

PLANTEO DISCRETO-CONTINUO DE PIEZAS RETICULADAS PLANAS Y ESPACIALES DISCRET-CONTINUOUS STATEMENT OF THE STRUCTURAL BEHAVIOR OF PLANE AND SPATIAL LATTICE ELEMENTS

Carlos P. Filipich^{a,b}, Alberto M. Guzmán^c and Marta B. Rosales^{b,d}

^a*CINTA, FRBB, Universidad Tecnológica Nacional, Bahía Blanca, Argentina*

^b*Departamento de Ingeniería, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, Argentina*

^c*CEREDETEC, FRM, Universidad Tecnológica Nacional, Mendoza, Argentina*

^d*CONICET, Argentina*

Palabras claves: piezas compuestas, rigidez, equilibrio, estabilidad, sistemas diferenciales.

Resumen. Dentro de la construcción metálica tienen un uso muy difundido las piezas compuestas, constituidas por perfiles paralelos denominados largueros o montantes conectados entre sí por diversos sistemas como son los empresillados o las malla de reticulados. En numerosos sistemas estructurales, esta tipología se presenta en forma repetida y sistemática y por ello su análisis estructural detallado resulta extremadamente caro. Por ello, es usual utilizar modelos equivalentes que surgen de reemplazar el reticulado por una formulación de viga de alma llena. Existen enfoques basados en el análisis de rigidez y otros, como en este trabajo, basado en planteos energéticos. Aquí se generaliza el último método y para ello, se calculan las sumas de las energías de deformación de los distintos elementos, y aceptando la hipótesis de que los elementos son suficientemente numerosos, se aproximan las sumatorias por integrales clásicas de Cauchy-Riemann (pasaje del discreto al continuo). Se dispone entonces, de funcionales que permiten calcular automáticamente, por medio de algún procedimiento conocido (por ejemplo, el Teorema de Mínima Energía), las ecuaciones diferenciales de equilibrio de estas piezas, y adicional, y fundamentalmente, hallar sin mayores complicaciones algebraicas o intuitivas las Condiciones de Borde. En este trabajo se asume el caso complejo, en el cual la traza de los largueros determina una disposición triangular con un reticulado de unión en cada uno de los tres planos que conforman los largueros dos a dos. Además del aporte de la deformación axial en los largueros, se tiene en cuenta el efecto de segundo orden. Por último, se presentan ilustraciones numéricas de elementos estructurales reticulados planos, utilizando la formulación equivalente para resolver problemas estáticos. Debe mencionarse que este modelo equivalente será utilizado para los estudios estáticos y dinámicos de torres autosustentadas o mástiles arriostrados de uso en estructuras de soporte de antenas de comunicaciones, partiendo de un ahorro significativo en el tamaño de los modelos.

1 INTRODUCCIÓN

Dentro de la construcción metálica tienen un uso muy difundido las piezas compuestas constituidas por perfiles paralelos denominados montantes o largueros, conectados entre sí por diagonales. En lo que hace fundamentalmente a la industria de las telecomunicaciones, las antenas generalmente son soportadas por mástiles reticulados. Estos sistemas estructurales presentan una importante cantidad de elementos (largueros y diagonales) por lo que es habitual en el diseño utilizar modelos equivalentes que surgen de reemplazar al reticulado por una formulación de viga de alma llena, resultando ello en un menor costo computacional a la hora del análisis (Madagula *et al.*, 1998; Wahba *et al.*, 1998). Para la determinación de esta formulación, existen enfoques basados en el análisis de la flexibilidad (Ben Kahla, 1995; Wahba *et al.*, 1998) y otros, como los basados en planteos energéticos. En base a este último método y a partir de calcular la suma de la energía potencial y cinética almacenada en cada elemento del reticulado, y aceptando la hipótesis de que las diagonales son suficientemente numerosas, las sumatorias son aproximadas por integrales clásicas de Cauchy-Riemann (pase del discreto al continuo). El mismo enfoque se utilizó en (Filipich y Bambill, 2003) para pasar de piezas compuestas empresilladas -problema discreto- a un problema continuo que desemboca en un sistema diferencial lineal de 6^{to} orden. Se dispone así de funcionales de energía que permiten determinar, mediante la aplicación del Teorema de Mínima Energía, las ecuaciones de campo y las condiciones de borde del problema planteado. La solución de estas ecuaciones permite encontrar las propiedades equivalentes para la formulación de la viga de alma llena. El alcance del presente trabajo, primera parte del planteo energético presentado, contempla la determinación de la energía potencial de cada elemento de un mástil reticulado en zig-zag y de sección transversal triangular, considerando efectos de segundo orden presente en los largueros. Luego y bajo la aceptación de ciertas hipótesis, se pasa del dominio discreto al continuo obteniendo así el funcional de energía potencial del sistema. Por último, se presentan ilustraciones numéricas de elementos estructurales reticulados planos, utilizando la formulación equivalente para resolver problemas estáticos.

2 MÁSTIL RETICULADO ANALIZADO

Se analiza el caso de un mástil reticulado en zig-zag, de sección transversal triangular y equilátera. Los largueros y diagonales son de directriz recta, sección transversal constante y de material elástico y lineal.

La pieza presenta una altura H (ver Fig. 1), y está constituida por tres largueros continuos unidos entre sí por tres planos de diagonales iguales y articuladas en sus extremos. El área de la sección transversal de cada larguero es A_l y la de cada diagonal A_d . El momento de inercia de los largueros respecto a cada una de las direcciones principales es J_{ly} y J_{lz} . La longitud de cada diagonal es L_d .

Se acepta que la separación o paso Δ de las diagonales es relativamente pequeña respecto a la altura de la pieza, lo que equivale a aceptar un número de diagonales suficientemente grande. Se designa genéricamente como módulo n de la pieza, al tramo de altura en el cual quedan contenidas dos diagonales por cada cara o plano de unión.

3 PLANTEO DEL PROBLEMA

En Figura 1 se muestra la pieza en su configuración inicial o de referencia, la que frente a una acción externa, adquiere una nueva posición denominada configuración deformada. Frente a este cambio de configuración, los nodos de la pieza experimentan corrimientos en cada una de

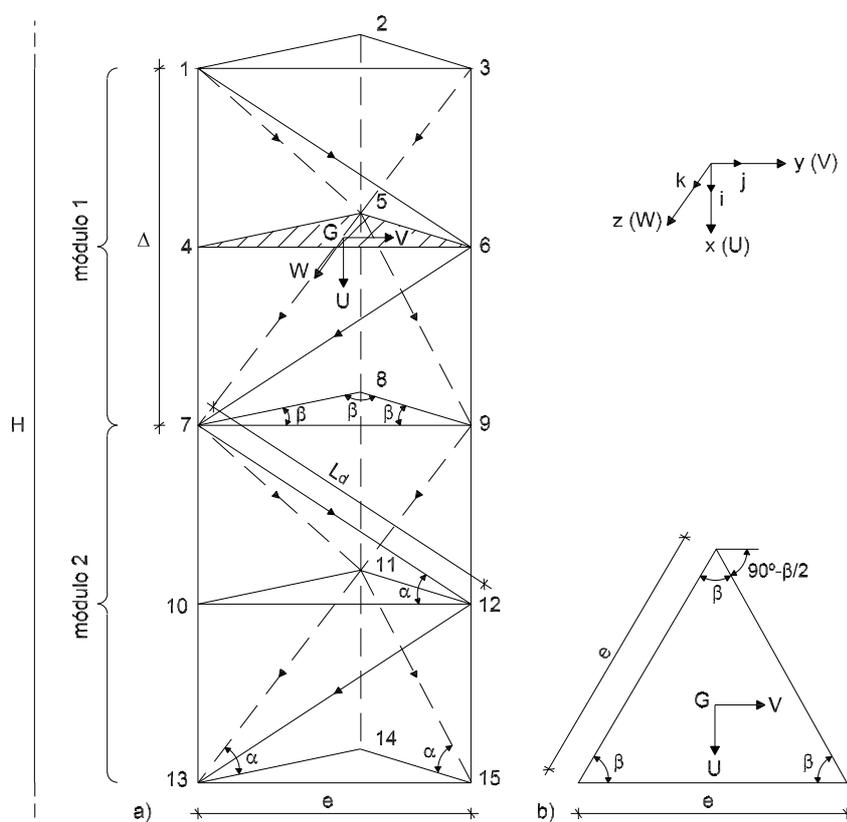


Figura 1: Pieza analizada. a) vista. b) sección transversal

las direcciones principales, siendo los mismos, las funciones $u(x)$, $v(x)$, $w(x)$. Estos corrimientos hacen que los elementos del reticulado almacenen energía elástica de deformación.

A la mitad de altura de cada módulo del reticulado, es decir en $\Delta/2$, consideramos una sección transversal plana de referencia. Los corrimientos de los nodos ubicados fuera de esta sección, son expresados mediante serie de Taylor a partir de los corrimientos de los nodos contenidos en la sección de referencia.

3.1 Energía elástica en diagonales

Considerando el módulo 1, y a partir de los corrimientos experimentados en sus nodos, se determina la energía elástica almacenada en cada diagonal del mismo.

Se analiza la diagonal $D^{(16)}$ ubicada sobre la cara 1 y que va desde el nodo 1 al nodo 6. Expresando los corrimientos del nodo 1 a partir de la información conocida en el nodo 4, resulta:

$$\begin{aligned}
 u_1 &= u_4 - u'_4 \frac{\Delta}{2} \\
 v_1 &= v_4 - v'_4 \frac{\Delta}{2} \\
 w_1 &= w_4 - w'_4 \frac{\Delta}{2}
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

siendo $(\bullet)' \equiv \frac{d(\bullet)}{dx}$

Designando a $\vec{d}^{(16)}$ como el vector posición de la diagonal $D^{(16)}$ en la configuración de

referencia, resulta:

$$\vec{d}^{(16)} = \check{i}dx + \check{j}dy = L_d(\check{i}\sin\alpha + \check{j}\cos\alpha) \quad (2)$$

y siendo su módulo:

$$|\vec{d}^{(16)}| = L_d \quad (3)$$

Designando ahora $\vec{d}^{*(16)}$ como el vector posición en la configuración deformada, resulta:

$$\vec{d}^{*(16)} = \vec{d}^{(16)} + \check{i}(u_6 - u_1) + \check{j}(v_6 - v_1) + \check{k}(w_6 - w_1) \quad (4)$$

Reemplazando a $\vec{d}^{(16)}$ por sus componentes, desarrollando la raíz por expansión binomial y aceptando como prescindibles los términos de orden superior por ser $u_{(x)}$, $v_{(x)}$, $w_{(x)}$ pequeños corrimientos, el módulo del vector $\vec{d}^{*(16)}$ resulta:

$$|\vec{d}^{*(16)}| \approx L_d \left[1 + \frac{(u_6 - u_1)}{L_d} \sin\alpha + \frac{(v_6 - v_1)}{L_d} \cos\alpha \right] \quad (5)$$

Los corrimientos experimentados por la diagonal, al pasar de una configuración a la otra, resultan ser la diferencia entre los módulos analizados. A partir de ello se determina la deformación en la diagonal, la cual resulta:

$$\varepsilon_{D^{(16)}} \approx \frac{|\vec{d}^{*(16)}| - |\vec{d}^{(16)}|}{L_d} = \frac{(u_6 - u_1)}{L_d} \sin\alpha + \frac{(v_6 - v_1)}{L_d} \cos\alpha \quad (6)$$

y con ello la energía de deformación elástica almacenada en la diagonal $D^{(16)}$:

$$U_{D^{(16)}} = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{D^{(16)}} \varepsilon_{D^{(16)}} dV \approx \frac{EA_d}{2L_d} \left[(u_6 - u_1) \sin\alpha + (v_6 - v_1) \cos\alpha \right]^2 \quad (7)$$

Con idéntico desarrollo se obtienen las energías almacenadas en las restantes diagonales del módulo 1:

$$U_{D^{(67)}} \approx \frac{EA_d}{2L_d} \left[(u_7 - u_6) \sin\alpha - (v_7 - v_6) \cos\alpha \right]^2 \quad (8)$$

$$U_{D^{(15)}} \approx \frac{EA_d}{2L_d} \left[(u_5 - u_1) \sin\alpha + (v_5 - v_1) \cos\alpha \cos\beta - (w_5 - w_1) \cos\alpha \sin\beta \right]^2 \quad (9)$$

$$U_{D^{(57)}} \approx \frac{EA_d}{2L_d} \left[(u_7 - u_5) \sin\alpha - (v_7 - v_5) \cos\alpha \cos\beta + (w_7 - w_5) \cos\alpha \sin\beta \right]^2 \quad (10)$$

$$U_{D^{(35)}} \approx \frac{EA_d}{2L_d} \left[(u_5 - u_3) \sin\alpha - (v_5 - v_3) \cos\alpha \cos\beta - (w_5 - w_3) \cos\alpha \sin\beta \right]^2 \quad (11)$$

$$U_{D^{(59)}} \approx \frac{EA_d}{2L_d} \left[(u_9 - u_5) \sin\alpha + (v_9 - v_5) \cos\alpha \cos\beta + (w_9 - w_5) \cos\alpha \sin\beta \right]^2 \quad (12)$$

Llamando a U_{D1} como la suma de las energías almacenadas en las diagonales del módulo 1 se obtiene, en el dominio discreto, el aporte de dichas diagonales a la energía potencial del sistema:

$$U_{D1} = U_{D^{(16)}} + U_{D^{(67)}} + U_{D^{(15)}} + U_{D^{(57)}} + U_{D^{(35)}} + U_{D^{(59)}} \quad (13)$$

Reemplazando y expresando los corrimientos de los nodos (por serie de Taylor) a partir de los corrimientos experimentados por los nodos del plano de referencia, resulta al desarrollar algebraicamente:

$$U_{D1} \approx \frac{EA_d}{2L_d} [A_1 \sin^2(\alpha) + B_1 \cos^2(\alpha) + C_1 \sin(\alpha) \cos(\alpha)] \quad (14)$$

en donde se ha llamado a:

$$A_1 = 2 \left[(u_4 - u_5)^2 + (u_4 - u_6)^2 + (u_5 - u_6)^2 \right] + \frac{1}{2} \left[2(u'_4)^2 + (u'_6)^2 \right] \Delta^2 \quad (15)$$

$$B_1 = 2 \left\{ (v_4 - v_6)^2 + \left[(v_4 - v_5) \cos \beta - (w_4 - w_5) \sin \beta \right]^2 + \left[(v_5 - v_6) \cos \beta + (w_5 - w_6) \sin \beta \right]^2 \right\} + \frac{1}{2} \left[(v'_4)^2 + (v'_4 \cos \beta - w'_4 \sin \beta)^2 + (v'_6 \cos \beta + w'_6 \sin \beta)^2 \right] \Delta^2 \quad (16)$$

$$C_1 = 2 \left[- (u_4 - u_5)(v'_4 \cos \beta - w'_4 \sin \beta) - (u_5 - u_6)(v'_6 \cos \beta + w'_6 \sin \beta) - (v_4 - v_5)u'_4 \cos \beta - (v_5 - v_6)u'_6 \cos \beta - (v_4 - v_6)u'_4 + (w_4 - w_5)u'_4 \sin \beta - (w_5 - w_6)u'_6 \sin \beta \right] \Delta \quad (17)$$

De este mismo modo se obtienen los coeficientes para cada uno de los módulos que forman parte de la pieza, y con ello, la energía potencial almacenada en toda y cada una de las diagonales debida a los corrimientos experimentados por el mástil reticulado en las direcciones U , V y W , resulta:

$$U_D = \frac{EA_d}{2L_d} \left[(A_1 + \dots + A_m) \sin^2 \alpha + (B_1 + \dots + B_m) \cos^2 \alpha + (C_1 + \dots + C_m) \sin \alpha \cos \alpha \right] \quad (18)$$

$$U_D = \frac{EA_d}{2L_d} \sum_{n=1}^m \left(A_n \sin^2 \alpha + B_n \cos^2 \alpha + C_n \sin \alpha \cos \alpha \right) \quad (19)$$

siendo m el número total de módulos del reticulado.

De este modo se ha obtenido en el dominio discreto la energía potencial almacenada en cada una de las diagonales que conforman el mástil reticulado en zig-zag.

Ahora bien, si se asume que la separación o paso Δ entre diagonales es relativamente pequeño con respecto a la altura H del mástil, entonces equivale matemáticamente a proponer que $\Delta \rightarrow 0$ cuando $m \rightarrow \infty$. De este modo podemos representar de manera aproximada a la suma de las energías almacenadas en las diagonales (dominio discreto) mediante la integral clásica de Cauchy-Riemann, como si se tratase de un dominio continuo. Por lo tanto resulta:

$$U_D = \lim_{(m \rightarrow \infty; \Delta \rightarrow 0)} \sum_{n=1}^m U_{Dn} \quad (20)$$

o bien con $dx = \Delta$

$$U_D = \frac{EA_d}{2L_d\Delta} \int_0^H (A \sin^2 \alpha + B \cos^2 \alpha + C \sin \alpha \cos \alpha) dx \quad (21)$$

Considerando ahora a una sección transversal genérica del reticulado y ubicada a una altura x (ver Fig. 2), los coeficientes resultan:

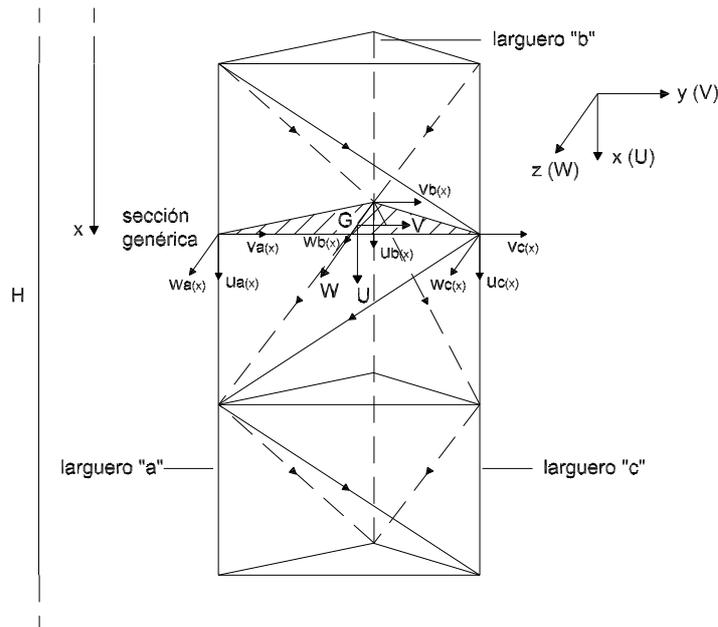


Figura 2: Sección transversal genérica

$$A = 2 \left[(u_{a(x)} - u_{b(x)})^2 + (u_{a(x)} - u_{c(x)})^2 + (u_{b(x)} - u_{c(x)})^2 \right] + \frac{1}{2} \left[2(u'_{a(x)})^2 + (u'_{c(x)})^2 \right] \Delta^2 \quad (22)$$

$$B = 2 \left\{ (v_{a(x)} - v_{c(x)})^2 + \left[(v_{a(x)} - v_{b(x)}) \cos \beta - (w_{a(x)} - w_{b(x)}) \sin \beta \right]^2 + \left[(v_{b(x)} - v_{c(x)}) \cos \beta + (w_{b(x)} - w_{c(x)}) \sin \beta \right]^2 \right\} + \frac{1}{2} \left[(v'_{a(x)})^2 + (v'_{a(x)} \cos \beta - w'_{a(x)} \sin \beta)^2 + (v'_{c(x)} \cos \beta + w'_{c(x)} \sin \beta)^2 \right] \Delta^2 \quad (23)$$

$$\begin{aligned}
C = 2 \left\{ \left[(w_{a(x)} - w_{b(x)}) \sin \beta - (v_{a(x)} - v_{b(x)}) \cos \beta - (v_{a(x)} - v_{c(x)}) \right] u'_{a(x)} - \right. \\
\left. - \left[(w_{b(x)} - w_{c(x)}) \sin \beta + (v_{b(x)} - v_{c(x)}) \cos \beta \right] u'_{c(x)} - \right. \\
\left. - \left[(u_{a(x)} - u_{b(x)}) \cos \beta + (u_{a(x)} - u_{c(x)}) \right] v'_{a(x)} - \right. \\
\left. - (u_{b(x)} - u_{c(x)}) \cos \beta v'_{c(x)} + (u_{a(x)} - u_{b(x)}) \sin \beta w'_{a(x)} - (u_{b(x)} - u_{c(x)}) \sin \beta w'_{c(x)} \right\} \Delta
\end{aligned} \quad (24)$$

3.2 Energía elástica y de 2^{do} orden en largueros

Los largueros o montantes son considerados como continuos en toda su altura. Sobre la sección transversal se considera que está aplicada una carga de compresión P actuando de manera centrada. Con ello, la energía potencial almacenada en los largueros, y considerando los efectos de segundo orden producidos por P , resulta:

$$U_L = \frac{1}{2} E A_l \int_V \sigma_{L(x)} \varepsilon_{L(x)} dV + \frac{1}{2} \int_V \sigma_{L(x)} [(v'_{L(x)})^2 + (w'_{L(x)})^2] dV \quad (25)$$

$$\begin{aligned}
U_L = \frac{1}{2} E \left\{ A_l \int_0^H [(u'_{a(x)})^2 + (u'_{b(x)})^2 + (u'_{c(x)})^2] dx + \right. \\
\left. + J_{ly} \int_0^H [(v''_{a(x)})^2 + (v''_{b(x)})^2 + (v''_{c(x)})^2] dx + J_{lz} \int_0^H [(w''_{a(x)})^2 + (w''_{b(x)})^2 + (w''_{c(x)})^2] dx \right\} + \\
+ \frac{P}{6} \int_0^H [(v'_{a(x)})^2 + (v'_{b(x)})^2 + (v'_{c(x)}) + (w'_{a(x)})^2 + (w'_{b(x)})^2 + (w'_{c(x)})] dx
\end{aligned} \quad (26)$$

siendo $(\bullet)' \equiv \frac{d(\bullet)}{dx}$, ..., etc.

Llamando a:

$$D = (u'_{a(x)})^2 + (u'_{b(x)})^2 + (u'_{c(x)})^2 \quad (27)$$

$$F = (v''_{a(x)})^2 + (v''_{b(x)})^2 + (v''_{c(x)})^2 \quad (28)$$

$$G = (w''_{a(x)})^2 + (w''_{b(x)})^2 + (w''_{c(x)})^2 \quad (29)$$

$$I = (v'_{a(x)})^2 + (v'_{b(x)})^2 + (v'_{c(x)}) + (w'_{a(x)})^2 + (w'_{b(x)})^2 + (w'_{c(x)}) \quad (30)$$

De este modo, la energía elástica de deformación almacenada en los largueros se puede expresar como:

$$U_L = \frac{1}{2} E \left\{ A_l \int_0^H D dx + J_{ly} \int_0^H F dx + J_{lz} \int_0^H G dx \right\} + \frac{P}{6} \int_0^H I dx \quad (31)$$

3.3 Energía total del sistema

La energía elástica de deformación almacenada en el mástil reticulado, resulta ser la almacenada en los largueros y diagonales. De este modo el funcional de energía potencial del sistema queda expresado como:

$$U = U_D + U_L \quad (32)$$

o lo que es lo mismo:

$$U = \frac{1}{2}E \int_0^H \left[\frac{A_d}{L_d \Delta} (A \sin^2 \alpha + B \cos^2 \alpha + C \sin \alpha \cos \alpha) + A_l D + J_{ly} F + J_{lz} G \right] dx + \frac{P}{6} \int_0^H I dx \quad (33)$$

obteniéndose así la expresión del funcional de energía a partir de pasaje del dominio discreto al dominio continuo.

Esta última ecuación representa la expresión general de la energía potencial para el mástil reticulado en zig-zag analizado, en donde se han tenido en cuenta los efectos de segundo orden producidos por una carga de compresión P actuando de manera centrada respecto a la sección transversal de la pieza.

4 PIEZAS COMPUESTAS PLANAS

Como caso particular de la teoría previa desarrollada para piezas rectas reticuladas espaciales de traza triangular, abordaremos varios ejemplos para reticulados planos de 2 largueros y diagonales de unión. Para este caso (ver Fig. 3) los desplazamientos básicos son 4, los que se designan como:

$$u_{a(x)}, u_{b(x)}, v_{a(x)}, v_{b(x)} \quad (34)$$

siendo $u_{a(x)}$ y $u_{b(x)}$ desplazamientos axiales de cada larguero, y $v_{a(x)}$ y $v_{b(x)}$ los transversales (flexionales) de los mismos, respectivamente. Las cargas actúan sobre los largueros.

El sistema diferencial lineal de equilibrio estático teniendo en cuenta efectos de segundo orden es para el caso plano que nos ocupa, el siguiente:

$$u_b'' + K\delta + P_b = 0 \quad (35)$$

$$v_b'''' + \mu v_a'' + M\eta - Q_b = 0 \quad (36)$$

$$u_a'' - K\left(\delta - \frac{\Delta}{2}\eta'\right) + P_a = 0 \quad (37)$$

$$v_a'''' + \mu v_a'' - M\left(\eta - \frac{\Delta}{2}\delta'\right) - Q_a = 0 \quad (38)$$

siendo $(\bullet)' \equiv \frac{d(\bullet)}{dx}$, ..., etc. y donde se ha definido a:

$$\eta = \eta(x) \equiv \frac{\Delta^2}{2L_d} u_a' + \frac{2e}{L_d} (v_b - v_a) \quad (39)$$

$$\delta = \delta(x) \equiv \frac{\Delta}{L_d} (u_a - u_b) - \frac{\Delta e}{L_d} v_a' \quad (40)$$

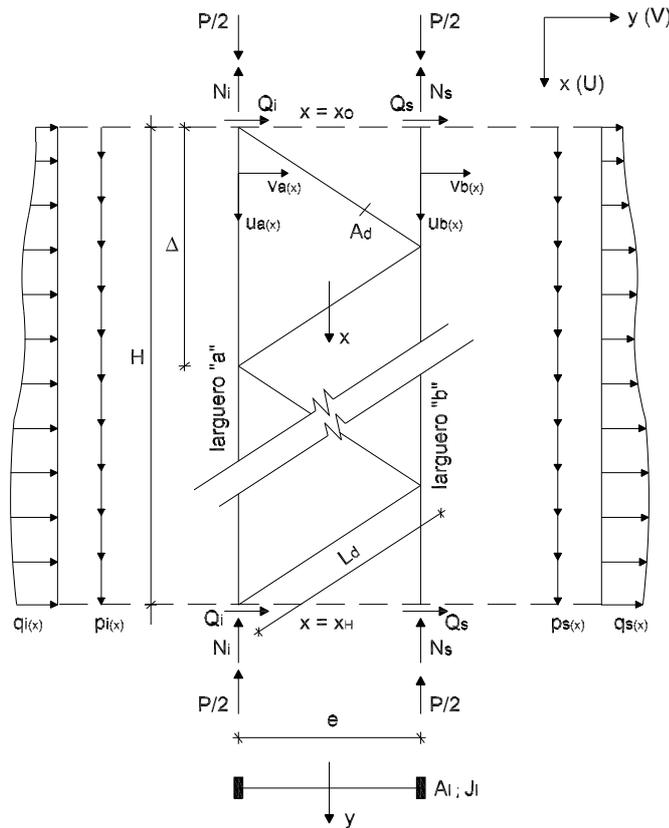


Figura 3: Reticulado plano

y siendo:

$$\begin{aligned}
 P_{a,b} &\equiv \frac{p_{a,b}}{EA_l} \\
 Q_{a,b} &\equiv \frac{q_{a,b}}{EJ_l} \\
 K &\equiv \frac{A_d}{2A_l L_d^2} \\
 M &\equiv \frac{A_d e}{\Delta L_d^2 J_l} \\
 \mu &\equiv \frac{P}{2EJ_l}
 \end{aligned}
 \tag{41}$$

Nota: En las ecuaciones (41), (42) y (43) se han despreciado términos de poca relevancia numérica tales como $\Delta^2 \beta''$ y $\Delta^3 \beta''$. Esta situación queda clara adimensionalizando en x , donde aparecerían términos de la forma $(\Delta/H)^2$ y $(\Delta/H)^3$.

El origen de coordenadas x es arbitrario. Denominamos, entonces, genéricamente como x_0 y x_H las coordenadas de los extremos de la pieza.

Las correspondientes Condiciones de Borde (C.B.) al sistema diferencial (ec. 38, 39, 40 y 41) son las 12 siguientes. Destacamos que en cada borde y en cada larguero, deberá - según la vinculación - suponerse una C.B. geométrica o su C.B. natural vinculada; es decir lo que deben ser nulos son 12 trabajos virtuales en los extremos de los largueros.

C.B. Geométricas o Esenciales

$$\begin{aligned}
|u_b|_{x_0}^{x_H} &= 0 \\
|v_b'|_{x_0}^{x_H} &= 0 \\
|v_b|_{x_0}^{x_H} &= 0 \\
|u_a|_{x_0}^{x_H} &= 0 \\
|v_a'|_{x_0}^{x_H} &= 0 \\
|v_a|_{x_0}^{x_H} &= 0
\end{aligned} \tag{42}$$

C.B. Naturales o Estáticas

$$\begin{aligned}
|u_b' + \frac{N_b}{EA_l}|_{x_0}^{x_H} &= 0 \\
|v_b''|_{x_0}^{x_H} &= 0 \\
|v_b''' + \mu v_b' + \frac{Q_b}{EJ_l}|_{x_0}^{x_H} &= 0 \\
|u_a' + K\frac{\Delta}{2}\eta + \frac{N_a}{EA_l}|_{x_0}^{x_H} &= 0 \\
|v_a''|_{x_0}^{x_H} &= 0 \\
|v_a''' + \mu v_a' + M\frac{\Delta}{2}\delta + \frac{Q_a}{EJ_l}|_{x_0}^{x_H} &= 0
\end{aligned} \tag{43}$$

donde N_a y N_b son cargas axiales, y Q_a y Q_b son cargas transversales que pudieran eventualmente aplicarse en los extremos de cada larguero.

Ahora bien, como observamos en las ecuaciones (45) y (46) tenemos 12 C.B. a satisfacer, cantidad que por supuesto coincide con el orden diferencial del sistema (ec. 38, 39, 40 y 41). Además de manipular 12 constantes arbitrarias de integración la solución de los 4 corrimientos es mezcla de una mitad algebraica y otra trigonométrica.

La propuesta (ec. 38, 39, 40 y 41) es necesaria si debemos resolver problemas que toman en consideración el efecto de segundo orden que genera la cara P de punta. O sea, tanto para el cálculo de elásticas o de cargas críticas (con $P = P_{cr}$ y $p_a = p_b = q_a = q_b = 0$) es menester utilizar el sistema diferencial (ec. 38, 39, 40 y 41) y sus 12 C.B.

En cambio cuando debemos calcular elásticas de piezas compuestas donde $\frac{4J_l}{A_l e^2} \ll 1$, situación muy frecuente en la práctica, podemos dejar de lado en el sistema diferencial el aporte de v_a'''' y de v_b'''' que energéticamente provienen de la flexión de cada larguero. En este caso donde el momento de inercia local es irrelevante frente al momento de inercia global J_y que (fórmula de Steiner) vale en general:

$$J_y = 2J + 2A_l \left(\frac{e}{2}\right)^2 \tag{44}$$

que por lo dicho se reescribe como:

$$J_y = \frac{A_l e^2}{2} \tag{45}$$

Aceptando esta simplificación ($P = 0$ no existe efecto de segundo orden) el sistema diferencial (ec. 38, 39, 40 y 41) se reduce al siguiente:

$$u_b'' + K\delta + P_b = 0 \tag{46}$$

$$\eta - \frac{q_b}{ET} = 0 \quad (47)$$

$$u_a'' - K\left(\delta - \frac{\Delta}{2}\eta'\right) + P_a = 0 \quad (48)$$

$$-\eta + \frac{\Delta}{2}\delta' - \frac{q_a}{ET} = 0 \quad (49)$$

donde:

$$T \equiv MJ_l = \frac{A_d e}{\Delta L_d^2} \quad (50)$$

Todavía las C.B. de las ecuaciones(45) y (46) se reducen a sólo 6 y valen:

$$\begin{aligned} |u_b|_{x_0}^{x_H} &= 0 \\ |u_a|_{x_0}^{x_H} &= 0 \\ |v_a|_{x_0}^{x_H} &= 0 \end{aligned} \quad (51)$$

$$\begin{aligned} |u_b' + \frac{N_b}{EA_l}|_{x_0}^{x_H} &= 0 \\ |u_a' + K\frac{\Delta}{2}\eta + \frac{N_a}{EA_l}|_{x_0}^{x_H} &= 0 \\ |\frac{\Delta}{2}\delta + \frac{Q_i}{ET}|_{x_0}^{x_H} &= 0 \end{aligned} \quad (52)$$

Obsérvese que la simplificación impuesta no permite imponer C.B. flexionales (v , v') en el larguero "b". Esto exige que deba suponerse que las diagonales extremas nacen en el larguero "a". Esta alternativa no influye en tanto y en cuanto se verifique la hipótesis de partida de asumir que $(\frac{\Delta}{H})$ es suficientemente pequeño.

Ahora bien, la ventaja primordial del sistema diferencial (ec. 49, 50, 51 y 52) radica en que la solución homogénea del sistema diferencial es exclusivamente algebraica y dependerá de seis constantes que se fijarán al imponer las C.B. dadas en las ecuaciones (54) y (55).

4.1 Solución del sistema diferencial

Como todo sistema diferencial lineal y ordinario como el que nos ocupa, consta del aporte de dos tipos de solución que suelen denominarse como solución particular y solución homogénea. La particular - que no es única - dependerá de los términos independientes (las funciones $p_{a(x)}$, $p_{b(x)}$, $q_{a(x)}$ y $q_{b(x)}$ en nuestro presente desarrollo); sin embargo como sabemos siempre es posible determinarla conociendo la solución básica u homogénea. La solución homogénea del sistema diferencial (ec. 49, 50, 51 y 52) se halla teóricamente, como se sabe, admitiendo que los corrimientos en ausencia de cargas aplicadas - $p_a = p_b = q_a = q_b = 0$ - valen:

$$\begin{aligned} u_a^{(h)} &= A_1 e^{\lambda x} \\ u_b^{(h)} &= A_2 e^{\lambda x} \\ v_a^{(h)} &= A_3 e^{\lambda x} \\ v_b^{(h)} &= A_4 e^{\lambda x} \end{aligned} \quad (53)$$

En general λ es un número complejo.

Reemplazando las ecuaciones propuestas en (13) en el sistema diferencial homogeneizado (ec. 49, 50, 51 y 52), tendremos un sistema lineal homogéneo de 4x4 en A_1, A_2, A_3 y A_4 .

La novedad es que la condición de solución no trivial, o sea el determinante de los coeficientes nulos, vale:

$$\left(\frac{e\Delta}{L_d}\right)^2 \lambda^6 = 0 \quad (54)$$

O sea tenemos seis raíces nulas de multiplicidad 6 con lo cual $u_a^{(h)}, u_b^{(h)}, v_a^{(h)}$ y $v_b^{(h)}$ como dijimos son algebraicas. Es sencillo encontrar las 4 funciones que valen:

$$u_a^{(h)} = \frac{1}{4}C_3x^2e + \left(\frac{1}{2}C_4e + C_1\right)x + \frac{1}{2}\frac{L_dC_3e}{\Delta K} + \frac{1}{2}C_5e + C_2 \quad (55)$$

$$u_b^{(h)} = -\frac{4}{3}\frac{KQx^3}{\Delta} - \frac{1}{4}C_3x^2e + \left(-\frac{1}{2}C_4e + C_1 - \frac{4L_dQ}{\Delta^2}\right)x - \frac{1}{2}C_5e + C_2 \quad (56)$$

$$v_a^{(h)} = \frac{1}{3}\frac{KQx^4}{\Delta e} + \left(\frac{1}{6}C_3 - \frac{2}{3}\frac{KQ}{\Delta}\right)x^3 + \frac{1}{2}C_4x^2 + \left(-\frac{4L_dQ}{\Delta^2} + C_5\right)x + C_6 \quad (57)$$

$$v_b^{(h)} = \frac{1}{3}\frac{KQx^4}{\Delta e} + \left(\frac{1}{6}C_3 - \frac{2}{3}\frac{KQ}{\Delta}\right)x^3 + \frac{1}{24}\frac{(12\Delta eC_4 - 12\Delta^2KQ)x^2}{\Delta e} + \left(\frac{1}{24}\frac{24C_5\Delta e - 3\Delta^3C_3e - 4L_dQ}{\Delta e} - \frac{4L_dQ}{\Delta^2}\right)x + \frac{1}{24}\frac{-12QL_d\Delta + 24C_6\Delta e - 3\Delta^3C_1}{\Delta e} \quad (58)$$

donde C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 y C_6 son las seis constantes a determinar por las C.B., y siendo el "factor de corte" φ definido como:

$$\varphi \equiv \frac{12A_lL_d^3}{A_d\Delta H^2} \quad (59)$$

En cuanto a una solución particular que denominaremos como $u_a^{(o)}, u_b^{(o)}, v_a^{(o)}$ y $v_b^{(o)}$, y que para fijar ideas tomamos una pieza de longitud H con $p_a = p_b = P = 0$ y $q_a = q_b = \frac{q}{2}$, con $x_0 = 0$ y $x_H = H$, valdrá:

$$u_a^{(o)} = Q\left(\frac{4L_dx}{\Delta^2} + \frac{2}{3}\frac{Kx^3}{\Delta}\right) \quad (60)$$

$$u_b^{(o)} = -\frac{2}{3}\frac{KQx^3}{\Delta} \quad (61)$$

$$v_a^{(o)} = \frac{1}{3}\frac{KQx^4}{\Delta e} \quad (62)$$

$$v_b^{(o)} = Q\left(-\frac{1}{2}\frac{L_d}{e} - \frac{1}{2}\frac{\Delta Kx^2}{e} + \frac{1}{3}\frac{\Delta Kx^4}{\Delta e}\right) \quad (63)$$

Evidentemente si no existen cargas aplicadas las soluciones particulares serán nulas (caso I₃ a desarrollar en Sección ejemplos).

5 EJEMPLOS

5.1 Determinación de la elástica

Se desarrollan tres casos de una pieza reticulada plana (ver Fig. 4) y en donde $x_0 = 0$ y $x_H = H$, y $p_a = p_b = P = 0$.

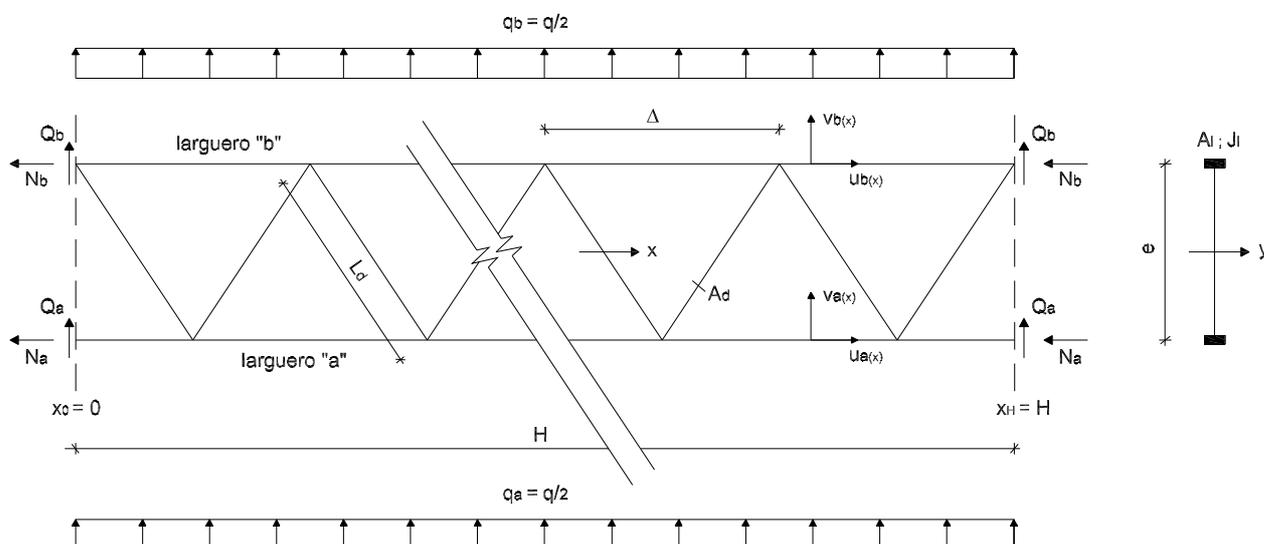


Figura 4: Pieza genérica de análisis

5.1.1 Caso I₁

Se trata de una "viga simplemente apoyada" (ver Fig. 5), en donde $q_a = q_b = \frac{q}{2}$ y $N_a = N_b = Q_a = Q_b = 0$ en $x_0 = 0$ y $x_H = H$.

Las C.B. resultan (ec. 54 y/o 55) en:

$$x = 0$$

$$\begin{aligned} u'_a + \frac{K\Delta}{2}\eta &= 0 \\ u'_b &= 0 \\ v_a &= 0 \end{aligned}$$

$$x = H$$

$$\begin{aligned} u_a &= 0 \\ u'_b &= 0 \\ v_a &= 0 \end{aligned}$$

Trabajamos con las soluciones dadas en las ecuaciones (ec. 58, 59, 60, 61, 63, 64, 65 y 66), encontrando que las reacciones sobre los largueros valen:

$$\begin{aligned} L_{cb} &\equiv EA_I u'_{b(\frac{H}{2})} = \frac{qH^2}{8e} \\ L_{ca} &\equiv EA_I u'_{a(\frac{H}{2})} = -\frac{qH^2}{8e} \left(1 + \frac{\Delta^2}{H^2}\right) \approx -\frac{qH^2}{8e} \end{aligned}$$

resultando $L_c = L_{cb} + L_{ca} = 0$.

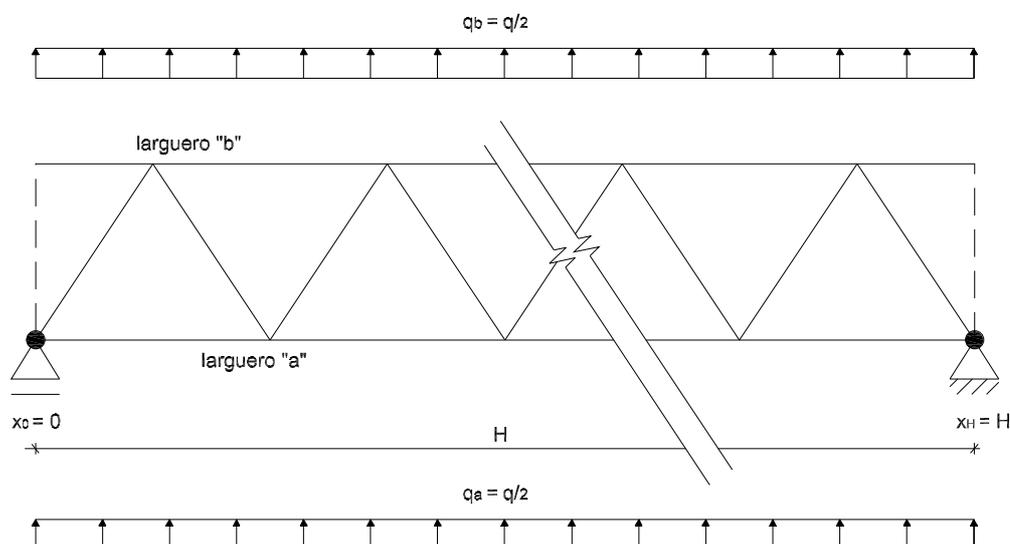


Figura 5: Viga simplemente apoyada

El momento flector en el centro es:

$$M_c = \frac{qH^2}{8} - \frac{L_c e}{2} = \frac{qH^2}{8}$$

que coincide con la teoría clásica. Las flechas valen:

$$f_b \equiv v_b\left(\frac{H}{2}\right) = \frac{5qH^4}{384EJ_y} \left[1 + \frac{4\varphi}{5} + 6\frac{\Delta^4}{H^4} + \frac{\Delta^2}{H^2} \left(\frac{9+4\varphi}{5} \right) \right] \approx \frac{5qH^4}{384EJ_y} \left(1 + \frac{4\varphi}{5} \right)$$

$$f_a \equiv v_a\left(\frac{H}{2}\right) = \frac{5qH^4}{384EJ_y} \left(1 + \frac{4\varphi}{5} + \frac{3\Delta^2}{5H^2} \right) \approx \frac{5qH^4}{384EJ_y} \left(1 + \frac{4\varphi}{5} \right)$$

Por ejemplo si $A_l = 3.14$; $A_d = 1.13$; $\Delta = 20$; $e = 40$ y $H = 400$, resulta $\varphi = 0.730$, y con ello la flecha es un 58% mayor a la calculada con la teoría clásica considerando $\varphi = 0$.

5.1.2 Caso I₂

Se trata de una "viga empotrada" (ver Fig. 6), en donde $q_a = q_b = \frac{q}{2}$ y $N_a = N_b = Q_a = Q_b = 0$ en $x_0 = 0$ y $x_H = H$.

Las C.B. resultan (ec. 54 y/o 55) en:

$x = 0$ y en $x = H$

$$u_a = 0$$

$$u_b = 0$$

$$v_a = 0$$

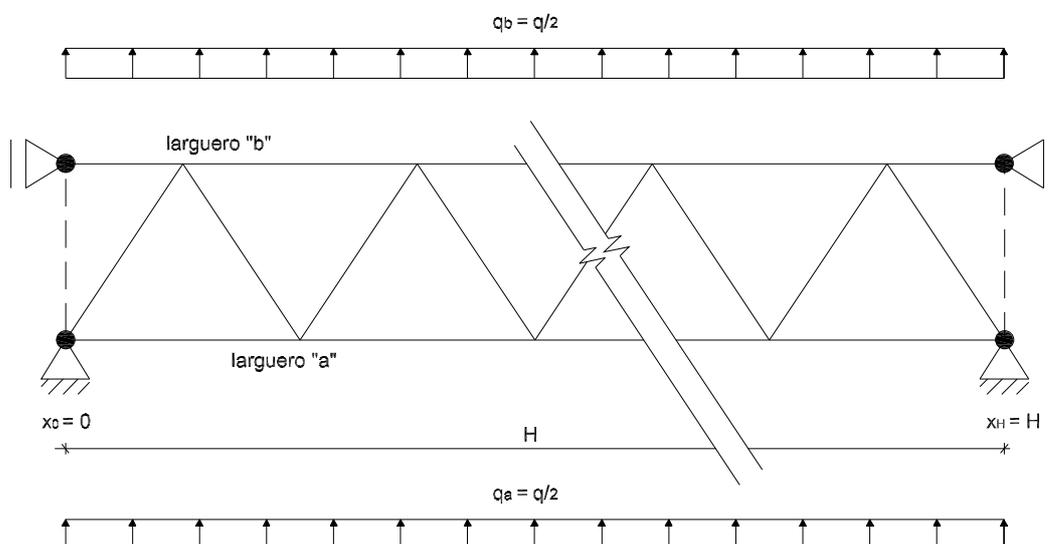


Figura 6: Viga empotrada

obteniendo con las soluciones dadas en las ecuaciones (ec. 58, 59, 60, 61, 63, 64, 65 y 66) que:

$$\begin{aligned}
 L_{cb} &\equiv EA_I u'_{b(\frac{H}{2})} = \frac{qH^2}{24e} \\
 L_{ca} &\equiv EA_I u'_{a(\frac{H}{2})} = -\frac{qH^2}{24e} \\
 L_{0b} &\equiv EA_I u'_{b(0)} = -\frac{qH^2}{12e} \\
 L_{0a} &\equiv EA_I u'_{a(0)} = \frac{qH^2}{12e} \\
 L_{Hb} &\equiv EA_I u'_{b(H)} = -\frac{qH^2}{12e} \\
 L_{Ha} &\equiv EA_I u'_{a(H)} = \frac{qH^2}{12e} \\
 M_c &= \frac{qH^2}{8} - (L_{0a} + L_{0b})\frac{e}{2} = \frac{qH^2}{24} \\
 M_E &= -(L_{0a} + L_{0b})\frac{e}{2} = -\frac{qH^2}{12}
 \end{aligned}$$

que coinciden con la teoría clásica aún siendo un hiperestático. Las flechas valen:

$$\begin{aligned}
 f_b \equiv v_{b(\frac{H}{2})} &= \frac{qH^4}{384EJ_y} \left[1 + 4\varphi + 2\frac{\Delta^2}{H^2}(1 + 2\varphi) \right] \approx \frac{qH^4}{384EJ_y} (1 + 4\varphi) \\
 f_a \equiv v_{a(\frac{H}{2})} &= \frac{qH^4}{384EJ_y} (1 + 4\varphi)
 \end{aligned}$$

Por ejemplo si $A_l = 3.14$; $A_d = 1.13$; $\Delta = 20$; $e = 40$ y $H = 400$, resulta $\varphi = 0.730$, y con ello la flecha es un 292% mayor a la calculada con la teoría clásica considerando $\varphi = 0$.

5.1.3 Caso I₃

Se trata de una "ménsula" (ver Fig. 7), en donde $q_a = q_b = 0$, $Q_{a(H)} = Q$ y $Q_{b(H)} = Q_{a(0)} = Q_{b(0)} = 0$, y siendo todo $N_a = N_b = 0$ en $x_0 = 0$ y $x_H = H$. En este ejemplo las soluciones particulares son nulas (observar ec. 63, 64, 65 y 66). Las soluciones homogéneas (ec. 58, 59,

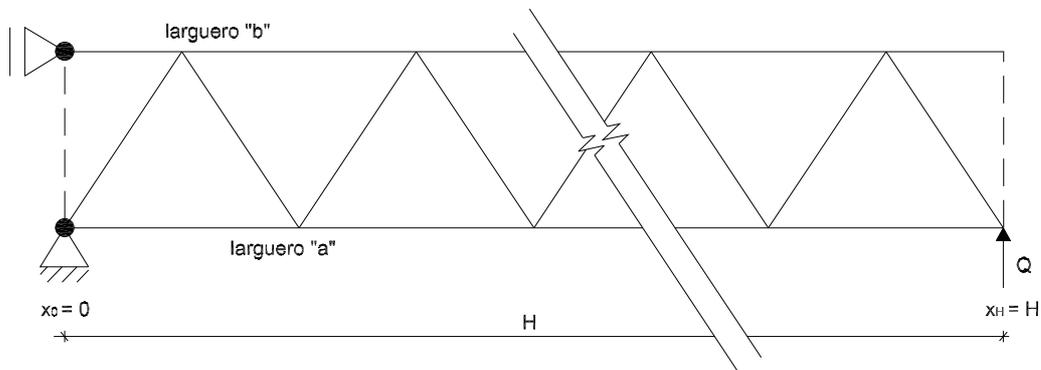


Figura 7: Ménsula

60 y 61) con las C.B. impuestas dan lugar a:

$$L_{0b} \equiv EA_l u'_{b(0)} = -\frac{QH}{e}$$

$$L_{0a} \equiv EA_l u'_{a(0)} = \frac{QH}{e}$$

$$L_{Hb} \equiv EA_l u'_{b(H)} = 0$$

$$L_{Ha} \equiv EA_l u'_{a(H)} = 0$$

El momento flector en $x_0 = 0$ es:

$$M_E = QH - (L_{Hb} + L_{Ha})\frac{e}{2} = QH$$

que coincide con la teoría clásica. Las flechas valen:

$$f_b \equiv v_{b(H)} = \frac{QH^3}{3EJ_y} \left(1 + \frac{\varphi}{4}\right)$$

$$f_a \equiv v_{a(H)} = \frac{QH^3}{3EJ_y} \left(1 + \frac{\varphi}{4}\right)$$

El porcentaje de esta flecha respecto a la calculada con la teoría clásica ($\varphi = 0$) es igual a $1 + \frac{\varphi}{4}$. Si por ejemplo $A_l = 3.14$; $A_d = 1.13$; $\Delta = 20$; $e = 40$ y $H = 400$, se tendrá una diferencia del 18.3% ya que $\varphi = 0.730$.

5.2 Determinación de la carga crítica

En este ejemplo (ver Fig. 8) $P \equiv P_{cr}$, $p_a = p_b = q_a = q_b = 0$ y todo $N_a = N_b = Q_a = Q_b = 0$ en $x_0 = 0$ y $x_H = H$. Como dijimos para este caso debemos recurrir al sistema diferencial (ec. 38, 39, 40 y 41) con las 12 C.B. dadas por las ecuaciones (45) y/o (46). O sea, tendremos en general soluciones particulares nulas y soluciones homogéneas algebro-trascendentes. Es decir deberíamos proponer una solución similar a la (56), pero esta vez el determinante de los coeficientes es de la forma:

$$\lambda^6 \Pi_6(\lambda) \tag{64}$$

donde $\Pi_6(\lambda)$ es un polinomio de orden 6 en λ .

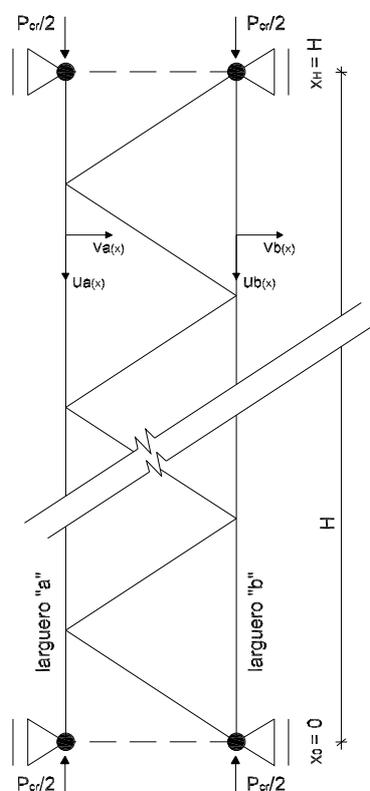


Figura 8: Carga crítica

Sin embargo - tal como comúnmente se ejemplifica - la solución para el caso que nos ocupa tiene la forma:

$$\begin{aligned}u_b^{(h)} &= A_1 \cos \frac{\pi x}{H} \\u_a^{(h)} &= A_2 \cos \frac{\pi x}{H} \\v_b^{(h)} &= A_3 \sin \frac{\pi x}{H} \\v_a^{(h)} &= A_4 \sin \frac{\pi x}{H}\end{aligned}\tag{65}$$

Al ser en consecuencia:

$$\eta = R \sin \frac{\pi x}{H} \delta = S \cos \frac{\pi x}{H}\tag{66}$$

en donde R y S son también constantes. Las 12 C.B. se satisfacen idénticamente con esta propuesta. En efecto las C.B. a verificar son (ver ec. 45 y 46) en: $x = 0$ y en $x = H$

$$\begin{aligned}u_b' &= 0 \\v_b &= 0 \\v_b'' &= 0 \\u_a' + \frac{K\Delta}{2}\eta &= 0 \\v_a &= 0 \\v_a'' &= 0\end{aligned}\tag{67}$$

Reemplazamos entonces la solución dada por la ecuación (68) en el sistema diferencial (ec. 38, 39, 40 y 41). Obtenemos un sistema lineal homogéneo en A_1 , A_2 , A_3 y A_4 dependiendo del autovalor:

$$\mu = \frac{P_{cr}}{2EJ_l}\tag{68}$$

El determinante de los coeficientes que debemos anular es una ecuación cuadrática en μ . La menor de las dos raíces - μ_{min} - será la que ingenierilmente nos interesa. Luego:

$$P_{cr} = 2EJ_l\mu_{min}\tag{69}$$

o bien:

$$\sigma_{cr} = \frac{EJ_l}{A_l}\mu_{min}\tag{70}$$

Definimos entonces una esbeltez Λ ficticia tal que:

$$\begin{aligned}\sigma_{cr} &= \frac{\pi^2 E}{\Lambda^2} \\P_{cr} &= \frac{2\pi^2 E A_l}{\Lambda^2}\end{aligned}\tag{71}$$

o sea una carga ficticia de Euler. por lo tanto:

$$\Lambda \equiv \pi \sqrt{\frac{A_l}{J_l \mu_{min}}}\tag{72}$$

No es difícil inferir que aproximadamente Λ vale:

$$\Lambda = \frac{H}{\sqrt{\frac{J_l}{A_l} + \frac{e^2}{4(1+r)}}} \quad (73)$$

donde:

$$r = \frac{\pi^2 \varphi}{12} \quad (74)$$

Es importante observar que en los casos límites reticulado inexistente - $A_d = 0$ - o reticulado estrictamente rígido - $A_d \rightarrow \infty$ - la ecuación (74) o bien $P_{cr} = 2A_l \sigma_{cr}$ dan lugar a la expresión teóricamente correcta. En efecto para:

$$A_d = 0 \implies \varphi \rightarrow \infty \implies r \rightarrow \infty$$

resulta:

$$\Lambda = \frac{H}{\sqrt{\frac{J_l}{A_l}}}$$

y luego:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 E (2J_l)}{H^2}$$

y para:

$$A_d \rightarrow \infty \implies \varphi \rightarrow 0 \implies r \rightarrow 0$$

resulta:

$$\Lambda = \frac{H}{\sqrt{\frac{J_l}{A_l} + \frac{e^2}{4}}}$$

y luego:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 E J_y}{H^2}$$

Ahora bien (Timoshenko, 1936) da un valor de carga crítica que el Reglamento CIRSOC 302 (CIRSOC 302, 1982) reproduce y que para el caso de $A_d = 0$ no conduce al valor teórico de P_{cr} . A los efectos prácticos sin embargo la aproximación del Reglamento es suficientemente precisa.

A continuación, para dos secciones, compararemos las tres cargas críticas, la nuestra teórica dada por las ecuaciones (72), P_{cr1} , y (74), P_{cr2} , y la reportada por CIRSOC, P_{crC} .

Sección 1 $A_l = 3.14$; $J_l = 0.785$; $A_d = 1.13$; $\Delta = 20$; $e = 40$ y $H = 400$

$$P_{cr1} = 0.09665614.E$$

$$P_{cr2} = 0.09689859.E$$

$$P_{crC} = 0.09687730.E$$

P_{crC} es un 0.23% "mayor" que P_{cr2} .

Sección 2 $A_l = 3.14$; $J_l = 0.785$; $A_d = 1.13e^{-5}$; $\Delta = 20$; $e = 40$ y $H = 400$

$$P_{cr1} = 0.0000994209.E$$

$$P_{cr2} = 0.0000994249.E$$

$$P_{crC} = 0.0000025794.E$$

P_{crC} es un 97.4% "menor" que P_{cr2} .

6 COMENTARIOS FINALES

En este trabajo se ha presentado un análisis de elementos reticulados realizando un estudio del comportamiento estructural a través de un pasaje del planteo discreto a continuo. En la primera parte, se abordó un mástil reticulado espacial de sección transversal triangular compuesto por tres montantes (largueros) con diagonales en un patrón zig-zag. En esta etapa del trabajo, se obtuvo la expresión de la energía potencial elástica de los largueros y diagonales en función de los desplazamientos axiales, flexionales y torsionales de cada larguero. Asimismo se incluyó el efecto de segundo orden debido a las cargas axiales aplicadas. Dicho funcional fue obtenido a través de un desarrollo algebraico inicial en el dominio discreto para posteriormente, admitiendo que el paso entre diagonales es pequeño frente a la altura del mástil, pasar al dominio continuo en la variable x . En el congreso se presentará la expresión de energía cinética y las ecuaciones diferenciales gobernantes, extendiendo así el planteo a problemas dinámicos. Como caso particular, se incluyó el comportamiento estático y de la estabilidad del equilibrio de elementos reticulados planos. Se desarrollaron ejemplos numéricos y se compararon con resultados de teorías clásicas y especificaciones de reglamentos vigentes. Se observó una total correspondencia en los resultados de esfuerzos aunque las elásticas presentaron diferencias con la teoría clásica sin considerar deformación por corte.

REFERENCIAS

- CIRSOC 302. Fundamentos de Cálculo para los Problemas de Estabilidad del Equilibrio en las Estructuras de Acero. INTI Argentina. 1982
- Ben Kahla, N. Equivalent beam-column analysis of guyed towers. *Computers and Structures*, 55(4):631–645, 1993.
- Filipich, C. y Bambill, E. Frecuencias Naturales de Piezas Empesilladas vía Serie de Potencias. *Mecánica Computacional*, Vol. XXII, 2003.
- Madugula, M., Wahba, Y. and Monforton, G. Dynamic response of guyed masts. *Engineering Structures*, 20(12):1097–1101, 1998.
- Timoshenko, S. Theory of Elastic Stability. McGraw-Hill Book Company NY-London, 1936.
- Wahba, Y., Madugula, M. and Monforton, G. Evaluation of non-linear analysis of guyed antenna towers. *Computers and Structures*, 68:207–212, 1998.