

REGULARIZAÇÃO DAS INTEGRAIS SINGULARES DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO UTILIZANDO SUBTRAÇÃO DE SINGULARIDADE

Aref K. L. Kzam, Humberto B. Coda

Departamento de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos – USP, Av.

Trabalhador São-carlense, 400, São Carlos – SP, Brasil, aklkzam@sc.usp.br,

<http://www.set.eesc.usp.br/public/main/>

Palavras Chave: Elementos curvos, Integrais singulares, Subtração de singularidade.

Resumo. A formulação do método dos elementos de contorno fundamenta-se na modelagem numérica das equações integrais de contorno. No problema da elasticidade linear, as equações integrais apresentam núcleos impróprios que dificultam sua avaliação analítica. Neste trabalho apresenta-se uma estratégia numérica eficiente de regularização das equações integrais de contorno utilizando o método da subtração de singularidade. Aplica-se a subtração de singularidade na regularização das integrais em deslocamento e em força de superfície aplicadas a elementos de contorno curvos de qualquer ordem de aproximação. Apresentam-se os trechos do código computacional em FORTRAN que incorpora a subtração de singularidade dos núcleos impróprios das integrais de contorno e, para validar a formulação, além de aplicar a técnica na solução de problemas clássicos, apresenta-se um exemplo algébrico.

1 INTRODUÇÃO

Comumente os problemas de engenharia são representados ora por equações diferenciais ora por equações integrais. Na maioria dos casos, as soluções analíticas dessas equações não são triviais, de modo que uma alternativa para sua resolução se dá por meio de métodos aproximados. O método dos elementos de contorno (MEC) se enquadra nessa categoria.

O MEC consiste na resolução numérica das equações integrais, algebrizadas por meio de entes matemáticos discretos denominados elementos de contorno.

Existem, na literatura, estratégias numéricas para se evitar o cálculo de integrais impróprias, como o uso de pontos de colocação exteriores ou a aplicação direta do movimento de corpo rígido para se recuperar os termos não integrados. Entretanto, para aplicações mais complexas, como a modelagem de fraturas, por exemplo, as integrais impróprias são necessariamente realizadas. Neste texto aborda-se de forma geral a equação integral do MEC para problemas da elasticidade linear, cujo núcleo é impróprio, ou seja, ocorre singularidade algébrica.

Diversos trabalhos da literatura abordam este tema como, por exemplo, [Aliabadi \(2002\)](#), [Aliabadi e Hall \(1989\)](#), [Guiggiani e Casalini \(1987\)](#), [Mukherjee \(2000\)](#) e [Sládek e Sládek \(1998\)](#). Entretanto, a linguagem matemática aplicada e a falta de uma interpretação geométrica para o problema dificultam seu entendimento e generalização. A abordagem apresentada neste trabalho proporciona fácil entendimento da técnica empregada e abre a possibilidade de generalizações simples para diversos problemas.

Divide-se o texto em seis itens nos quais se apresentam, respectivamente, uma breve introdução acerca do que será tratado no texto. Os tipos de equações integrais singulares estudadas e a proposta de nomenclatura para cada uma delas. A interpretação geométrica do método da subtração de singularidade aplicada a elementos curvos de ordem qualquer e sua aplicação. O trecho do código computacional em FORTRAN que realiza tal operação. Exemplos para a validação do método, com destaque para a sua interpretação geométrica, além das aplicações na elasticidade linear. Por fim, as conclusões obtidas com o trabalho.

2 EQUAÇÕES INTEGRAIS SINGULARES

Em se tratando do MEC bidimensional e se admitindo as hipóteses de que o meio seja homogêneo e isotrópico e ainda apresente comportamento elástico linear, a formulação direta do MEC pode ser obtida de duas maneiras principais. A primeira utiliza diretamente a Identidade Somigliana, onde o deslocamento associado a um ponto de colocação é calculado. A outra utiliza equação semelhante à identidade Somigliana, porém o ente calculado agora é à força de superfície associada a um ponto de colocação. Neste trabalho chama-se a primeira forma de Equação integral singular dos deslocamentos e a segunda de equação integral singular das forças de superfície [Kzam \(2009\)](#). Em ambas as formulações, o caso singular

ocorre quando o ponto de colocação, ou ponto fonte, situa-se sobre o contorno do problema. Para o caso discreto, onde a fronteira do domínio é descrita pelos elementos de contorno, a singularidade da equação integral ocorre quando o ponto fonte situa-se sobre o elemento no qual se efetua a integração.

Estas equações poderiam ser simplesmente apresentadas diretamente como na maioria dos textos em elementos de contorno, porém pretende-se aqui dar uma maior ênfase na sua determinação. No que segue, apresentam-se as equações integrais singulares dos deslocamentos e das forças de superfície, juntamente com suas respectivas formas algebrizadas.

2.1 Equação integral singular dos deslocamentos

A partir de um domínio Ω definido por um contorno Γ no qual se desenvolvem estados de deslocamentos, tensões e deformações, é possível se obter a seguinte representação integral que caracteriza os deslocamentos dos pontos no interior, na ausência de forças de domínio.

$$u_i(X') = \int_{\Gamma} U_{ij}^*(X', x) t_j(x) d\Gamma - \int_{\Gamma} T_{ij}^*(X', x) u_j(x) d\Gamma. \quad (1)$$

Seu uso permite determinar os deslocamentos de pontos do domínio a partir de valores dos deslocamentos e forças de superfície no contorno. A equação acima, usualmente chamada de Identidade Somigliana, [Venturini \(1988\)](#), é o ponto de partida para a obtenção das equações integrais singulares de contorno.

O problema singular fica então definido quando, ao invés de um ponto do domínio, pretende-se reescrever para um ponto pertencente ao contorno. Para se realizar o equacionamento do problema singular é necessário se adicionar uma região complementar ao domínio Ω , chamada Ω_ε^+ , conforme ilustrado na [Figura 1](#).

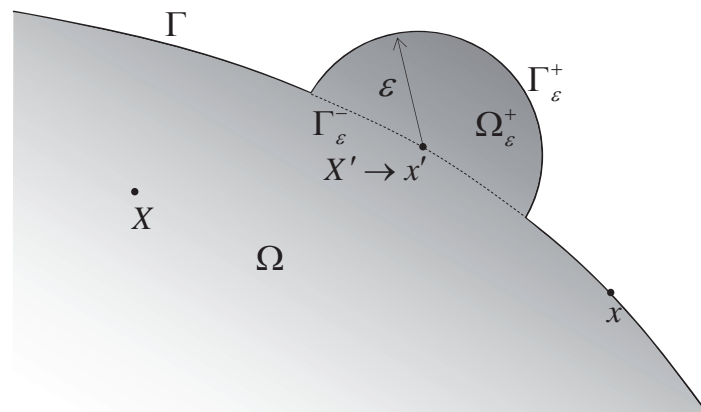


Figura 1: Ponto fonte no contorno, problema singular.

Procedendo-se dessa forma é possível caracterizar o ponto fonte como um ponto interno,

ao novo domínio $\bar{\Omega} = \Omega + \Omega_\varepsilon^+$, com contorno $\bar{\Gamma} = (\Gamma - \Gamma_\varepsilon^-) + \Gamma_\varepsilon^+$. Na situação limite quando $\varepsilon \rightarrow 0$ é possível identificar que $X' \rightarrow x'$, restaurando o domínio e o contorno original do problema, visto que $\bar{\Omega} \rightarrow \Omega$ e $\bar{\Gamma} \rightarrow \Gamma$.

Aplicando-se a condição limite sobre a Eq. (1), suas parcelas podem ser escritas como,

$$u_i(x') = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon^-} U_{ij}^*(x', x) t_j(x) d\Gamma + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon^+} U_{ij}^*(x', x) t_j(x) d\Gamma - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon^-} T_{ij}^*(x', x) u_j(x) d\Gamma - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon^+} T_{ij}^*(x', x) u_j(x) d\Gamma. \quad (2)$$

Calculando-se os limites na Eq. (2), verifica-se que a integral contendo o deslocamento sobre o contorno Γ_ε^+ , apresenta um valor não nulo. As demais integrais sobre o domínio Ω_ε^+ e o contorno Γ_ε^+ são limitadas e nulas.

Os limites das integrais sobre o contorno $\Gamma - \Gamma_\varepsilon^-$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$ corresponde ao próprio valor da integral avaliado em Γ , sendo fundamental observar que as integrais que contém em seu núcleo o termo r^{-1} devem ser avaliadas no sentido do valor principal de Cauchy.

A parcela limite não nula sobre o contorno Γ_ε^+ é feita admitindo-se que os deslocamentos sobre o contorno dos problemas estudados atendem a condição de continuidade de Hölder, i.e.,

$$|u_j(x) - u_j(x')| \leq k r_{(x,x')}^\alpha, \text{ com } k > 0 \text{ e } 0 < \alpha \leq 1. \quad (3)$$

Desta forma, é possível subtrair e somar o deslocamento (valor constante) calculado sobre o ponto x' no último termo da Eq. (2), como:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon^+} T_{ij}^*(x', x) u_j(x) d\Gamma = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon^+} T_{ij}^*(x', x) [u_j(x) - u_j(x')] d\Gamma + u_j(x') \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon^+} T_{ij}^*(x', x) d\Gamma. \quad (4)$$

Devido aos requisitos de continuidade, a primeira parcela da Eq. (4) se anula e a segunda será dada por,

$$u_j(x') \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon^+} T_{ij}^*(x', x) d\Gamma = \alpha_{ij}(x') u_j(x'). \quad (5)$$

Com $\alpha_{ij}(x') = -\frac{1}{2} \delta_{ij}(x')$ para contorno que possuam uma única tangente. A equação integral dos deslocamentos com os pontos fontes no contorno passa a ser,

$$C_{ij}(x') u_i(x') + \oint_{\Gamma} T_{ij}^*(x', x) u_j(x) d\Gamma = \int_{\Gamma} U_{ij}^*(x', x) t_j(x) d\Gamma. \quad (6)$$

Com $C_{ij}(x') = \delta_{ij}(x') + \alpha_{ij}(x')$, o termo livre da equação integral singular.

Para se efetuar a solução numérica da Eq. (6) aplicam-se a divisão do contorno em um número discreto de elementos de contorno curvos ou retos. Este processo é chamado de discretização da equação integral. Chama-se a expressão final deste processo de forma

discreta da equação integral, ou seja:

$$\frac{1}{2}u_i(x') + \int_{\Gamma_n} T_{ij}^*(x', x)u_j(x)d\Gamma_n = \int_{\Gamma_n} U_{ij}^*(x', x)t_j(x)d\Gamma_n \quad (7)$$

Uma maneira geral de se representar tanto a geometria do problema quanto as variáveis associadas ao contorno, é a utilização de nós por meio dos quais se parametrizam as referidas grandezas. A representação mais comum é quando se aplicam as mesmas funções de interpolação para todas as grandezas, denominada formulação isoparamétrica. Com essa representação, os deslocamentos, as forças de superfície e a geometria do problema ficam assim definidas,

$$\begin{aligned} u_j &= \phi_i(\xi)u_j^i \\ t_j &= \phi_i(\xi)t_j^i \\ x_j &= \phi_i(\xi)x_j^i \end{aligned} \quad (8)$$

Para tornar a abordagem numérica mais ampla de modo que se permita a utilização de elementos curvos de ordem qualquer, utiliza-se como função aproximadora os polinômios de Lagrange, definidos da seguinte forma,

$$\phi_i(\xi) = \prod_{\substack{i=0, j=0 \\ i \neq j}}^m \frac{\xi - \xi_j}{\xi_i - \xi_j} \quad (9)$$

A forma algébrica da Eq. (7), após a devida substituição das variáveis e da geometria pelos polinômios de Lagrange e seus parâmetros, além da transformação do espaço Γ_n para um espaço adimensional $\xi \in [-1, +1]$, pode ser escrita como,

$$\frac{1}{2}u_i^k + T_{ij}^{klm}u_j^{lm} = U_{ij}^{klm}t_j^{lm} \quad (10)$$

$$\text{Sendo, } U_{ij}^{klm} = \int_{-1}^{+1} \phi_m(\xi)U_{ij}^*(x^k, x)J_l(\xi)d\xi \text{ e } T_{ij}^{klm} = \int_{-1}^{+1} \phi_m(\xi)T_{ij}^*(x^k, x)J_l(\xi)d\xi.$$

onde k representa o ponto fonte gerador da equação, l é o elemento de contorno m é ponto nodal associado ao parâmetro de campo (aparece na função de forma que está sendo integrada).

2.2 Equação integral singular das forças de superfície

A equação integral apresentada no item anterior não é a única que pode resultar no método dos elementos de contorno para a solução de problemas elásticos bidimensionais. A outra opção é a representação integral singular da equação das forças de superfície. Esta é obtida de maneira análoga a equação dos deslocamentos, porém, deve-se partir da equação integral do campo de tensões no interior do domínio. Na ausência de forças de domínio as tensões

internas são escritas como,

$$\sigma_{ij}(X') = \int_{\Gamma} D_{kij}^*(X', x) t_k(x) d\Gamma - \int_{\Gamma} S_{kij}^*(X', x) u_k(x) d\Gamma. \quad (11)$$

Da análise limite sobre as parcelas da Eq. (11), segundo o procedimento ilustrado na Fig. 1, resultam dois termos que devem ser resolvidos. O primeiro deles é o seguinte,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_{\varepsilon}^+} D_{kij}^*(x', x) t_k(x) d\Gamma \quad (12)$$

Como o núcleo D_{kij}^* possui singularidade $1/r$ a regularização ocorre ao se somar e subtrair o valor da força de superfície (constante) no ponto x' relativo ao primeiro termo da série de Taylor em torno do ponto singular. Procedendo-se a regularização da Eq. (12) fica,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_{\varepsilon}^+} D_{kij}^*(x', x) [t_k(x) - t_k(x')] d\Gamma + t_k(x') \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_{\varepsilon}^+} D_{kij}^*(x', x) d\Gamma \quad (13)$$

O limite só existirá se as forças de superfície forem de classe $C^{0,\alpha}$ e atendam a condição de continuidade de Hölder para $|t_k(x) - t_k(x')| \leq kr_{(x,x')}^{\alpha}$ tal como estabelecida no item anterior. A primeira parcela do limite será nula, enquanto que a segunda parcela apresenta um fator dependente apenas das propriedades elásticas do material e do sistema de coordenada adotado, escrita como,

$$t_k(x') \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_{\varepsilon}^+} D_{kij}^*(x', x) d\Gamma = \beta_{kij}(x') t_k(x') \quad (14)$$

O segundo termo advém da parcela,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_{\varepsilon}^+} S_{kij}^*(x', x) u_k(x) d\Gamma \quad (15)$$

Como a ordem de singularidade do termo S_{kij}^* é $1/r^2$ a regularização não fica completa com a adição e subtração do valor constante, pois sobraria um termo de ordem $1/r$ na parcela supostamente regularizada. O procedimento de regularização desse limite necessita, portanto, da adição aos deslocamentos, dos dois primeiros termos da série de Taylor em torno do ponto singular. Nesse caso deve-se assumir que os deslocamentos e suas primeiras derivadas sejam de classe $C^{1,\alpha}$ tal que obedecem ao seguinte critério de continuidade de Hölder,

$$|u_k(x) - u_k(x') - u_{k,m}(x')(x_m - x'_m)| \leq k|x_m - x'_m|^{\alpha+1} \quad (16)$$

Adicionando os dois termos da série ao limite dado em (15) implica,

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_{\varepsilon}^+} S_{kij}^*(x', x) u_k(x) d\Gamma &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_{\varepsilon}^+} S_{kij}^*(x', x) [u_k(x) - u_k(x') - u_{k,m}(x)(x_m - x'_m)] d\Gamma \\ &+ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_{\varepsilon}^+} S_{kij}^*(x', x) u_k(x') d\Gamma + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_{\varepsilon}^+} S_{kij}^*(x', x) u_{k,m}(x)(x_m - x'_m) d\Gamma. \end{aligned} \quad (17)$$

Neste ponto, é interessante destacar que a segunda parcela do lado direito da Eq. (17) só terá sentido quando avaliada conjuntamente com $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma-\Gamma_\varepsilon^-} S_{kij}^*(x',x)u_k(x)d\Gamma$. Isso ocorre devido à presença da singularidade resultante do limite,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon^+} S_{kij}^*(x',x)u_k(x')d\Gamma = u_k(x') \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{\bar{S}_{kij}^*(x',x)}{\varepsilon} \right\} \quad (18)$$

Já a soma dos dois termos terá sentido quando avaliada segundo o conceito de parte finita de Hadamard, o que resulta na seguinte integral,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma-\Gamma_\varepsilon} S_{kij}^*(x',x)u_k(x)d\Gamma + u_k(x') \frac{\bar{S}_{kij}^*(x',x)}{\varepsilon} \right\} = \oint_{\Gamma} S_{kij}^*(x',x)u_k(x)d\Gamma \quad (19)$$

A última parcela da Eq. (17) é limitada e resulta em um termo dependente somente das propriedades elásticas do material e do sistema de coordenadas adotado. A avaliação do limite dessa parcela resulta,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon^+} S_{kij}^*(x',x)u_{k,m}(x)(x_m - x'_m)d\Gamma = \gamma_{kijm}(x')u_{k,m}(x'). \quad (20)$$

Os demais limites oriundos da Eq. (11) sobre o contorno $\Gamma - \Gamma_\varepsilon^-$ correspondem ao limite sobre o próprio contorno Γ e devem ser tomados segundo o conceito do valor principal de Cauchy. Dessa forma, a equação integral resultante, para os pontos fonte no contorno, passa a ser assim escrita,

$$\sigma_{ij}(x') - [\beta_{kij}(x')t_k(x') - \gamma_{kijm}(x')u_{k,m}(x')] = \oint_{\Gamma} D_{kij}^*(x',x)t_k(x)d\Gamma - \oint_{\Gamma} S_{kij}^*(x',x)u_k(x)d\Gamma. \quad (21)$$

Sendo $\sigma_{ij}(x') - [\beta_{kij}(x')t_k(x') - \gamma_{kijm}(x')u_{k,m}(x')] = \frac{1}{2}\sigma_{ij}(x')$ para contorno suave. Pela lei de Cauchy, $t_j(x') = \sigma_{ij}(x')n_i(x')$, basta multiplicar a Eq. (21) pela normal avaliada sobre o ponto fonte, para se obter a equação integral das forças de superfície,

$$\frac{1}{2}t_j(x') = n_i(x') \oint_{\Gamma} D_{kij}^*(x',x)t_k(x)d\Gamma - n_i(x') \oint_{\Gamma} S_{kij}^*(x',x)u_k(x)d\Gamma \quad (22)$$

A forma algebrizada dessa equação será obtida da mesma forma como realizado para a Eq. (7), admitindo-se as mesmas aproximações apresentadas nas Eq. (8), para o espaço adimensional $\xi \in [-1,+1]$. Logo, a Eq. (22) será escrita como,

$$\frac{1}{2}t_j^p = D_{kj}^{plm}t_k^{lm} - S_{kj}^{plm}u_k^{lm} \quad (23)$$

Sendo $D_{kj}^{plm} = \int_{-1}^{+1} \phi_m(\xi)D_{kj}^*(x^p,x)J_l(\xi)d\xi$, com $D_{kj}^*(x^p,x) = n_i(x')D_{kij}^*(x',x)$ e

$$S_{kj}^{plm} = \int_{-1}^{+1} \phi_m(\xi) S_{kj}^*(x^p, x) J_l(\xi) d\xi \text{ com } S_{kj}^*(x^p, x) = n_i(x') S_{kij}^*(x', x).$$

2.3 Comentários

Neste ponto cabe ressaltar que se distinguem aqui as equações integrais em apenas dois tipos, sejam eles: equações singulares ou equações regulares. As Eq. (7) e (22) são equações singulares, pois apresentam integrais com núcleos de ordem $O(\ln r)$, $O(r^{-1})$ e $O(r^{-2})$. Outras equações singulares poderiam ser geradas, por exemplo, a partir do divergente da Eq. (11). Neste caso surgiriam núcleos de ordem $O(r^{-2})$ e $O(r^{-3})$ o que invalida certas nomenclaturas que afirmam ser a Eq. (7) singular, e a Eq. (22) hipersingular. Obviamente que, ao se adotar pontos fonte interiores ou exteriores as referidas equações passam a ser, do nosso ponto de vista, regulares, independentemente da distância do ponto fonte ao contorno do sólido analisado.

Entende-se que a natureza da equação integral é determinada pelo tipo de singularidade da solução fundamental e não pela distancia relativa do ponto fonte ao contorno, sendo essa distancia relevante na avaliação numérica da qualidade da integração, algo que não deve ser extrapolado para o título da equação integral de contorno, muitas vezes chamada (erroneamente) de quase singular.

3 MÉTODO DA SUBTRAÇÃO DE SINGULARIDADE – VERSÃO SIMPLIFICADA

Na literatura o método de subtração de singularidade (MSS) aplicado a elementos curvos é usualmente descrito seguindo o formalismo apresentado no item anterior para a dedução das equações integrais. Isto leva a algumas confusões, como, por exemplo, em Aliabadi (2002), onde o autor propõe a expansão em série de Taylor do núcleo singular completo, incluindo geometria do problema estudado e solução fundamental.

Neste item, procura se apresentar o MSS fazendo uso de um “elemento de contorno auxiliar” fictício, reto e tangente ao elemento de contorno curvo avaliado exatamente no ponto fonte (singular).

O método consiste em remover a singularidade da solução fundamental ao se subtrair e somar da parte singular do núcleo, um integrando com a mesma natureza singular, porém avaliado sobre o já mencionado elemento de contorno auxiliar. O elemento auxiliar serve para substituir ou facilitar o entendimento de que apenas a geometria do problema é que precisa ser expandida em série de Taylor.

A geometria do elemento de contorno é obtida por meio da interpolação polinomial dos polinômios de Lagrange e seus respectivos valores nodais. Efetuando-se essa aproximação encontra-se a seguinte representação para as coordenadas e suas respectivas derivadas,

$$x_j = \phi_i(\xi)x_j^i, \quad x_{j,\xi} = \phi_{i,\xi}(\xi)x_j^i \quad \text{e} \quad J(\xi_0) = \sqrt{x_{j,(\xi)}x_{j,(\xi)}}(\xi_0) \quad (24)$$

O elemento auxiliar, reto e tangente pelo ponto fonte (ξ_0) é representado pela seguinte expressão:

$$x_i(\xi) = x_i(\xi_0) + x_{i,\xi}(\xi - \xi_0) \quad (25)$$

Como o elemento auxiliar é reto, este se confunde com a expansão em série de Taylor da geometria em torno do ponto fonte ξ_0 que seria escrita como,

$$x_i(\xi) = x_i(\xi_0) + x_{i,\xi}(\xi_0)\delta\xi \quad (26)$$

De posse da Eq. (25) pode-se escrever, para qualquer ponto do elemento auxiliar, valores similares aos escritos para os elementos curvos, usando os mesmos núcleos e funções aproximadoras, para tanto um dos valores mais importantes é a distância do ponto fonte ao ponto a ser integrado (campo auxiliar). Com a ajuda da terceira das Eq. (24), escreve-se:

$$\bar{r}(\xi) = J(\xi_0)|\xi - \xi_0| \quad (27)$$

Sendo $J(\xi_0)$ o jacobiano avaliado no ponto fonte e $|\xi - \xi_0|$ a distância adimensional entre o ponto fonte e o ponto campo auxiliar sobre o elemento auxiliar. A interpretação geométrica desse procedimento, assim como o sentido de integração sobre o elemento de contorno auxiliar, pode ser visualizada na Figura 2.

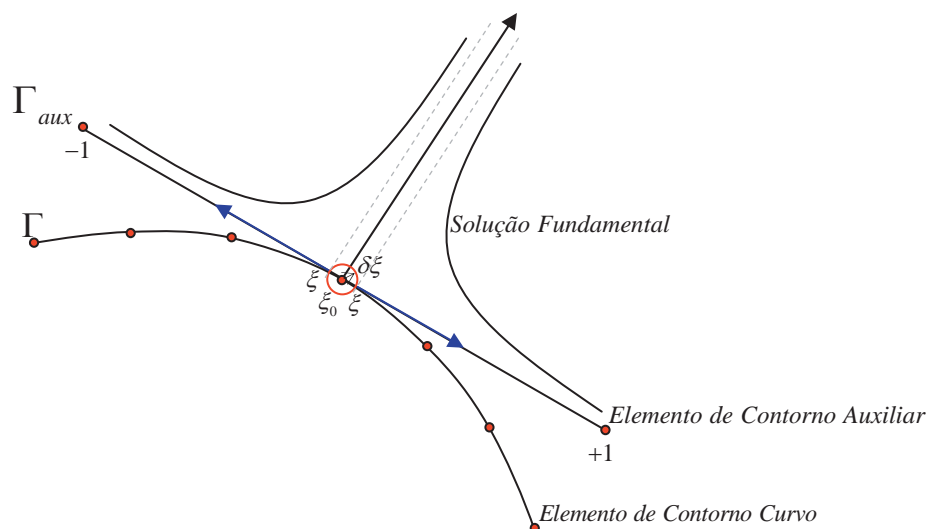


Figura 2: Interpretação geométrica do MSS.

O procedimento do MSS se assemelha a regularização efetuada sobre as integrais singulares anteriores. Poderíamos subtrair e somar núcleo de integral completamente idêntico para o elemento auxiliar e deixarmos a integral singular para ser completamente feita sobre

este último. Entretanto, como sobre os elementos auxiliares nem todos os termos seriam singulares, dependendo do grau de aproximação das variáveis, serão subtraídos termos seletivos, ou seja, para núcleos que contém singularidade $\ln(r)$ e $1/r$ subtrai-se e soma-se apenas o termo constante (primeiro termo da série), para núcleos com singularidade do tipo $1/r^2$ utilizam-se os termos constantes e lineares das funções de forma (polinômio de Lagrange).

A fim de aplicar esse procedimento sobre as equações do MEC bidimensional elástico linear e resolver uma série de problemas dessa natureza, emprega-se o MSS na regularização das equações algébricas do MEC como segue.

3.1 MSS para a equação dos deslocamentos

A formulação dos deslocamentos apresenta integrais singulares de ordem $O(\ln r)$ e $O(r^{-1})$. Por mais que as integrais com $O(\ln r)$ possam ser avaliadas por meio de quadraturas especiais, utiliza-se o conceito de valor principal de Cauchy em sua regularização para tornar o procedimento único para essa formulação.

Seja a parcela $\int_{\Gamma} U_{ij}^*(X', x) t_j(x) d\Gamma$ da Eq. (1). No sistema de coordenadas adimensionais essa parcela é dada por, $t_j^{lm} \int_{-1}^{+1} \phi_m(\xi) U_{ij}^*(\xi_0, \xi) J_l(\xi) d\xi$. Escrevendo convenientemente a solução fundamental como, $U_{ij}^*(\xi_0, \xi) = U_1 \ln[r(\xi_0, \xi)] \delta_{ij} + U_2 r_{,i} r_{,j}$ e substituindo na parcela logo acima, encontra-se,

$$\int_{-1}^{+1} U_1 \phi_m(\xi) \ln[r(\xi_0, \xi)] \delta_{ij} J_l(\xi) d\xi + \int_{-1}^{+1} U_2 \phi_m(\xi) r_{,i} r_{,j} J_l(\xi) d\xi. \quad (28)$$

A Eq. (28) possui duas parcelas de naturezas distintas. A parcela com a constante U_1 apresenta núcleo de natureza singular, a parcela com a constante U_2 apresenta núcleo regular e limitado. O primeiro termo da expansão em série da função de forma, ou seja, o valor da mesma sobre o ponto singular é suficiente para regularizar a integral imprópria da parcela singular. Aplicando-se o MSS a primeira parcela da Eq. (28) resulta,

$$\int_{-1}^{+1} \left\{ U_1 \phi_m(\xi) \ln[r(\xi_0, \xi)] J_l(\xi) \delta_{ij} - U_1 \phi_m(\xi_0) \ln[J_l(\xi_0) |\xi - \xi_0|] J_l(\xi_0) \delta_{ij} \right\} d\xi + \int_{-1}^{+1} U_2 \phi_m(\xi_0) \ln[J_l(\xi_0) |\xi - \xi_0|] J_l(\xi_0) \delta_{ij} d\xi. \quad (29)$$

Deve-se observar que o termo subtraído e somado está avaliado sobre o elemento auxiliar, tal fato é notório na presença de $J(\xi_0)$ no lugar de $J(\xi)$. A análise limite da Eq. (29) permite verificar que a parcela entre chaves é limitada e por isso é regular, podendo ser avaliada numericamente. Agrupando-se todas as parcelas regulares obtém-se,

$$\int_{-1}^{+1} \left\{ U_1 \phi_m(\xi) \ln[r(\xi_0, \xi)] J_l(\xi) \delta_{ij} - U_1 \phi_m(\xi_0) \ln[J_l(\xi_0)|\xi - \xi_0|] J_l(\xi_0) \delta_{ij} \right\} d\xi + \int_{-1}^{+1} U_2 \phi_m(\xi) r_{,i} r_{,j} J_l(\xi) d\xi. \tag{30}$$

A parcela com núcleo singular (parcela fora das chaves) presente na Eq. (29) deve ser avaliada no sentido do valor principal de Cauchy, como segue,

$$U_1 \phi_m(\xi_0) J_l(\xi_0) \delta_{ij} \{VPC\}. \tag{31}$$

Com $\{VPC\} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{-1-\xi_0}^{-\varepsilon} \ln[J_l(\xi_0)\varepsilon] d\varepsilon + \int_{+\varepsilon}^{+1-\xi_0} \ln[J_l(\xi_0)\varepsilon] d\varepsilon \right\}$, que resulta,

$$\{VPC\} = (1 + \xi_0) \ln|(1 + \xi_0) J_l(\xi_0)| + (1 - \xi_0) \ln|(1 - \xi_0) J_l(\xi_0)| - [(1 + \xi_0) + (1 - \xi_0)]. \tag{32}$$

O procedimento descrito para a solução fundamental dos deslocamentos é estendido para as demais soluções fundamentais que surgem nas equações integrais de contorno.

Seja a parcela $\int_{\Gamma} T_{ij}^*(x', x) u_j(x) d\Gamma$ da Eq. (7). Escrevendo convenientemente a solução fundamental como, $T_{ij}^*(x', x) = \frac{\bar{T}_{ij}^*(x', x)}{r(x', x)}$. Substituindo-a na parcela logo acima e mudando o sistema de coordenadas globais para o sistema de coordenadas adimensionais, encontra-se,

$$u_j^{lm} \int_{\Gamma} \phi_m(\xi) \frac{\bar{T}_{ij}^*(\xi_0, \xi)}{r(\xi_0, \xi)} J_l(\xi) d\xi. \tag{33}$$

Nesse caso verifica-se que todas as parcelas da solução fundamental são singulares, devido o produto de \bar{T}_{ki} por r^{-1} . Novamente, pelo grau de singularidade, apenas o valor da função de forma no ponto fonte é necessário (primeiro termo da série). Aplicando-se o MSS obtém-se,

$$\int_{-1}^{+1} \left[\phi_m(\xi) \frac{\bar{T}_{ij}^*(\xi_0, \xi)}{r(\xi_0, \xi)} J_l(\xi) - \phi_m(\xi_0) \frac{\bar{T}_{ij}^*(\xi_0)}{|\xi - \xi_0|} \right] d\xi + \int_{-1}^{+1} \phi_m(\xi_0) \frac{\bar{T}_{ij}^*(\xi_0)}{|\xi - \xi_0|} d\xi. \tag{34}$$

O termo subtraído parece diferente do esperado, isto ocorre, pois havia um termo $J(\xi_0)|\xi - \xi_0|$ no denominador referente ao raio sobre o elemento auxiliar. Da análise limite verifica-se que basta o primeiro termo da série para regularizar a parcela entre colchetes. Essa parcela é limitada e pode ser calculado por meio de um procedimento numérico de integração, por exemplo, o da quadratura de Gauss-Legendre. A parcela restante deve ser calculada analiticamente no sentido do valor principal de Cauchy, como segue,

$$\phi_m(\xi_0) \bar{T}_{ij}(\xi_0) \{VPC\}. \tag{35}$$

$$\text{Com } \{VPC\} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{-1-\xi_0}^{-\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon} d\varepsilon + \int_{+\varepsilon}^{+1-\xi_0} \frac{1}{\varepsilon} d\varepsilon \right\}, \text{ que resulta,}$$

$$\{VPC\} = -\ln|1 + \xi_0| + \ln|1 - \xi_0|. \quad (36)$$

Posto as demonstrações do MSS à todas as parcelas formulação em deslocamento, apresenta-se agora o mesmo procedimento para a formulação em força de superfície cujas equações são bastante utilizadas em diversos problemas da engenharia.

3.2 MSS para a equação das forças de superfície

Na formulação em força de superfície as integrais impróprias apresentam singularidade de ordem $O(r^{-1})$ e $O(r^{-2})$.

Inicia-se a subtração de singularidade avaliando-se a integral $n_i(\mathbf{x}') \int_{\Gamma} D_{kij}^*(x', x) t_k(x) d\Gamma$ da Eq. (22). A solução fundamental pode ser escrita como, $D_{kij}^*(x', x) = \frac{\bar{D}_{kij}^*(x', x)}{r(x', x)}$. Mudando o sistema de referencia e substituindo a nova solução fundamental dentro da integral, resulta,

$$n_i(\xi_0) \left[\int_{-1}^{+1} \phi_m(\xi) \frac{\bar{D}_{kij}(\xi_0, \xi)}{r(\xi_0, \xi)} J_l(\xi) d\xi \right] t_k^{lm}. \quad (37)$$

Aplicando-se o MSS a Eq. (37), utilizando para isso apenas o primeiro termo da série da função aproximadora, obtém-se,

$$n_i(\xi_0) \int_{-1}^{+1} \left[\phi_m(\xi) \frac{\bar{D}_{kij}(\xi_0, \xi)}{r(\xi_0, \xi)} J_l(\xi) - \phi_m(\xi_0) \frac{\bar{D}_{kij}(\xi_0)}{|\xi - \xi_0|} \right] d\xi + n_i(\xi_0) \int_{-1}^{+1} \phi_m(\xi_0) \frac{\bar{D}_{kij}(\xi_0)}{|\xi - \xi_0|} d\xi. \quad (38)$$

A integral entre os colchetes é limitada, logo é regular e por isso é avaliada numericamente por meio da quadratura de Gauss-Legendre. A integral remanescente é avaliada analiticamente por meio do valor principal de Cauchy, dado por,

$$n_i(\xi_0) \phi_m(\xi_0) \bar{D}_{kij}(\xi_0) \int_{-1-\xi_0}^{+1-\xi_0} \frac{1}{\varepsilon} d\varepsilon \quad (39)$$

$$\text{Com a seguinte integral do valor principal, } \int_{-1-\xi_0}^{+1-\xi_0} \frac{1}{\varepsilon} d\varepsilon = \ln|1 - \xi_0| - \ln|1 + \xi_0|.$$

Finalmente, aplica-se o MSS na avaliação da segunda integral apresentada na Eq. (22) cuja ordem de singularidade é igual a $O(r^{-2})$.

Seja a integral $n_i(x') \int_{\Gamma} S_{kij}^*(x', x) u_k(x) d\Gamma$, na qual se faz a seguinte fatoração na solução fundamental para facilitar a análise, $S_{kij}^*(x', x) = \frac{\bar{S}_{kij}^*(x', x)}{r^2}$. Substituindo-a na integral acima e

escrevendo-a no sistema adimensional de coordenadas, tem-se,

$$n_i(\xi_0) \left[\int_{-1}^{+1} \phi_m(\xi) \frac{\bar{S}_{kij}^*(\xi_0, \xi)}{r^2(\xi_0, \xi)} J_l(\xi) d\xi \right] u_k^{lm}. \quad (40)$$

Para o caso de integrais impróprias com singularidades de ordem $O(r^{-2})$ é necessário considerar a expansão em série Taylor até o termo linear das funções de forma. Esse termo é suficiente para que a integral seja avaliada no sentido do valor principal de Cauchy e da parte finita de Hadamard. Expandindo em série as funções de forma, encontra-se,

$$\begin{aligned} n_i(\xi_0) \int_{-1}^{+1} \left[\phi_m(\xi) \frac{\bar{S}_{kij}^*(\xi_0, \xi)}{r^2(\xi_0, \xi)} J_l(\xi) - \phi_m(\xi_0) \frac{\bar{S}_{kij}^*(\xi_0)}{J_l(\xi_0)(\xi - \xi_0)^2} - \phi_{m,\xi}(\xi_0) \frac{\bar{S}_{kij}^*(\xi_0)}{J_l(\xi_0)|\xi - \xi_0|} \right] d\xi \\ + n_i(\xi_0) \int_{-1}^{+1} \phi_m(\xi_0) \frac{\bar{S}_{kij}^*(\xi_0)}{J_l(\xi_0)(\xi - \xi_0)^2} d\xi + n_i(\xi_0) \int_{-1}^{+1} \phi_{m,\xi}(\xi_0) \frac{\bar{S}_{kij}^*(\xi_0)}{J_l(\xi_0)|\xi - \xi_0|} d\xi. \end{aligned} \quad (41)$$

A integral entre os colchetes é regular e por isso pode ser avaliada numericamente por meio da quadratura de Gauss-Legendre. As integrais fora dos colchetes, são integrais impróprias no sentido de Hadamard e Cauchy, respectivamente. Essas integrais podem ser avaliadas analiticamente sobre o elemento auxiliar, por meio das equações,

$$\begin{aligned} n_i(\xi_0) \phi_m(\xi_0) \frac{\bar{S}_{kij}^*(\xi_0)}{J_l(\xi_0)} \left\{ \int_{-1-\xi_0}^{+1-\xi_0} \frac{1}{\varepsilon^2} d\varepsilon \right\}, \\ n_i(\xi_0) \phi_{m,\xi}(\xi_0) \frac{\bar{S}_{kij}^*(\xi_0)}{J_l(\xi_0)} \left\{ \int_{-1-\xi_0}^{+1-\xi_0} \frac{1}{\varepsilon} d\varepsilon \right\}. \end{aligned} \quad (42)$$

Com a parte finita de Hadamard calculada como, $\int_{-1-\xi_0}^{+1-\xi_0} \frac{1}{\varepsilon^2} d\varepsilon = -\frac{1}{1+\xi_0} - \frac{1}{1-\xi_0}$. A parcela

não finita da primeira das Eq. (42) se anula com a Eq. (18). Para o valor principal de Cauchy, tem-se $-\int_{-1-\xi_0}^{+1-\xi_0} \frac{1}{\varepsilon} d\varepsilon = \ln|1-\xi_0| - \ln|1+\xi_0|$, sendo $\bar{S}_{kij}^*(\xi_0)$ a solução fundamental auxiliar

avaliada no nó singular.

A fim de aplicar o procedimento descrito até agora em problemas de análise de engenharia é necessário se desenvolver algum aplicativo que incorpore essa formulação e execute as rotinas necessárias para gerar resultados que permitam se proceder tal análise. A apresenta-se um trecho do código escrito em FORTRAN, no qual a metodologia acima está implementada.

4 CÓDIGO COMPUTACIONAL

Para padronizar a simbologia de apresentação do código adota-se o seguinte padrão. Instruções de programação e fragmentos do código aparecem em caixa alta com fonte

“Courier New” (8) dentro de um quadro. Quando necessário utiliza-se a coloração adotada pelo compilador, por exemplo: `!INSTRUcoes E CODIGO`

No quadro a seguir, apresentam-se as principais constantes utilizadas para auxiliar o procedimento de subtração de singularidade.

```

!CONSTANTES UTILIZADAS NOS KERNELS DAS MATRIZES DE INFLUENCIA "H", "G", "S" E "D"
!MÓDULO DE ELASTICIDADE TRANSVERSAL
MI=E/(2.0D0*(1.0D0+NI))
!ESTADO PLANO DA ANÁLISE BIDIMENSIONAL
IF(EP=='EPT') THEN
!MÓDULO DE ELASTICIDADE LONGITUDINAL
E=E*((1.0D0+2.0D0*NI)/((1.0D0+NI)**2))
!COEFICIENTE DE POISSON
NI=NI/(1.0D0+NI)
END IF
!CONSTANTE TRIGONOMÉTRICA
PI=DACOS(-1.0D0)
!DELTA DE KRONECKER
KR(1,1)=1; KR(1,2)=0; KR(2,1)=0; KR(2,2)=1
!CONSTANTES UTILIZADAS NOS KERNELS DA MATRIZ DE INFLUENCIA H
H1=(1.0D0)/(4.0D0*PI*(1.0D0-NI))
H2=(1.0D0-2.0D0*NI)/(4.0D0*PI*(1.0D0-NI))
!CONSTANTES UTILIZADAS NOS KERNELS DA MATRIZ DE INFLUENCIA G
G1=(4.0D0*NI-3.0D0)/(8.0D0*PI*MI*(1.0D0-NI))
G2=(1.0D0)/(8.0D0*PI*MI*(1.0D0-NI))
!CONSTANTES UTILIZADAS NOS KERNELS DA MATRIZ DE INFLUENCIA S
S1=(MI*(1.0D0-2.0D0*NI))/(PI*(1.0D0-NI))
S2=(MI*NI)/(PI*(1.0D0-NI))
S3=(-4.0D0*MI)/(PI*(1.0D0-NI))
S4=S2
S5=0.5D0*S1
S6=(-MI*(1.0D0-4.0D0*NI))/(2.0D0*PI*(1.0D0-NI))
!CONSTANTES UTILIZADAS NOS KERNELS DA MATRIZ DE INFLUENCIA D
D1=(1.0D0-2.0D0*NI)/(4.0D0*PI*(1.0D0-NI))
D2=(1.0D0)/(2.0D0*PI*(1.0D0-NI))

```

No próximo quadro apresenta-se o corpo principal do programa, no qual a subtração de singularidade está implementada.

```

IF(SINGULAR==.TRUE.) THEN
SELECT CASE(ID(K)) !AVALIA A NATUREZA DA EQUAÇÃO
CASE(0) !FORMULAÇÃO DOS DESLOCAMENTOS
DO I=1,2
DO J=1,2
H2x2=(FI(M)*((-H2/R)*DRDN*KR(I,J))&
+((-2.0D0*H1/R)*DRDN*DR(I)*DR(J))&
+((H2/R)*(DR(I)*DN(J)-DR(J)*DN(I)))*JC&
-FI0(M)*(1.0D0/DKSI)*(H2*(DR0(I)*DNO(J)-DR0(J)*DNO(I)))*W(N)
G2x2=((FI(M)*G1*DLOG(R)*KR(I,J)*JC)&
-(G1*FI0(M)*DLOG(DABS(JC0*DKSI))*KR(I,J)*JC0)&
+(FI(M)*G2*DR(I)*DR(J)*JC))*W(N)
!INCIDENCIA NA MATRIZ DE INFLUENCIA
IF(I==J) THEN
SELECT CASE(I)
CASE(1)
H(2*LIN-1,2*COL-1)=H(2*LIN-1,2*COL-1)+H2x2
G(2*LIN-1,2*COL-1)=G(2*LIN-1,2*COL-1)+G2x2
CASE(2)
H(2*LIN-0,2*COL-0)=H(2*LIN-0,2*COL-0)+H2x2
G(2*LIN-0,2*COL-0)=G(2*LIN-0,2*COL-0)+G2x2
END SELECT
ELSE
SELECT CASE(I)
CASE(1)
H(2*LIN-1,2*COL-0)=H(2*LIN-1,2*COL-0)+H2x2
G(2*LIN-1,2*COL-0)=G(2*LIN-1,2*COL-0)+G2x2
CASE(2)
H(2*LIN-0,2*COL-1)=H(2*LIN-0,2*COL-1)+H2x2
G(2*LIN-0,2*COL-1)=G(2*LIN-0,2*COL-1)+G2x2
END SELECT
END IF
END DO
END DO

```

```

END DO
CASE(1) !FORMULÇÃO DAS FORÇAS DE SUPERFÍCIE
DO O=1,2
DO I=1,2
DO J=1,2
H2x2=(DN0(I)*FI(M)*(1.0D0/(R*R))*JC*(S1*(DRDN*(DR(O)*KR(I,J))&
+S2*(DRDN*(DR(J)*KR(I,O)+DR(I)*KR(J,O))&
+S3*(DRDN*(DR(I)*DR(J)*DR(O))&
+S4*(DN(I)*DR(J)*DR(O)+DN(J)*DR(I)*DR(O))&
+S5*(2.0D0*DN(O)*DR(I)*DR(J)+DN(J)*KR(I,O)+DN(I)*KR(J,O))&
+S6*(DN(O)*KR(I,J))&
-DN0(I)*FIO(M)*(1.0D0/(JC0*DKSI*DKSI))&
*(S4*(DN0(I)*DR0(J)*DR0(O)+DN0(J)*DR0(I)*DR0(O))&
+S5*(2.0D0*DN0(O)*DR0(I)*DR0(J)+DN0(J)*KR(I,O)+DN0(I)*KR(J,O))&
+S6*(DN0(O)*KR(I,J))&
-DN0(I)*DFIO(M)*(1.0D0/(JC0*DKSI))* (S4*(DN0(I)*DR0(J)*DR0(O)+DN0(J)*DR0(I)*DR0(O))&
+S5*(2.0D0*DN0(O)*DR0(I)*DR0(J)+DN0(J)*KR(I,O)+DN0(I)*KR(J,O))&
+S6*(DN0(O)*KR(I,J))) *W(N)
G2x2=(DN0(I)*FI(M)*(1.0D0/R)*JC*(D1*(DR(I)*KR(J,O)+DR(J)*KR(O,I)-DR(O)*KR(I,J))&
+D2*(DR(I)*DR(J)*DR(O))&
-DN0(I)*FIO(M)*(1/DKSI)*(D1*(DR0(I)*KR(J,O)+DR0(J)*KR(O,I)-DR0(O)*KR(I,J))&
+D2*(DR0(I)*DR0(J)*DR0(O)))) *W(N)
!INCIDENCIA NA MATRIZ DE INFLUENCIA
SELECT CASE(O)
CASE(1)
IF(I==J) THEN
SELECT CASE(I)
CASE(1)
H(2*LIN-1,2*COL-1)=H(2*LIN-1,2*COL-1)+H2x2
G(2*LIN-1,2*COL-1)=G(2*LIN-1,2*COL-1)+G2x2
CASE(2)
H(2*LIN-0,2*COL-1)=H(2*LIN-0,2*COL-1)+H2x2
G(2*LIN-0,2*COL-1)=G(2*LIN-0,2*COL-1)+G2x2
END SELECT
ELSE
SELECT CASE(I)
CASE(1)
H(2*LIN-0,2*COL-1)=H(2*LIN-0,2*COL-1)+H2x2
G(2*LIN-0,2*COL-1)=G(2*LIN-0,2*COL-1)+G2x2
CASE(2)
H(2*LIN-1,2*COL-1)=H(2*LIN-1,2*COL-1)+H2x2
G(2*LIN-1,2*COL-1)=G(2*LIN-1,2*COL-1)+G2x2
END SELECT
END IF
CASE(2)
IF(I==J) THEN
SELECT CASE(I)
CASE(1)
H(2*LIN-1,2*COL-0)=H(2*LIN-1,2*COL-0)+H2x2
G(2*LIN-1,2*COL-0)=G(2*LIN-1,2*COL-0)+G2x2
CASE(2)
H(2*LIN-0,2*COL-0)=H(2*LIN-0,2*COL-0)+H2x2
G(2*LIN-0,2*COL-0)=G(2*LIN-0,2*COL-0)+G2x2
END SELECT
ELSE
SELECT CASE(I)
CASE(1)
H(2*LIN-0,2*COL-0)=H(2*LIN-0,2*COL-0)+H2x2
G(2*LIN-0,2*COL-0)=G(2*LIN-0,2*COL-0)+G2x2
CASE(2)
H(2*LIN-1,2*COL-0)=H(2*LIN-1,2*COL-0)+H2x2
G(2*LIN-1,2*COL-0)=G(2*LIN-1,2*COL-0)+G2x2
END SELECT
END IF
END SELECT
END DO
END DO
END DO
END SELECT
SELECT CASE(ID(K)) !AVALIA A NATUREZA DA EQUAÇÃO
CASE(0) !FORMULAÇÃO DOS DESLOCAMENTO
IF(KSIO==+1.0D0) THEN
!VALOR PRINCIPAL DE CAUCHY: MATRIZ "H"
HVPC=-DLOG(2.0D0)
!VALOR PRINCIPAL DE CAUCHY: MATRIZ "G"
GVPC=2.0D0*DLOG(2.0D0*JC0)-2.0D0
ELSE IF(KSIO==-1.0D0) THEN
!VALOR PRINCIPAL DE CAUCHY: MATRIZ "H"
HVPC=+DLOG(2.0D0)

```

```

!VALOR PRINCIPAL DE CAUCHY: MATRIZ "G"
GVPC=2.0D0*DLOG(2.0D0*JC0)-2.0D0
ELSE
!VALOR PRINCIPAL DE CAUCHY: MATRIZ "H"
HVPC=DLOG(DABS(1.0D0-KSI0))-DLOG(DABS(1.0D0+KSI0))
!VALOR PRINCIPAL DE CAUCHY: MATRIZ "G"
GVPC=(1.0D0+KSI0)*DLOG(DABS(JC0*(1.0D0+KSI0)))&
+(1.0D0-KSI0)*DLOG(DABS(JC0*(1.0D0-KSI0)))&
-((1.0D0+KSI0)+(1.0D0-KSI0))
END IF
DO I=1,2
DO J=1,2
H2x2=FI0(M)*(H2*(DR0(I)*DNO(J)-DR0(J)*DNO(I)))*HVPC
G2x2=G1*FI0(M)*JC0*KR(I,J)*GVPC
!INCIDENCIA NA MATRIZ DE INFLUENCIA
IF(I==J)THEN
SELECT CASE(I)
CASE(1)
H(2*LIN-1,2*COL-1)=H(2*LIN-1,2*COL-1)+H2x2
G(2*LIN-1,2*COL-1)=G(2*LIN-1,2*COL-1)+G2x2
CASE(2)
H(2*LIN-0,2*COL-0)=H(2*LIN-0,2*COL-0)+H2x2
G(2*LIN-0,2*COL-0)=G(2*LIN-0,2*COL-0)+G2x2
END SELECT
ELSE
SELECT CASE(I)
CASE(1)
H(2*LIN-1,2*COL-0)=H(2*LIN-1,2*COL-0)+H2x2
G(2*LIN-1,2*COL-0)=G(2*LIN-1,2*COL-0)+G2x2
CASE(2)
H(2*LIN-0,2*COL-1)=H(2*LIN-0,2*COL-1)+H2x2
G(2*LIN-0,2*COL-1)=G(2*LIN-0,2*COL-1)+G2x2
END SELECT
ENDIF
END DO
END DO
CASE(1) !FORMULACAO DAS FORÇAS DE SUPERFÍCIE
IF(KSI0==+1.0D0)THEN
!VALOR PRINCIPAL DE CAUCHY: MATRIZ "H"
HVPC=-DLOG(2.0D0)
!VALOR PRINCIPAL DE CAUCHY: MATRIZ "G"
GVPC=-DLOG(2.0D0)
!PARTE FINITA DE HADAMARD: MATRIZ "H"
HPFH=-0.50D0
ELSE IF(KSI0== -1.0D0)THEN
!VALOR PRINCIPAL DE CAUCHY: MATRIZ "H"
HVPC=+DLOG(2.0D0)
!VALOR PRINCIPAL DE CAUCHY: MATRIZ "G"
GVPC=+DLOG(2.0D0)
!PARTE FINITA DE HADAMARD: MATRIZ "H"
HPFH=-0.50D0
ELSE
!VALOR PRINCIPAL DE CAUCHY: MATRIZ "H"
HVPC=DLOG(DABS(1.0D0-KSI0))-DLOG(DABS(1.0D0+KSI0))
!VALOR PRINCIPAL DE CAUCHY: MATRIZ "G"
GVPC=DLOG(DABS(1.0D0-KSI0))-DLOG(DABS(1.0D0+KSI0))
!PARTE FINITA DE HADAMARD: MATRIZ "H"
HPFH=(-1.0D0/(1+KSI0))+(-1.0D0/(1-KSI0))
END IF
DO O=1,2
DO I=1,2
DO J=1,2
H2x2=(DNO(I)*FI0(M)*(1.0D0/JC0)*(S4*(DNO(I)*DR0(J)*DR0(O)+DNO(J)*DR0(I)*DR0(O))&
+S5*(2.0D0*DNO(O)*DR0(I)*DR0(J)+DNO(J)*KR(I,O)+DNO(I)*KR(J,O))&
+S6*(DNO(O)*KR(I,J)))*HPFH)&
+(DNO(I)*DFI0(M)*(1.0D0/JC0)*(S4*(DNO(I)*DR0(J)*DR0(O)+DNO(J)*DR0(I)*DR0(O))&
+S5*(2.0D0*DNO(O)*DR0(I)*DR0(J)+DNO(J)*KR(I,O)+DNO(I)*KR(J,O))&
+S6*(DNO(O)*KR(I,J)))*HVPC)
G2x2=DNO(I)*FI0(M)*(D1*(DR0(I)*KR(J,O)+DR0(J)*KR(O,I)-DR0(O)*KR(I,J))&
+D2*(DR0(I)*DR0(J)*DR0(O)))*GVPC
!INCIDENCIA NA MATRIZ DE INFLUENCIA
SELECT CASE(O)
CASE(1)
IF(I==J)THEN
SELECT CASE(I)
CASE(1)
H(2*LIN-1,2*COL-1)=H(2*LIN-1,2*COL-1)+H2x2
G(2*LIN-1,2*COL-1)=G(2*LIN-1,2*COL-1)+G2x2
CASE(2)

```



```

      H(2*LIN-0,2*COL-1)=H(2*LIN-0,2*COL-1)+H2x2
      G(2*LIN-0,2*COL-1)=G(2*LIN-0,2*COL-1)+G2x2
    END SELECT
  ELSE
    SELECT CASE(I)
      CASE(1)
        H(2*LIN-0,2*COL-1)=H(2*LIN-0,2*COL-1)+H2x2
        G(2*LIN-0,2*COL-1)=G(2*LIN-0,2*COL-1)+G2x2
      CASE(2)
        H(2*LIN-1,2*COL-1)=H(2*LIN-1,2*COL-1)+H2x2
        G(2*LIN-1,2*COL-1)=G(2*LIN-1,2*COL-1)+G2x2
    END SELECT
  END IF
CASE(2)
  IF(I==J)THEN
    SELECT CASE(I)
      CASE(1)
        H(2*LIN-1,2*COL-0)=H(2*LIN-1,2*COL-0)+H2x2
        G(2*LIN-1,2*COL-0)=G(2*LIN-1,2*COL-0)+G2x2
      CASE(2)
        H(2*LIN-0,2*COL-0)=H(2*LIN-0,2*COL-0)+H2x2
        G(2*LIN-0,2*COL-0)=G(2*LIN-0,2*COL-0)+G2x2
    END SELECT
  ELSE
    SELECT CASE(I)
      CASE(1)
        H(2*LIN-0,2*COL-0)=H(2*LIN-0,2*COL-0)+H2x2
        G(2*LIN-0,2*COL-0)=G(2*LIN-0,2*COL-0)+G2x2
      CASE(2)
        H(2*LIN-1,2*COL-0)=H(2*LIN-1,2*COL-0)+H2x2
        G(2*LIN-1,2*COL-0)=G(2*LIN-1,2*COL-0)+G2x2
    END SELECT
  END IF
END SELECT
END DO
END DO
END DO
END SELECT
ELSE IF(SINGULAR=.FALSE.)THEN !.....TERMOS NAO SINGULARES

```

5 EXEMPLOS

Com o intuito de se validar a formulação apresentada, analisam-se três exemplos, sendo o primeiro, uma aplicação puramente algébrica do método da subtração de singularidade, enquanto os outros dois são problemas clássicos da elasticidade linear cuja solução analítica é bastante difundida.

5.1 Exemplo 1: Cálculo da Integral $I = \int_{\Gamma} \frac{1}{r} d\Gamma$ Quando $r \rightarrow 0$

Por simplicidade, considera-se um elemento curvo quadrático conforme a [Figura 3](#).

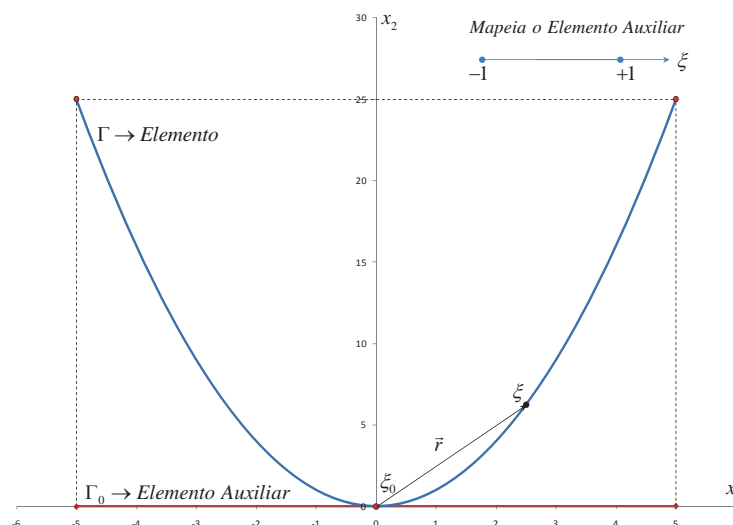


Figura 3: Elemento curvo quadrático e elemento reto auxiliar.

O valor da integral será singular quando $r \rightarrow 0$, ou seja, $\xi \rightarrow \xi_0$. O procedimento apresentado a seguir consiste na aplicação do método da subtração de singularidade, tomando-se as aproximações polinomiais para representar a geometria do problema.

Utilizando o polinômio de Lagrange (ver Eq. (9)), encontram-se as seguintes funções de forma para o elemento quadrático,

$$\phi_1(\xi) = \frac{1}{2}(\xi^2 - \xi), \quad \phi_2(\xi) = (1 - \xi^2) \quad \text{e} \quad \phi_3(\xi) = \frac{1}{2}(\xi^2 + \xi).$$

A interpolação da geometria será feita da seguinte forma,

$$x_1(\xi) = \phi_1(\xi)x_1^1 + \phi_2(\xi)x_1^2 + \phi_3(\xi)x_1^3; \quad \text{com } x_1^1 = -5, \quad x_1^2 = 0 \quad \text{e} \quad x_1^3 = +5$$

$$x_2(\xi) = \phi_1(\xi)x_2^1 + \phi_2(\xi)x_2^2 + \phi_3(\xi)x_2^3; \quad \text{com } x_2^1 = 25, \quad x_2^2 = 0 \quad \text{e} \quad x_2^3 = 25$$

Resultando em $x_1(\xi) = 5\xi$ com $x_{1,\xi}(\xi) = 5$ e $x_2(\xi) = 25\xi^2$ com $x_{2,\xi}(\xi) = 50\xi$. Dessa forma pode-se concluir que o vetor tangente em qualquer ponto sobre o elemento Γ é dado por $\vec{T} = (5, 50\xi)$.

A fim de se proceder a subtração de singularidade deve-se primeiramente calcular os valores de $r(\xi)$ e do jacobiano $J(\xi)$ no espaço adimensional. Procedendo-se os cálculos, obtém-se,

$$r(\xi) = \sqrt{[x_1(\xi) - x_1(\xi_0)]^2 + [x_2(\xi) - x_2(\xi_0)]^2} = \sqrt{25\xi + 625\xi^2} \sqrt{\xi^2} \quad \text{com } \xi_0 = \xi = 0 \quad \text{e}$$

$$J(\xi) = \sqrt{[x_{1,\xi}(\xi)]^2 + [x_{2,\xi}(\xi)]^2} = \sqrt{25 + 2500\xi^2}$$

Devem-se calcular também os valores de $r(\xi_0 + \varepsilon) = r^*(\xi)$ e $J(\xi_0 + \varepsilon) = J^*(\xi)$, ou seja, nas vizinhanças da singularidade, $\varepsilon \rightarrow 0$. Para isso procede-se a expansão em série de Taylor

até a primeira ordem da geometria, o que equivale a realizar a integração sobre o elemento auxiliar, ilustrado na **Figura 3**. Procedendo-se os cálculos necessários obtém-se,

$$x_1^*(\xi + \varepsilon) = x_1(\xi_0) + x_{1,\varepsilon}(\xi_0)\varepsilon \text{ com } \varepsilon = \xi - \xi_0,$$

$$x_2^*(\xi + \varepsilon) = x_2(\xi_0) + x_{2,\varepsilon}(\xi_0)\varepsilon \text{ com } \varepsilon = \xi - \xi_0.$$

Para $\xi_0 = 0$, o ponto singular, tem-se $x_1^*(\xi) = 5\xi$ e $x_2^*(\xi) = 0$ com $x_{1,\varepsilon}^*(\xi) = 5$ e $x_{2,\varepsilon}^*(\xi) = 0$. Calculando-se $r^*(\xi)$ e $J^*(\xi)$, encontra-se,

$$r^*(\xi) = \sqrt{[x_1^*(\xi) - x_1^*(\xi_0)]^2 + [x_2^*(\xi) - x_2^*(\xi_0)]^2} = 5\sqrt{\xi^2} \text{ com } \xi_0 = \xi = 0 \text{ e}$$

$$J^*(\xi) = \sqrt{[x_{1,\varepsilon}^*(\xi)]^2 + [x_{2,\varepsilon}^*(\xi)]^2} = 5$$

Assim, dada a integral $I = \int_{\Gamma} \frac{1}{r} d\Gamma = \int_{-1}^{+1} \frac{1}{r(\xi)} J(\xi) d\xi$. Aplicando-se a subtração de singularidade tem-se, $\int_{-1}^{+1} \frac{1}{r(\xi)} J(\xi) d\xi = \int_{-1}^{+1} \left[\frac{1}{r(\xi)} J(\xi) - \frac{1}{r^*(\xi)} J^*(\xi) \right] d\xi + \int_{-1}^{+1} \frac{1}{r^*(\xi)} J^*(\xi) d\xi$.

$$\text{Substituindo os devidos valores, obtém-se, } \int_{-1}^{+1} \left[\frac{\sqrt{25 + 2500\xi^2} - 1}{\sqrt{25\xi + 625\xi^2}} \frac{1}{\sqrt{\xi^2}} \right] d\xi + \int_{-1}^{+1} \frac{1}{\sqrt{\xi^2}} d\xi.$$

Tendo em vista que a primeira parcela é limitada, pois

$$\lim_{\xi \rightarrow \xi_0=0} \left\{ \frac{\sqrt{25 + 2500\xi^2} - 1}{\sqrt{25\xi + 625\xi^2}} \frac{1}{\sqrt{\xi^2}} \right\} = \lim_{\xi \rightarrow 0} \left\{ \frac{1875\sqrt{\xi^2}}{(25 + 625\xi^2)^2} \sqrt{25 + 2500\xi^2} \right\} = 0$$

Essa parcela fica regularizada podendo ser avaliada por algum método de integração numérica como, por exemplo, a quadratura de Gauss-Legendre. Já a segunda parcela deve ser avaliada como um valor principal de Cauchy, que resulta,

$$\int_{-1}^{+1} \frac{1}{\sqrt{\xi^2}} d\xi = \int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{1}{|\xi|} d\xi + \int_{+\varepsilon}^{+1} \frac{1}{|\xi|} d\xi = \ln|\varepsilon| - \ln|-1| + \ln|+1| - \ln|\varepsilon| = 0.$$

Com este exemplo pode-se constatar a técnica de regularização utilizando um elemento auxiliar reto. A seguir apresentam-se os exemplos avaliados pelo código computacional que leva em consideração, a utilização de elementos de contorno curvos com qualquer ordem de aproximação para problemas da elasticidade linear.

5.2 Exemplo 2: Cilindro com Pressão Interna Constante

O exemplo consiste no cilindro pressurizado com uma pressão interna constante, conforme a Figura 4. Nesse exemplo avaliam-se as tensões radiais dos nós distribuídos ao longo da espessura do cilindro

Utilizam-se nesse modelo as formulações singulares em deslocamento e em forças de superfície aplicadas ao modelo com uma malha com aproximação cúbica. Nessa malha utiliza-se 64 elementos de contorno para discretizar o contorno externo e outros 64 elementos para discretizar o contorno interno. Os valores de deslocamento radial de todos os pontos do contorno foram exatamente iguais ao valor analítico esperado, não sendo necessário fazer gráfico ou tabela comparativa.

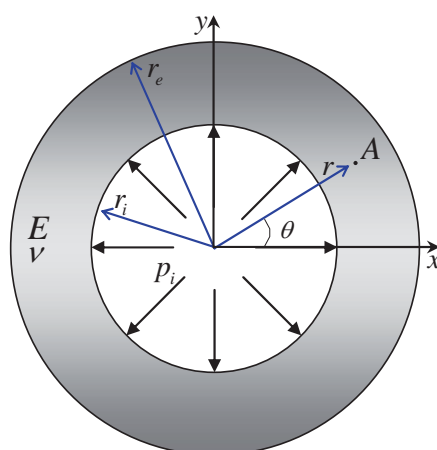


Figura 4: Elemento curvo quadrático e elemento reto auxiliar.

Os dados do problema são os seguintes:

- Análise: Estado plano de deformação.
- Módulo de elasticidade do material: $E = 7,3 \times 10^5 \text{ MPa}$.
- Coeficiente de Poisson: $\nu = 0,32$.
- Pressão interna: $p_i = 100,0 \text{ MPa}$.
- Raio externo: $r_e = 100,0 \text{ cm}$.
- Raio interno: $r_i = 50,0 \text{ cm}$.
- Ângulo: $\theta = 0^\circ$ para os pontos do domínio
- Erro relativo: $|e(\tilde{\sigma}_i)| = \frac{|\sigma_i - \tilde{\sigma}_i|}{|\sigma_i|}$.

Sendo $|e(\tilde{\sigma}_i)|$ a norma Euclidiana e $\sigma_i, \tilde{\sigma}_i$ as tensões analíticas e numéricas, respectivamente.

As tensões radiais para pontos internos são calculadas sem nenhum procedimento de integração especial para pontos que se aproximam do contorno. Os seus respectivos erros em relação a solução analítica são apresentados na Tabela 1.

r (cm)	Analítico (MPa)	CPPI-M128G3-U (MPa)	Erro (%)	CPPI-M128G3-T (MPa)	Erro (%)
55	-76.85950	-77.18242	0.420	-76.68985	0.221
60	-59.25926	-59.29900	0.067	-59.05375	0.347
65	-45.56213	-45.56412	0.004	-45.40285	0.350
70	-34.69388	-34.69344	0.001	-34.56550	0.370
75	-25.92593	-25.93295	0.027	-25.81625	0.423
80	-18.75000	-18.76948	0.104	-18.65067	0.530
85	-12.80277	-12.84414	0.323	-12.71017	0.723
90	-7.81893	-7.92267	1.327	-7.75211	0.855
95	-3.60111	-4.11747	14.339	-3.84343	6.729

Tabela 1: Tensão radial dos nós de domínio.

Como se observa, apesar de se encontrar valores exatos para os deslocamentos no contorno, o cálculo de tensões para pontos internos próximos ao contorno são prejudicados pelo uso de quadratura de Gauss simples. Além disso, o cálculo das tensões sobre o contorno utilizando-se a Eq. (21) também coincide com o valor exato. Esta constatação é óbvia tendo em vista que esta equação foi tratada pela mesma técnica de subtração de singularidades aqui apresentada.

5.3 Exemplo 3: Cavidade Pressurizada no Meio Infinito

Avalia-se esse exemplo para constatar a potencialidade do método dos elementos de contorno em representar problemas inseridos em meios infinitos procedendo-se apenas a discretização do contorno da cavidade, de acordo com a Figura 5.

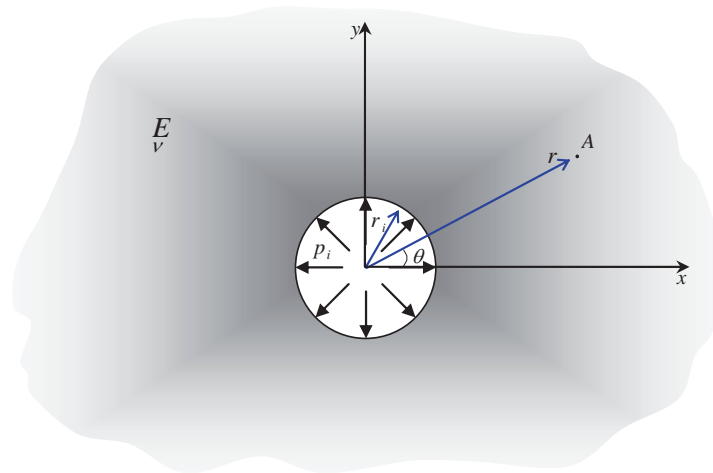


Figura 5: Cavidade pressurizada no meio infinito.

Os dados do problema são:

- Análise: Estado plano de deformação,
- Módulo de elasticidade do meio: $E = 2,05 \times 10^4 \text{ KN/cm}^2$,
- Coeficiente de Poisson do meio: $\nu = 0,3$,

- Pressão: $p_i = 100,0 \text{ KN/cm}^2$, e
- Raio: $r_i = 10,0 \text{ m}$.
- Ângulo: $\theta = 0^\circ$ para os pontos do domínio

Calculam-se os deslocamentos radiais dos nós localizados no meio infinito utilizando-se o modelo com 64 elementos de contorno com aproximações do 1º, 3º e 5º grau das formulações em deslocamento e em força de superfície. Os resultados desse exemplo são apresentados nas Tabela 2 e Tabela 3. Novamente os deslocamentos não apresentaram erro significativo. Não foram calculados valores de tensão para pontos internos próximos ao contorno devido as deficiências do procedimento de integração numérica para pontos fontes próximos ao contorno.

r (m)	Analítico (mm)	CPMI-M64G1-U (mm)	Erro (%)	CPMI-M64G3-U (mm)	Erro (%)	CPMI-M64G5-U (mm)	Erro (%)
15	42.27642	42.19862	0.18	42.36751	0.22	42.35782	0.19
20	31.70732	31.62537	0.26	31.78574	0.25	31.78164	0.23
25	25.36585	25.29244	0.29	25.43386	0.27	25.43157	0.26
30	21.13821	21.07341	0.31	21.19757	0.28	21.19611	0.27
35	18.11847	18.06101	0.32	18.17082	0.29	18.16981	0.28
40	15.85366	15.80226	0.32	15.90034	0.29	15.89959	0.29
45	14.09214	14.04576	0.33	14.13418	0.30	14.13359	0.29
50	12.68293	12.64073	0.33	12.72111	0.30	12.72064	0.30
55	11.52993	11.49127	0.34	11.56489	0.30	11.56450	0.30
60	10.56911	10.53345	0.34	10.60132	0.30	10.60098	0.30
65	9.75610	9.72303	0.34	9.78595	0.31	9.78567	0.30
70	9.05923	9.02841	0.34	9.08705	0.31	9.08679	0.30
75	8.45528	8.42643	0.34	8.48131	0.31	8.48109	0.31
80	7.92683	7.89971	0.34	7.95128	0.31	7.95108	0.31
85	7.46055	7.43497	0.34	7.48360	0.31	7.48342	0.31
90	7.04607	7.02187	0.34	7.06788	0.31	7.06771	0.31
95	6.67522	6.65226	0.34	6.69591	0.31	6.69575	0.31
100	6.34146	6.31962	0.34	6.36114	0.31	6.36099	0.31

Tabela 2: Deslocamento radial dos nós de domínio. Formulação em deslocamento.

r (m)	Analítico (mm)	CPMI-M64G1-T (mm)	Erro (%)	CPMI-M64G3-T (mm)	Erro (%)	CPMI-M64G5-T (mm)	Erro (%)
15	42.27642	41.85219	1.00	42.24214	0.08	42.20249	0.17
20	31.70732	31.35944	1.10	31.69215	0.05	31.67128	0.11
25	25.36585	25.07727	1.14	25.35948	0.03	25.34496	0.08
30	21.13821	20.89298	1.16	21.13582	0.01	21.12461	0.06
35	18.11847	17.90575	1.17	18.11800	0.00	18.10886	0.05
40	15.85366	15.66607	1.18	15.85418	0.00	15.84644	0.05
45	14.09214	13.92449	1.19	14.09318	0.01	14.08646	0.04
50	12.68293	12.53145	1.19	12.68424	0.01	12.67830	0.04
55	11.52993	11.39183	1.20	11.53138	0.01	11.52605	0.03
60	10.56911	10.44223	1.20	10.57061	0.01	10.56577	0.03
65	9.75610	9.63878	1.20	9.75762	0.02	9.75319	0.03
70	9.05923	8.95014	1.20	9.06074	0.02	9.05665	0.03
75	8.45528	8.35335	1.21	8.45677	0.02	8.45297	0.03
80	7.92683	7.83118	1.21	7.92827	0.02	7.92473	0.03
85	7.46055	7.37045	1.21	7.46195	0.02	7.45862	0.03
90	7.04607	6.96093	1.21	7.04743	0.02	7.04430	0.03
95	6.67522	6.59452	1.21	6.67654	0.02	6.67358	0.02
100	6.34146	6.26476	1.21	6.34274	0.02	6.33993	0.02

Tabela 3: Deslocamento radial dos nós de domínio. Formulação em força de superfície.

6 CONCLUSÃO E PROSTA FUTURA

Com os resultados obtidos após a aplicação do método da subtração de singularidade constata-se a robustez do método, uma vez que se verificam bons resultados para os problemas analisados. Destaca-se a utilização dos polinômios de Lagrange na generalização do grau da aproximação assim como na geração de elementos de contorno curvos o que contribui com os desenvolvimentos futuros pretendidos nesta pesquisa. Os desenvolvimentos seguintes estão associados à implementação de rotinas específicas para a integração de núcleos regulares de pontos fonte próximos aos elementos de contorno curvos.

7 AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem à CAPES pelo financiamento desta pesquisa

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Aliabadi, M.H., *The boundary element method. Applications in solids and structures*. Chichester, New York: J. Wiley, 2002. 580 p.
- Aliabadi, M. H., Hall, W. S., Two-dimensional boundary element kernel integration using series expansions. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 6:140–143, 1989.
- Coda, H. B., *Contribuição à análise dinâmica transiente de meios contínuos pelo método dos elementos de contorno*. 2000. 403 p. Tese (Livre Docência em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2000.
- Guiggiani, M., Casalini, P., Direct computation of Cauchy principal value integrals in advanced boundary elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 24:1711–1720, 1987.
- Kzam, A. K. L., *Formulação dual em mecânica da fratura utilizando elementos de contorno curvos de ordem qualquer*. 2009. 186 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2009.
- Mukherjee, S., CPV and HPF integrals and their application in the boundary element method. *International Journal of Solids and Structures*, 37:6623–6634, 2000.
- Sládek, V., Sládek, J., *Singular integrals in boundary element methods*. Southampton, UK; Boston : Computational Mechanics Publications, 1998. 425p.
- Venturini, W. S., *Um estudo sobre o método dos elementos de contorno e suas aplicações em problemas de engenharia*. 1988. 349 p. Tese (Livre Docência em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1988.