http://www.uns.edu.ar>

^bConsejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET), Argentina

^cFacultad de Ingeniería- Universidad Nacional de La Patagônia San Juan Bosco, Km 4, 9000, Comodoro Rivadavia, Chubut, Argentina

E-mail: dhfelix@criba.edu.ar, slamalfa@criba.edu.ar, carossit@criba.edu.ar,
enrigil@bvconline.com.ar, sardon@ing.unp.edu.ar

Palabras clave: Puente metálico, vibración transversal, puente en arco, métodos aproximados

Resumen. Los puentes metálicos son en general estructuras esbeltas sobre las que actúan en muchos casos sollicitaciones dinámicas. Por ello resulta de interés el conocimiento de determinados parámetros que caracterizan su comportamiento dinámico. El más importante de ellos lo constituyen sus frecuencias naturales de vibración. Existen variados procedimientos analíticos y numéricos que permiten a los ingenieros de diseño predecir las frecuencias naturales de tales estructuras. Es fundamental, en consecuencia, conocer la aproximación de las metodologías empleadas y de los modelos propuestos.

En el presente trabajo se comparan los valores de frecuencia natural obtenidos en un puente metálico en arco de directriz circular, existente en la ciudad de Bahía Blanca, con los valores calculados a través de distintos métodos aplicados en modelos de la estructura planteados al efecto.

Esto permite obtener conclusiones sobre la eficiencia de los métodos de cálculo analizados y la validez de las hipótesis simplificadoras impuestas en las modelizaciones de la estructura.

1 INTRODUCCIÓN

Un tema de permanente preocupación de los ingenieros de diseño, sin duda lo constituye una correcta relación entre los modelos analizados a nivel de proyecto y las estructuras construidas, (Karnovsky et al, 2004; Rades, 1994). Es necesaria esa correcta relación para asegurar que las hipótesis de diseño se reflejen en su comportamiento mecánico una vez concretada.

En efecto, en la etapa de diseño se cuenta con poderosas herramientas matemáticas que permiten estimar determinados parámetros que caracterizan su comportamiento estructural. La eficiencia de dichas herramientas, aumenta en la medida en que los modelos analizados representen con adecuada aproximación a las estructuras en funcionamiento..

En el caso de puentes metálicos en arco, por tratarse de estructuras naturalmente esbeltas, los efectos dinámicos pueden asumir importancia determinante (Chidamparam and Leissa, 1993; Auciello and De Rosa; 1994; Veletsos et al, 1972), ya que en general, sus primeras frecuencias son bajas, del orden de las sollicitaciones a que están sometidas.

En el presente trabajo, se analiza el caso de un puente metálico en arco de directriz circular ubicado en el ejido urbano de la ciudad de Bahía Blanca.

Fueron medidas las tres primeras frecuencias naturales de vibración transversal en el plano vertical del puente.

Ellas fueron comparadas con los valores obtenidos a través de un planteo variacional, Método de Ritz (Leissa, 2005) y mediante su formulación con el Método de Elementos Finitos (Rossi, 2007) por medio del software Algor, (ALGOR, 2009).

2 ESTRUCTURA DEL PUENTE

El arco que forma la estructura principal del puente está compuesto por 4 vigas IPN 200 dispuestas según lo indicado en las Figura 1 y Figura 2. La directriz del arco tiene un radio de curvatura de 53,084 m y una semiapertura de 12°. Las 4 vigas se hallan vinculadas transversalmente mediante una serie de planchuelas.

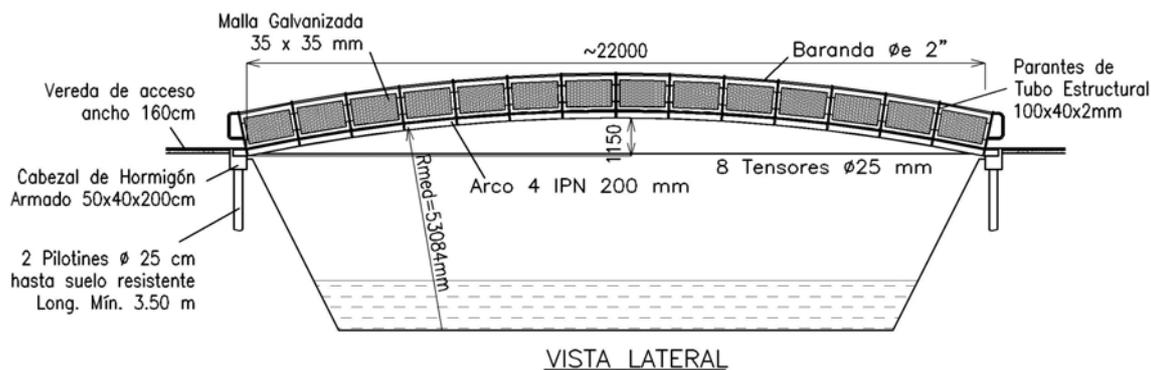


Figura 1: Vista lateral en la que se aprecia la estructura en arco

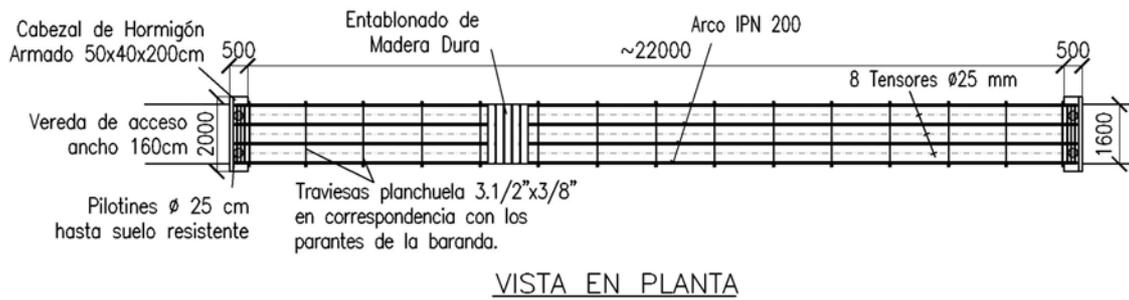


Figura 2: Vista en planta con detalle de disposición de vigas, planchuelas y entablado

En la **Figura 3** se muestra un detalle de la sección transversal del puente, en la que se aprecia los 4 perfiles IPN y el entablado.

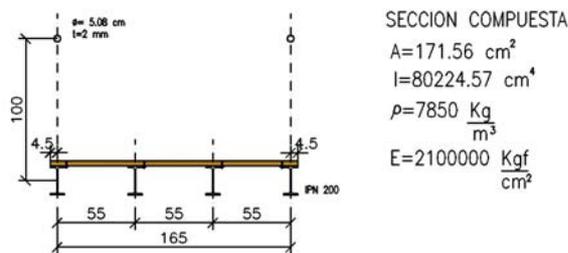


Figura 3: Sección transversal del puente con detalle de la disposición transversal de vigas y del entablado.

Cada extremo se apoya sobre un cabezal de H°A° que contiene dos pilotines que llegan hasta el suelo resistente, como muestra la **Figura 4**.

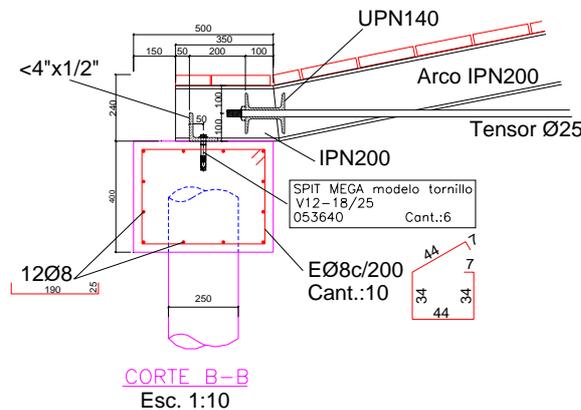


Figura 4: Detalle de los apoyos del puente

La estructura se completa con un entablado de madera y barandas metálicas a cada lado del puente. (Ver **Figura 5**).

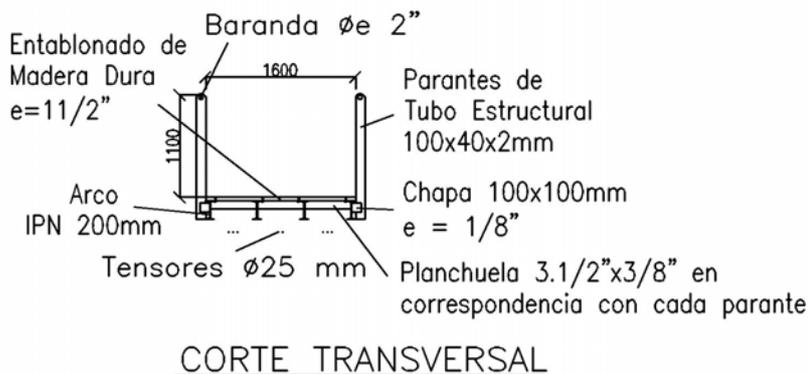


Figura 5: Corte transversal que muestra vigas, entablonado, parantes y barandas.

Los extremos del puente se hallan vinculados además mediante 8 tensores de 25 mm de diámetro que se aprecian en la imagen de la [Figura 6](#).



Figura 6: Imagen del puente en la que se aprecian los elementos descriptos

3 ANÁLISIS EXPERIMENTAL. MEDICIÓN DE FRECUENCIAS NATURALES

En el proceso de medición, análisis de frecuencias naturales y modos de vibración, es necesario apartar de su posición de equilibrio al sistema bajo análisis, luego este vibrará a su o sus frecuencias naturales. Sobre dicho sistema se ubica un elemento transductor, como podría ser un acelerómetro, que sería el encargado de convertir la vibración mecánica en señal eléctrica, para luego ser procesada y analizada por el equipo de medición, ([Peralta et al, 2009](#)). Comúnmente puede tratarse de un analizador espectral (FFT). Este último nos mostrará en un gráfico espectral las distintas frecuencias y amplitudes obtenidas.

En el puente, en esta oportunidad, sólo fueron analizados los modos vibratorios correspondientes al eje vertical (Eje Y), por lo tanto el transductor para la medición (acelerómetro) fue ubicado en la parte superior del puente en dirección vertical y en dos puntos ubicados a una distancia de 5 metros de cada uno de los extremos (ver [Figura 7](#)). Esos puntos de medición fueron determinados en virtud de análisis previos sobre las primeras formas modales de un arco de manera de no posicionar el transductor en un nodo del modo.

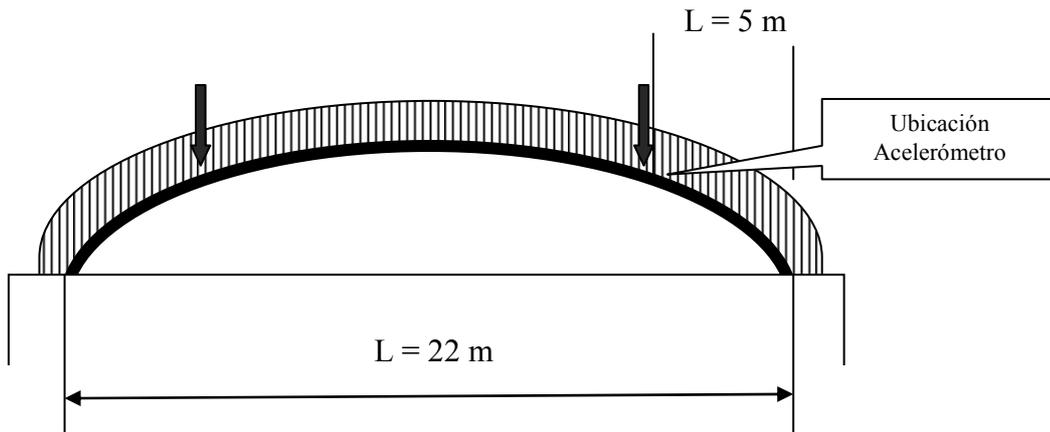


Figura 7: Puntos de ubicación del acelerómetro para las mediciones

Luego de instalar el acelerómetro en uno de los puntos de medición, se procede a sacar de su posición de equilibrio al puente mediante la circulación veloz de un peatón, el puente oscilará a sus distintos modos, inmediatamente luego de que el peatón desciende, se obtiene el espectro en el analizador (FFT). Dichas mediciones fueron repetidas en varias oportunidades a efecto de evaluar la repetitividad en las mediciones, (Peralta et al, 2008). Uno de los espectros obtenidos se observa en la Figura 8. De el mismo se desprende la existencia de tres frecuencias predominantes. La primera considerada como el primer modo en dirección vertical (Y) es la de 4,819 Hz (indicada en la parte superior dentro del espectro $F = 4,819$)

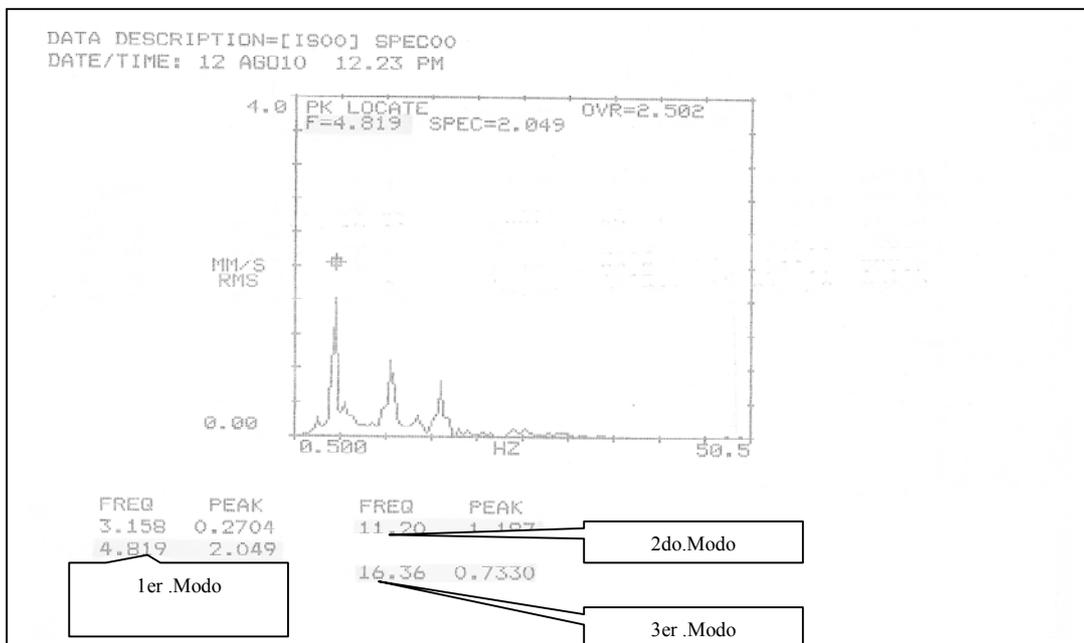


Figura 8: Espectro con las tres componentes más representativas

En la parte inferior del espectro se observa un listado, indicado por el Analizador Espectral, de las componentes predominantes observadas, (ver los tres picos dentro del espectro) con sus respectivas amplitudes. Correspondiendo entonces:

Primer modo: $f_1 = 4,819$ Hz

Segundo modo: $f_2 = 11,20$ Hz

Tercer Modo: $f_3 = 16,36$ Hz

El espectro de la Figura 8 fue obtenido en uno de los puntos señalados, identificado como ingreso Norte. Luego sobre el punto opuesto, ingreso Sur, se obtuvieron distintos espectros mediante una excitación superior al puente. En este caso mediante saltos de un peatón de manera armónica pudo lograrse que el puente se moviera en su primer modo con gran amplitud. La frecuencia correspondiente al primer modo está indicada en la Figura 9.

El valor indicado dentro del espectro en la parte superior fue $F = 4,567$ SPEC = 57,08.

Ello indica que en este caso el valor de frecuencia obtenido es 4,567 Hz y la amplitud vibratoria fue de 57,08 mm/seg. RMS, amplitud esta casi 30 veces superior a la obtenida en la etapa de excitación indicada en Figura 8 ($F = 4,819$ SPEC = 2,049 mm/seg RMS)

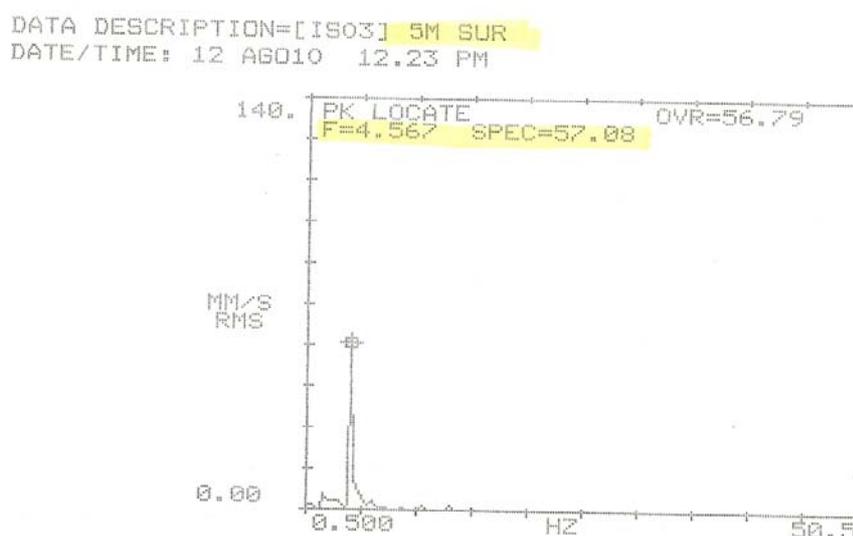


Figura 9: Espectro obtenido sector Sur con excitación del Primer Modo

Si comparamos el espectro obtenido sobre sector Norte ($F = 4,819$ Hz) respecto del obtenido sector Sur ($F = 4,567$ Hz) existe una pequeña diferencia atribuible al tipo de construcción y condiciones de apoyo que pueden diferir entre un sector y otro.

De las distintas mediciones realizadas la frecuencia obtenida del primer modo oscilaba dentro de los márgenes 4,4/4,8 Hz.

4 MÉTODOS ANALÍTICOS Y NUMÉRICOS

4.1 Método de Elementos Finitos

Se procedió a modelar el puente mediante la utilización del software ALGOR de Elementos Finitos, (ALGOR, 2009). Se utilizaron elementos vigas para cada una de las partes que conforman la estructura. Se definieron un total de 5 grupos de elementos vigas para modelar: Vigas principales, planchuelas transversales, columnas de baranda, barandas y entablado de madera.

La Figura 10 muestra una vista en perspectiva de la malla de elementos finitos utilizada conformada por un total de 1142 elementos.

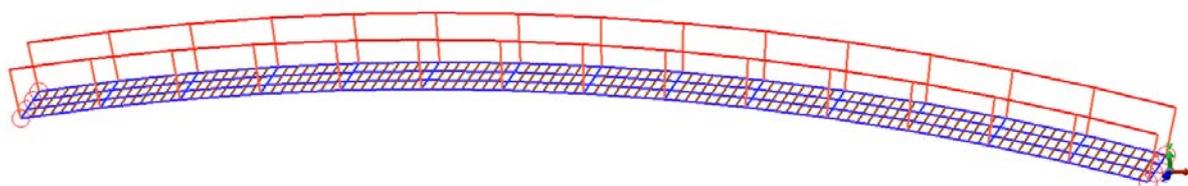


Figura 10: Vista en perspectiva del entramado de vigas que conforma la malla de elementos finitos

En la [Tabla 1](#) se muestran las características geométricas de la sección transversal de los elementos viga que conforman cada grupo.

Grupo	Descripción	Cantidad de elementos	Forma de la sección transversal	Área [m ²]	I ₁ [m ⁴]	I ₂ [m ⁴]
1	Vigas principales del tablero	448	Perfil IPN 200	$3,34 \times 10^{-3}$	$2,14 \times 10^{-5}$	$1,17 \times 10^{-6}$
2	Planchuelas transversales	45	Rectangular maciza	$8,4677 \times 10^{-4}$	$5,57 \times 10^{-5}$	$6,0 \times 10^{-9}$
3	Parantes de barandas	339	Rectangular hueca	$2,76 \times 10^{-4}$	$3,52 \times 10^{-7}$	$8,50 \times 10^{-8}$
4	Barandas	30	Circular hueca	$6,258 \times 10^{-4}$	$1,552 \times 10^{-6}$	$1,552 \times 10^{-6}$
5	Entablado de madera	280	Rectangular maciza	$6,65 \times 10^{-3}$	$2,0 \times 10^{-5}$	$6,78 \times 10^{-7}$

Tabla 1: Características geométricas de la sección transversal de los elementos viga que conforman el modelo.

Los apoyos del puente se modelaron en primer lugar adoptando el esquema de arco biarticulado, no incluyéndose los tensores en el análisis, ya que su efecto es tenido en cuenta al considerar fijos los apoyos extremos.

Los resultados obtenidos para las primeras frecuencias y formas modales fueron los siguientes:

$$f_1 = 4,3804 \text{ Hz}$$

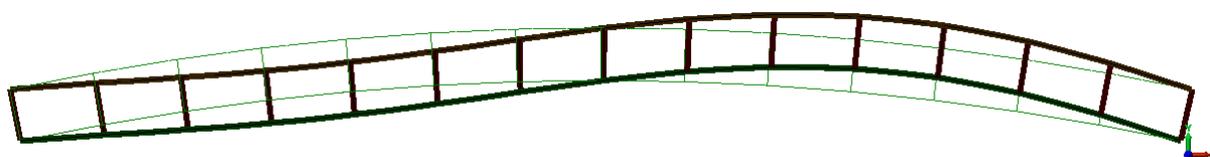


Figura 11: Primera forma modal en el plano vertical (antisimétrica)

$$f_2 = 11,9472 \text{ Hz}$$

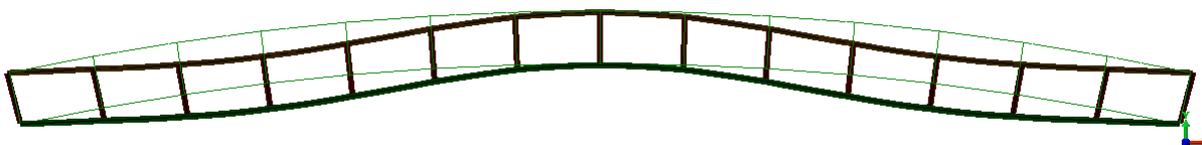


Figura 12: Segunda forma modal en el plano vertical (simétrica)

$$f_3=16,5562 \text{ Hz}$$

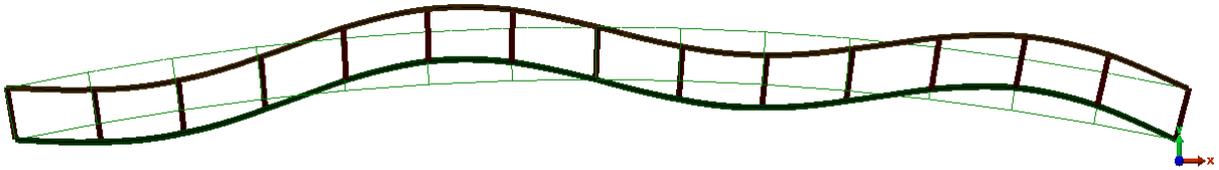


Figura 13: Tercera forma modal en el plano vertical (antisimétrica)

Si se comparan los valores medidos con los determinados numéricamente mediante la aplicación del MEF puede apreciarse una buena concordancia.

Cuando se adopto el modelo de arco biempotrado se obtuvieron los siguientes resultados

$$f_1=6,5226 \text{ Hz}$$

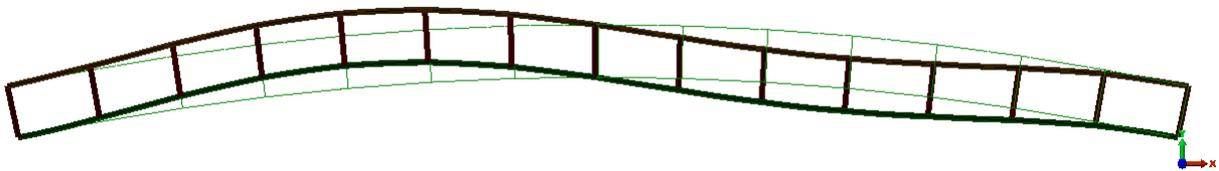


Figura 14: Primera forma modal en el plano vertical (antisimétrica)

$$f_2= 13.9689 \text{ Hz}$$

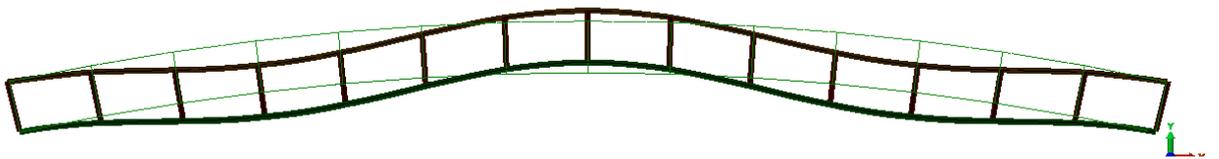


Figura 15: Segunda forma modal en el plano vertical (simétrica)

$$F_3=20,6957 \text{ Hz}$$

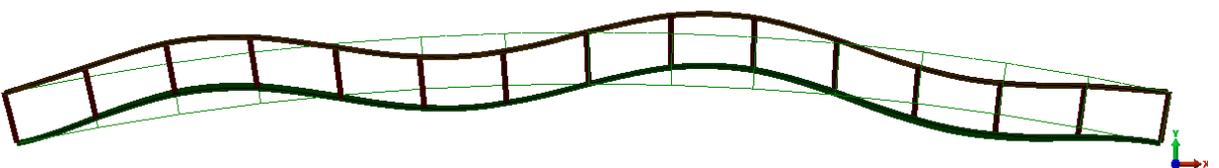


Figura 16: Tercera forma modal en el plano vertical (antisimétrica)

Como resulta esperable el modelo biempotrado arroja valores de frecuencia muy elevados en relación a los obtenidos experimentalmente.

Con el objeto de estimar la incidencia del entablado de madera en el comportamiento dinámico global del puente biarticulado, se obtuvieron resultados numéricos adicionales sin tener en cuenta la presencia del mismo. Los correspondientes valores de frecuencia fueron:

$$f_1= 5.2892 \text{ Hz}$$

$$f_2=14.4236 \text{ Hz}$$

$$f_3=19.9883 \text{ Hz}$$

Finalmente se estimó para el modelo de arco biarticulado con entablonado, la rigidez de la fundación (Richart, 1970), reemplazándose la restricción total al movimiento vertical por 8 resortes con una rigidez equivalente de 5×10^8 N/m cada uno. En este caso la elevada rigidez de la fundación hizo que el modelo no se alterara significativamente y en consecuencia no se obtuvieron diferencias apreciables en relación al modelo con restricción total al desplazamiento vertical.

4.2 Método de Ritz

Cuando el arco es suficientemente esbelto pueden desprejarse los efectos de deformación por corte e inercia rotatoria, (Tufekci et al, 1998; Tufekci et al, 2006).

En primer lugar definimos los parámetros geométricos que definen el comportamiento cinemático del arco (Laura et al, 1987). (ver Figura 17):

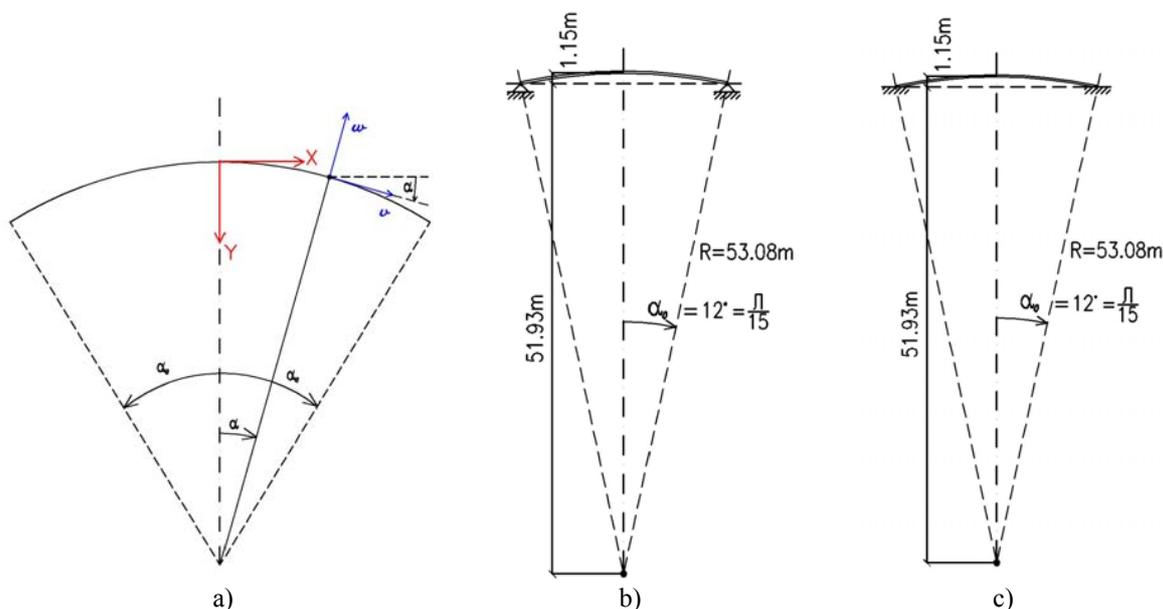


Figura 17: a) Coordenadas espaciales y corrimientos sobre la directriz del arco, b) Esquema del modelo biarticulado, c) Esquema del modelo biempotrado.

siendo:

Radio de curvatura	R
Componente radial del corrimiento	w
Componente transversal del corrimiento	v
Relación entre componentes	$w = \frac{\partial v}{\partial \alpha}$
Coordenada intrínseca	s
Coordenada angular	α
Relación entre coordenadas	$R = \frac{ds}{d\alpha}$

Cuando el arco, de sección transversal constante, vibra transversalmente en el plano vertical que contiene su directriz según uno de sus modos normales, puede expresarse el corrimiento transversal:

$$v(\alpha, t) = V_0(\alpha)e^{i\omega t} \quad (1)$$

siendo el corrimiento radial

$$w(\alpha, t) = W_0(\alpha)e^{i\omega t} \quad (2)$$

y la relación entre modos normales:

$$W_0 = \frac{dV_0}{d\alpha} \quad (3)$$

Su movimiento, si se desprecia la energía de deformación axial y se adopta la teoría de vigas de Bernoulli-Euler, es gobernado por la siguiente funcional de energía:

$$J(V_0) = \frac{E}{2} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{I(\alpha)}{R(\alpha)^3} \left[V_0''' + V_0' - \frac{R'(\alpha)}{R(\alpha)} (V_0'' + V_0) \right]^2 d\alpha - \frac{\rho\omega^2}{2} \int_{-\alpha}^{\alpha} A(\alpha)R(\alpha) (V_0'^2 + V_0^2) d\alpha \quad (4)$$

Que en el caso de un arco de directriz circular como el presente se transforma en:

$$J(V_0) = \frac{1}{2} \frac{EI}{R^3} \int_{-\alpha}^{\alpha} (V_0''' + V_0')^2 d\alpha - \frac{1}{2} \rho AR \omega^2 \int_{-\alpha}^{\alpha} (V_0'^2 + V_0^2) d\alpha \quad (5)$$

donde E es el módulo de elasticidad del material e I su momento de inercia.

Debe adoptarse una expresión que aproxime la deformación del arco. En este caso, la aproximación se efectuará sobre la amplitud de la componente radial del corrimiento V_a tomando tres términos de una función base coordenada v_a que cumpla con las condiciones de borde. Resulta de este modo la solución aproximada con tres términos:

$$V_a = A_1 v_a + A_2 v_a \alpha^2 + A_3 v_a \alpha^4 \quad (6)$$

donde la función coordenada satisface las condiciones de borde esenciales para el arco biarticulado y para el arco biempotrado.

Función coordenada arco biarticulado. Primer modo asimétrico

$$v_a = -3 + 7 \left(\frac{\alpha}{\alpha_0} \right)^2 - 5 \left(\frac{\alpha}{\alpha_0} \right)^4 + \left(\frac{\alpha}{\alpha_0} \right)^6 \quad (7)$$

Función coordenada arco biarticulado. Segundo modo asimétrico

$$v_a = -2 \left(\frac{\alpha}{\alpha_0} \right) + 5 \left(\frac{\alpha}{\alpha_0} \right)^3 - 4 \left(\frac{\alpha}{\alpha_0} \right)^5 + \left(\frac{\alpha}{\alpha_0} \right)^7 \quad (8)$$

Función coordenada arco biempotrado. Primer modo asimétrico

$$v_a = -1 + 3 \left(\frac{\alpha}{\alpha_0} \right)^2 - 3 \left(\frac{\alpha}{\alpha_0} \right)^4 + \left(\frac{\alpha}{\alpha_0} \right)^6 \quad (9)$$

Función coordenada arco biempotrado. Segundo modo asimétrico

$$v_a = - \left(\frac{\alpha}{\alpha_0} \right) + 3 \left(\frac{\alpha}{\alpha_0} \right)^3 - 3 \left(\frac{\alpha}{\alpha_0} \right)^5 + \left(\frac{\alpha}{\alpha_0} \right)^7 \quad (10)$$

El Método de Ritz establece la minimización de la funcional gobernante:

$$\frac{\partial J(V_0)}{\partial A_1} = \frac{\partial J(V_0)}{\partial A_2} = \frac{\partial J(V_0)}{\partial A_3} = 0 \quad (11)$$

La condición de no trivialidad del sistema de ecuaciones resultante en los parámetros A_i conduce a la ecuación de frecuencias.

Los datos geométricos del arco y mecánicos de su material constitutivo son los indicados en el punto 2.

Con respecto a la vinculación del puente, se considera que teniendo en cuenta la escasa restricción al giro que supone la vinculación descrita y la presencia de los tensores que con su escasa deformabilidad impiden desplazamientos relativos horizontales entre los apoyos, lo más adecuado es considerar un puente biarticulado.

Con esos datos se han obtenido los siguientes valores para el caso biarticulado:

Primera frecuencia arco biarticulado:

$$\omega_1 = 222.527 \frac{1}{R^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} = 32.32 \text{ 1/seg} = 5.14 \text{ Hz}$$

Segunda frecuencia arco biarticulado

$$\omega_2 = 478.684 \frac{1}{R^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} = 69.52 \text{ 1/seg} = 11.06 \text{ Hz}$$

Como se observa, la aproximación a los valores medidos “in situ” es excelente.

A los efectos de evaluar la incidencia de la vinculación se indican a continuación los valores de frecuencias para el arco biempotrado:

Primera frecuencia arco biempotrado

$$\omega_1 = 348.899 \frac{1}{R^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} = 50.67 \text{ 1/seg}^2 = 8.06 \text{ Hz}$$

Segunda frecuencia arco biempotrado

$$\omega_2 = 630.815 \frac{1}{R^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} = 91.61 \text{ 1/seg}^2 = 14.58 \text{ Hz}$$

5 CONCLUSIONES

En el presente trabajo se han comparado los valores medidos en un puente existente en la ciudad de Bahía Blanca, con los valores aproximados que se han obtenido a través de un procedimiento analítico variacional (Método de Ritz) y a través del método de Elementos Finitos en modelos que se construyeron al efecto.

Debe consignarse la buena concordancia que desde un punto de vista ingenieril, se observa en los resultados. Es de destacar en ese sentido, los resultados obtenidos a través del Método de Ritz, con un modelo simple a través de una aproximación de tres términos de la función coordenada.

A su vez, y con el objeto de evaluar la incidencia de las condiciones de borde, puede concluirse que el efecto de la condición de empotramiento, respecto de la articulada, no incrementa las frecuencias en la magnitud en que lo hace en caso de vigas vibrantes.

AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen al Profesor Consulto, Ing. Raúl E. Rossi por su invaluable contribución para la realización del presente trabajo, y al Sr. Osvaldo Álvarez (CIC) por su colaboración en las mediciones.

Asimismo, agradecen a la Secretaría General de Ciencia y Tecnología de la Universidad Nacional del Sur y al Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET) por su auspicio.

6 REFERENCIAS

- ALGOR V23.1, “*Natural frequencies and modal shapes*”, Algor Inc. 2009.
- Auciello N.M., De Rosa M.A., Free vibrations of circular arches: a review. *Journal of Sound and Vibration*, 174, 433–458, 1994.
- Chidamparam P. and Leissa A.W., Vibrations of planar curved beams, rings y arches. *Applied Mechanics Reviews*, 46(9), 467-483, 1993.
- Karnovsky I.A. and Lebed O. I., *Non-classical Vibrations of Arches and Beams*. Mc Graw-Hill Engineering Reference, 2004.
- Laura P.A.A., Maurizi M.J., Recent research on vibrations of arch-type structures. *The Shock and Vibration Digest*, 19 6–9, 1987.
- Leissa A.W., The historical bases of the Rayleigh and Ritz methods. *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 287, pp. 961-978, 2005.
- Peralta M.H., Ercoli N., Pico L. y La Malfa S., Utilización de Técnicas Experimentales Dinámicas en la Evaluación de Estructuras. 8° EIPAC, *Encuentro de Investigadores y Profesionales Argentinos de la Construcción*, Mendoza, Argentina, 2009.
- Peralta M.H., Ercoli N., Bacchiarello R. y La Malfa S., Medición y análisis de vibraciones como técnica de inspección de puentes. *XX Jornadas Argentinas de Ingeniería Estructural- Encuentro de Arquitectos e Ingenieros Estructurales*, Centro Cultural Borges, Buenos Aires, Argentina, 15 al 17 de octubre de 2008.
- Rades M., Vibration Limits for Industrial Buildings. *The Shock and Vibration Digest*, v. 26, n°3, 1994.
- Richart F.E. Jr., Hall, J.R. Jr. and Woods R.D., *Vibrations of soils and foundations*. Prentice Hall, 1970.
- Rossi R. E. *Introducción al análisis de Vibraciones con el Método de Elementos Finitos*. Edit. EdiUNS, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, Argentina, 238 pp. ISBN 978-987-1171-71-2, 2007.
- TÜFEKÇİ E., and Arpacı A. Exact solution of in-plane vibrations of circular arches with account taken of axial extension, transverse shear and rotatory inertia effects. *Journal of Sound and Vibration*, 209(5), 845-856, 1998.
- Tufekci E., Ozdemirci O., Exact solution of free in-plane vibration of a stepped circular arch. *Journal of Sound and Vibration*, 295, 725–738, 2006.
- Veletsos A.S., Austin W.J., Pereira C.A.L. and Wung S.J., Free in-plane vibration of circular arches. *Journal of Engineering Mechanics Division, ASCE* 98, 311-329, 1972.