

UM MODELO PARA O ACOPLAMENTO ENTRE O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO E O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS EM ANÁLISES DE DOMÍNIOS REFORÇADOS CONSIDERANDO COMPORTAMENTO ELASTOPLÁSTICO DOS ENRIJECEDORES

Edson D. Leonel, Wilson S. Venturini

Universidade de São Paulo / Escola de Engenharia de São Carlos – Departamento de Engenharia de Estruturas. Avenida Trabalhador SãoCarlense, 400, São Carlos-SP, Brasil. CEP 13.566-590, edleonel@sc.usp.br, venturin@sc.usp.br, <http://www.set.eesc.usp.br>

Palavras Chave: Acoplamento MEC/MEF, Plasticidade, Domínios Reforçados.

Resumo. Este trabalho apresenta uma formulação para a análise de domínios enrijecidos utilizando o acoplamento entre o método dos elementos de contorno (MEC) e o método dos elementos finitos (MEF). O acoplamento do MEC a outros métodos numéricos sempre foi atrativo, uma vez que permite empregar o método numérico mais conveniente na representação das sub-estruturas onde este apresenta melhor eficiência. Neste trabalho, o modelo proposto emprega as equações do MEC na descrição do comportamento estrutural do domínio em análise, enquanto nos enrijecedores esse comportamento é descrito pelas equações do MEF. Os enrijecedores possuem dois graus de liberdade por nó o que permite que estes formem uma configuração de treliça no interior do domínio. O comportamento não-linear elastoplástico será simulado considerando três diferentes leis de encruamento: isotrópica, cinemática e mista. A presente formulação utiliza o processo de regularização por mínimos quadrados sobre o conjunto final de equações. Tal procedimento é necessário devido à adoção de diferentes graus para os polinômios aproximadores dos deslocamentos e das forças de superfície nos enrijecedores, o que faz com que sejam geradas mais equações que o número de incógnitas da análise. Estruturas enrijecidas foram analisadas pela formulação proposta, sendo seus resultados comparados aos resultados fornecidos pelo programa ANSYS.

1 INTRODUÇÃO

Os problemas tratados em engenharia de estruturas requerem, normalmente, análises sobre o comportamento estrutural. Como soluções analíticas são aplicáveis muitas vezes somente sob condições simplificadas, essas análises são efetuadas utilizando métodos numéricos. Dentre os métodos numéricos mais empregados destacam-se o método dos elementos de contorno (MEC) e o método dos elementos finitos (MEF). O MEF é usualmente escolhido para a análise de problemas envolvendo não linearidades no domínio e estruturas de dimensões finitas. Já o MEC é particularmente eficiente em problemas envolvendo concentrações de tensão (como problemas de mecânica da fratura) e domínios infinitos. Existem problemas onde esses diferentes fenômenos podem ser encontrados atuando conjuntamente. Portanto, a combinação de métodos numéricos torna-se uma solução interessante para a análise desses problemas. A combinação entre os diversos métodos numéricos é um assunto de grande interesse, pois possibilita empregar o método numérico mais conveniente na representação das sub-estruturas onde estes apresentam maior eficiência, aproveitando melhor assim as particularidades de cada um.

A idéia do acoplamento entre MEF e MEC foi discutida pela primeira vez em Zienkiewicz et al (1977). O conhecimento sobre teoria e algoritmos para esse acoplamento são hoje já consolidados. Elleithy et al (2004), Kurz et al (1995) e Ganguly et al (2000) apresentam uma extensiva revisão bibliográfica sobre esse assunto, destacando as formulações e suas aplicações em diversas áreas. Bialecki et al (2002) discute diversos conceitos, métodos e limitações dos modelos acoplados MEC/MEF. Leonel (2009) apresenta modelos não-lineares do acoplamento MEC/MEF para a análise de problemas envolvendo a propagação de fissuras.

Neste trabalho será apresentada uma formulação para o acoplamento MEC/MEF aplicada à análise de domínios enrijecidos. Nessa formulação, as equações algébricas do MEC representarão o comportamento estrutural do domínio plano em análise, enquanto as equações do MEF serão utilizadas para a descrição do comportamento estrutural dos enrijecedores. O elemento finito adotado apresenta diferentes aproximações para os deslocamentos e para as forças de superfície. Os deslocamentos são aproximados por meio de um polinômio cúbico enquanto as forças de superfície são aproximadas por um polinômio do primeiro grau. Esse procedimento faz com que sejam geradas mais equações que o número de incógnitas do problema. Assim, torna-se necessário a utilização de um processo de regularização para permitir que o sistema final de equações seja solvível. A regularização das equações é efetuada utilizando-se o processo de mínimos quadrados.

O comportamento não-linear físico nos enrijecedores é considerado nessa formulação. As leis de encruamento isótropa, cinemática e mista foram implementadas. Como a plastificação ocorre somente nos enrijecedores, a formulação não-linear leva em conta somente a atualização do conjunto de equações proveniente do MEF. Assim, a formulação é eficiente em termos de custo computacional. Serão apresentados dois exemplos sendo os resultados obtidos pela formulação proposta comparados às respostas fornecidas por um modelo equivalente construído no programa ANSYS, o qual efetua a análise de estruturas utilizando somente as equações do MEF.

2 CONCEITOS BÁSICOS DA TEORIA DA PLASTICIDADE

Macroscopicamente, o comportamento plástico de um material pode ser caracterizado por meio da ocorrência de deformações irreversíveis, ou seja, não recuperáveis, observadas num ciclo de carregamento e descarregamento. Usualmente, o material apresenta um nível de tensão denominado tensão de plastificação, que uma vez atingido pode levar à ocorrência de

deformações plásticas.

Materiais elastoplásticos perfeitos são aqueles nos quais a tensão jamais excede a tensão de plastificação e uma vez que esta seja atingida e mantida, toda a deformação adicional que passa a ocorrer é exclusivamente de natureza plástica, conforme ilustra a Figura 1, para o caso de tração uniaxial. Materiais cuja tensão pode aumentar além da tensão de plastificação (usualmente denominada nesse caso de limite elástico) apresentam o fenômeno de encruamento positivo, como indicado na Figura 2.

Nos materiais em regime elastoplástico, a deformação total é composta por parcelas plástica e elástica. Nesse regime não há uma correspondência unívoca entre tensão e deformação, sendo necessário o conhecimento da história de carregamento, caracterizada pelo nível de deformação plástica acumulada.

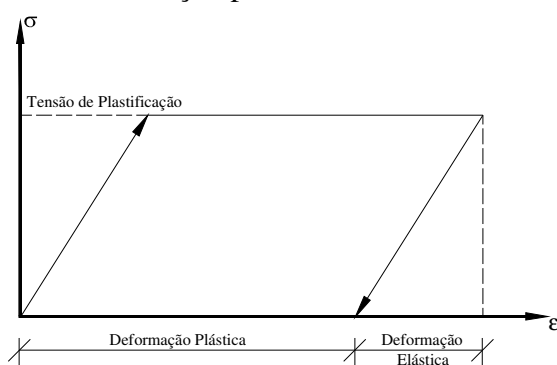


Figura 1 - Caso elastoplástico perfeito.

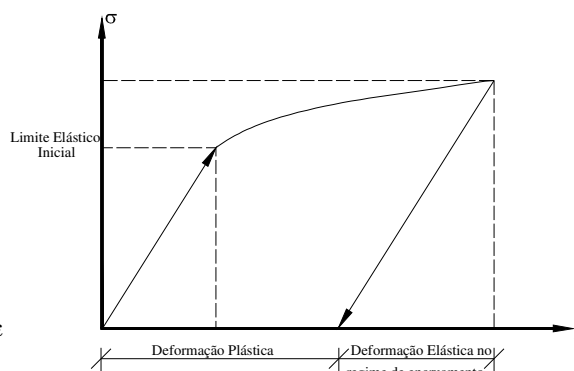


Figura 2 - Caso elastoplástico com encruamento.

A modelagem dos problemas de plastificação, que será aqui mostrada apenas para o caso unidimensional, é feita admitindo-se que a deformação total atuante no corpo, ε , pode ser dividida em parte elástica, ε^e , e parte plástica ε^p ,

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p \quad (1)$$

A partir da Eq. (1), pode se obter a tensão, σ , no elemento de fibra por meio da lei de Hooke. A tensão pode ser escrita em termos de taxas admitindo-se que a tensão e as deformações plásticas e elásticas sejam funções contínuas no tempo. Dessa forma,

$$\dot{\sigma} = E \cdot \dot{\varepsilon}^e \Rightarrow \dot{\sigma} = E \cdot \left(\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}^p \right) \quad (2)$$

onde E é o módulo de elasticidade longitudinal. Nos problemas que envolvem plastificação com encruamento, o intervalo elástico inicial se altera com a evolução da plastificação, seja em tamanho, posição ou uma combinação de ambos. O encruamento é chamado isótropo quando ocorre uma expansão do intervalo elástico de modo simétrico ao seu centro. Normalmente, postula-se que o encruamento seja uma função da deformação plástica acumulada (encruamento por deformação). Caso seja diretamente proporcional ao módulo da deformação plástica, o encruamento isótropo é dito linear. Para este caso, a função de plastificação tem por expressão,

$$f(\sigma, \alpha) = |\sigma| - (\sigma_y + K^p \cdot \alpha) \leq 0 \quad (3)$$

na Eq. (3), o termo K^p é chamado de módulo plástico de encruamento isotrópico, σ_y é a tensão de escoamento do material e α é uma medida da deformação plástica acumulada, definida por $\alpha = \int_0^t |\dot{\epsilon}^p| dt$. O módulo utilizado na definição de α implica que a evolução da plastificação tanto na compressão como na tração produz encruamento, ou seja, um aumento do intervalo elástico inicial.

Seguindo o trabalho de Proença (2004) e as condições de consistência e complementaridade é possível determinar as expressões para a deformação plástica e para a tensão atuante no elemento de fibra. Essas duas grandezas são escritas como indica a Eq. (4),

$$\dot{\epsilon}^p = \frac{E}{(E + K^p)} \dot{\epsilon} \quad \dot{\sigma} = \frac{E \cdot K^p}{(E + K^p)} \dot{\epsilon} \quad (4)$$

o termo $\frac{E \cdot K^p}{(E + K^p)}$ define o módulo elastoplástico tangente no trecho de encruamento.

Já no problema envolvendo encruamento cinemático o intervalo elástico inicial tem seu tamanho mantido, porém sua origem no espaço das tensões é modificada pelo processo de plastificação. Neste caso, a função de plastificação assume a seguinte forma,

$$f(\sigma, q) = |\sigma - q| - \sigma_y \leq 0 \quad (5)$$

A variável q indica o deslocamento do intervalo elástico em relação à sua posição original, sendo também, uma função da deformação plástica. Essa variável é definida pela multiplicação entre o módulo plástico de encruamento cinemático, H^p , e a deformação plástica, $q = H^p \cdot \epsilon^p$.

Deve-se observar que o sentido da variação do parâmetro q é definido pelo sentido do fluxo plástico. Uma plastificação devida à tração altera o limite elástico à tração para $(\sigma_y + q_1)$ e reduz, em módulo, o limite elástico à compressão. Essa assimetria induzida pelo modelo de encruamento cinemático permite reproduzir o chamado efeito *Bauschinger*.

De forma semelhante ao efetuado para o caso de encruamento isotrópico, as expressões para a deformação plástica e para a tensão atuante no elemento de fibra podem ser obtidas utilizando as condições de consistência e complementaridade. Como mostrado em Proença (2004) tem-se,

$$\dot{\epsilon}^p = \frac{E}{(E + H^p)} \dot{\epsilon} \quad \dot{\sigma} = \frac{E \cdot H^p}{(E + H^p)} \dot{\epsilon} \quad (6)$$

onde $\frac{E \cdot H^p}{(E + H^p)}$ é o módulo elastoplástico tangente.

Pode também ser construído um modelo que mescle as características presentes nos encruamentos isotrópico e cinemático. Este tipo de encruamento é denominado misto, o qual fornece expansão e translação do intervalo elástico. Nesse tipo de modelo o critério de plastificação passa a ser dado por:

$$f(\sigma, q, \alpha) = |\sigma - q| - (\sigma_y + K^p \cdot \alpha) \leq 0 \quad (7)$$

As variáveis da Eq. (7) foram já discutidas nas equações anteriores. Dessa forma, para que esse tipo de encruamento seja definido deve-se determinar as expressões para a deformação plástica e para a tensão atuante no elemento de fibra. Conforme Proença (2004) tem-se,

$$\dot{\varepsilon}^p = \frac{E}{(E + H^p + K^p)} \dot{\varepsilon} \quad \dot{\sigma} = \frac{E \cdot (H^p + K^p)}{(E + H^p + K^p)} \dot{\varepsilon} \quad (8)$$

sendo $\frac{E \cdot (H^p + K^p)}{(E + H^p + K^p)}$ o módulo elastoplástico tangente para o encruamento misto.

Utilizando o equacionamento discutido nesse item, pode-se empregar as equações algébricas do MEC para a análise elastoplástica de domínios enrijecidos.

3 EQUAÇÕES DO ELEMENTO FINITO DE FIBRA

Neste trabalho serão consideradas fibras retilíneas mergulhadas em qualquer direção dentro do domínio bidimensional. As extremidades das fibras podem chegar ao contorno e valores de força ou deslocamento podem ser prescritos diretamente no elemento da fibra. As fibras serão modeladas com elementos finitos de barra de geometria reta com dois graus de liberdade por nó, paralelo e normal ao eixo da barra.

Para a obtenção do conjunto de equações proveniente do MEF, tomemos a equação diferencial de equilíbrio para um ponto x qualquer do domínio da barra sujeita a uma força \bar{f} ,

$$\frac{d^2(u(x))}{dx^2} + \frac{1}{2 \cdot G \cdot S \cdot (1 + \nu)} \bar{f}(x) = 0 \quad (9)$$

sendo: $u(x)$ o deslocamento longitudinal do ponto x , G o módulo de elasticidade transversal do material da fibra, ν o coeficiente de Poisson e S a área da seção transversal da fibra.

Parece bastante razoável a adoção de polinômios com diferentes graus para as aproximações dos deslocamentos, $u(x)$, e das forças, \bar{f} , por elemento finito. Para o elemento de fibra, adota-se um polinômio cúbico para aproximar os deslocamentos e um linear para as forças. Assim, a derivada segunda do deslocamento aproximado tem o mesmo grau polinomial que a força aproximada, conforme a equação diferencial de equilíbrio, Eq. (9).

Definem-se, por elemento finito, quatro variáveis nodais de deslocamento e duas de força, conforme apresenta a Figura 3.

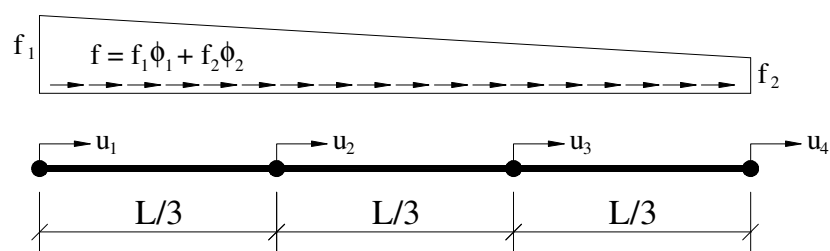


Figura 3 - Variáveis nodais do elemento finito de fibra.

Conforme a Figura 3, os quatro nós com as variáveis de deslocamento estão definidos nas duas extremidades e nos terços do elemento. Os nós com as variáveis de força são os dois de extremidade da fibra. As equações algébricas de equilíbrio do elemento da Figura 3 são obtidas utilizando-se o princípio dos trabalhos virtuais, expresso pela seguinte equação,

$$\sum_{\Omega_E=1}^{NF} \left(\int_{\Omega_E} [\sigma(u^E) \cdot \delta \varepsilon(\delta u^E)] d\Omega_E - \int_{\Omega_E} (f^E \cdot \delta u^E) d\Omega_E - F^i \cdot \delta u^{E_i} \right) = 0 \quad (10)$$

onde: $\sigma(u^E)$ é a tensão normal na fibra, $\varepsilon(u^E)$ a deformação longitudinal na fibra, u^E o deslocamento nodal, f^E a força nodal, F^i são as forças concentradas sobre o nó i , Ω_E o domínio do elemento finito, δ as variação das grandezas e NF o número total de fibras da malha.

Da Eq. (10) resulta o sistema de equações do elemento finito,

$$[K^E] \{u^E\} = [G^E] \{f^E\} + \{F^E\} \quad (11)$$

em que: K^E é a matriz de rigidez do elemento finito, G^E a lumping matrix, u^E o vetor com os deslocamentos nodais, f^E o vetor com as forças de superfície e F^E o vetor com as forças concentradas nos nós.

A matriz G^E , função das características geométricas do elemento, é dada pelo produto das funções polinomiais linear e cúbica da segunda integral da Eq. (10). Para os nós posicionados da forma como apresentado na Figura 3 o sistema matricial da Eq. (11) pode ser explicitado da seguinte forma,

$$\frac{E \cdot S}{L} \begin{bmatrix} 3.7 & -4.725 & 1.35 & -0.325 \\ -4.725 & 10.8 & -7.425 & 1.35 \\ 1.35 & -7.425 & 10.8 & -4.725 \\ -0.325 & 1.35 & -4.725 & 3.7 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1^E \\ u_2^E \\ u_3^E \\ u_4^E \end{Bmatrix} = L \begin{bmatrix} 13/120 & 1/60 \\ 3/10 & 3/40 \\ 3/40 & 3/10 \\ 1/60 & 13/120 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_1^E \\ f_2^E \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} F_1^E \\ F_2^E \\ F_3^E \\ F_4^E \end{Bmatrix} \quad (12)$$

sendo: E o módulo de elasticidade longitudinal e L o comprimento do elemento finito.

4 FORMULAÇÃO DO ACOPLAMENTO MEC/MEF CONSIDERANDO REGULARIZAÇÃO POR MÍNIMOS QUADRADOS

4.1 Equações do MEC e condições de compatibilidade

Para considerar o domínio bidimensional enrijecido com fibras, estas modeladas com elementos finitos e o primeiro com elementos de contorno, propõe-se uma formulação combinando as equações dos dois métodos admitindo-se a aderência perfeita entre os dois meios. O acoplamento entre os materiais é garantido por meio da imposição das equações de equilíbrio de forças e compatibilidade de deslocamentos. Assim,

$$f^D = -f^E \quad (13)$$

$$u^D = u^E \tag{14}$$

onde: f^D, f^E são as forças do domínio do corpo e na fibra respectivamente e u^D, u^E os deslocamentos nos pontos nodais no domínio e na fibra respectivamente.

O termo f^E corresponde à força distribuída que a fibra aplica ao corpo a qual, por equilíbrio, é igual e de sinal oposto a força que atua na própria fibra. Os deslocamentos na interface devem ser iguais por compatibilidade. Para o problema discretizado, as Eq. (13) e Eq. (14) são equivalentes a,

$$\{f^D\} = -\{f^E\} = \{f\} \tag{15}$$

$$\{u^D\} = \{u^E\} = \{u\} \tag{16}$$

O equilíbrio e a compatibilidade são por nó de interface. Para o problema tratado, ou seja, domínio plano com fibras retílineas, a reação das fibras sobre o domínio equivale a uma linha de carga aplicada ao domínio do corpo. Esta linha de carga, por equilíbrio com a força admitida linear no elemento finito, tem a forma de uma seqüência de trechos lineares ligando nós consecutivos conforme mostra a Figura 4.

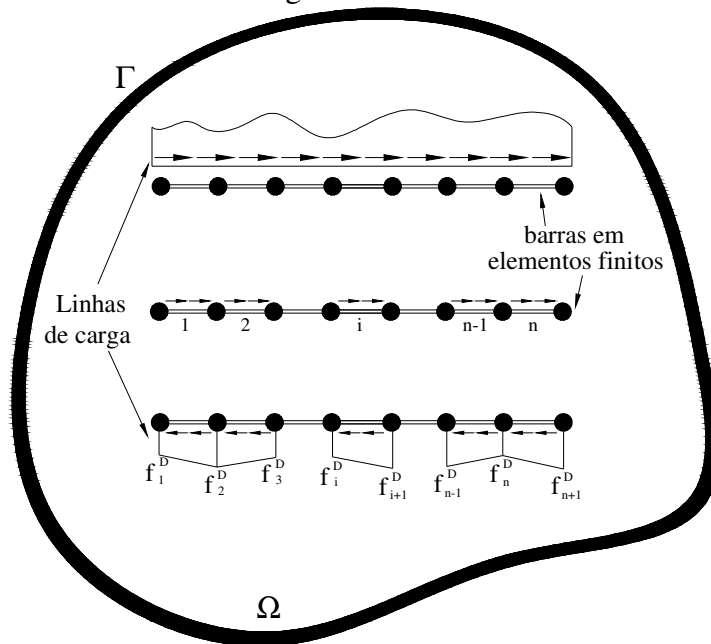


Figura 4 - Linhas de carga aplicadas ao domínio.

Na Figura 4 os elementos são contínuos, ou seja, para n elementos finitos de uma barra tem-se $(n+1)$ nós e variáveis de força. A força incógnita, aplicada ao domínio como uma linha de carga, precisa ser levada em conta nas equações do MEC. A linha de carga aparece nas equações como se fosse uma força de massa aplicada numa área que tende a zero, ou a uma reta nos casos planos. Assim, o termo de domínio da identidade Somigliana pode ser assim reescrito,

$$\int_{\Omega} b_j(c) \cdot u_{ij}^*(f, c) d\Omega = \int_{\Omega_E} f_j^D(c) \cdot u_{ij}^*(f, c) d\Omega_E \tag{17}$$

em que: f_j^D é a reação da fibra sobre o domínio segundo a direção j do sistema cartesiano.

A Eq. (17) fica melhor escrita se ao invés de f^D for decomposta a solução fundamental u_{ij}^* . Dessa forma,

$$\int_{\Omega_E} f_j^D(c) \cdot u_{ij}^*(f, c) d\Omega_E = \int_{\Omega_E} f_j^D(c) \cdot u_{ij}^{*D}(f, c) d\Omega_E = \int_{\Omega_E} f_j^D(c) \cdot u_{ij}^*(f, c) \cdot \eta_j^* d\Omega_E \quad (18)$$

Na Eq. (18) o termo η_j^* indica os cossenos diretores da linha de carga em relação ao sistema de coordenadas cartesianas. A última integral da Eq. (18) pode ser transformada em uma somatória sobre todos os elementos de fibra,

$$\sum_{fb=1}^{ND} \int_{\Omega_E} f_j^D(c) \cdot u_{ij}^*(f, c) \cdot \eta_j^* d\Omega_E = \sum_{fb=1}^{ND} \sum_{k=1}^{NEF} \int_{\Omega_{E_k}} f_j^D(c) \cdot u_{ij}^*(f, c) \cdot \eta_j^* d\Omega_{E_k} \quad (19)$$

Nessa notação ND representa o número total de fibras do domínio e NEF o número total de elementos finitos contidos em cada fibra. Sendo a força aproximada linearmente sobre as linhas de carga a Eq. (19) pode ser reescrita como,

$$\sum_{fb=1}^{ND} \sum_{k=1}^{NEF} \int_{\Omega_{E_k}} f_j^D(c) \cdot u_{ij}^*(f, c) \cdot \eta_j^* d\Omega_{E_k} = \sum_{fb=1}^{ND} \sum_{k=1}^{NEF} \int_{\Omega_{E_k}} (\varphi(c) \cdot u_{ij}^*(f, c) \cdot \eta_j^*) \cdot f_n^D(c) d\Omega_{E_k} \quad (20)$$

sendo: φ a função de aproximação do carregamento e f_n^D os valores nodais do carregamento atuante sobre as fibras.

As integrais apresentadas na Eq. (20) podem ser avaliadas numericamente empregando-se quadratura de Gauss-Legendre. Para melhoria de precisão pode ser utilizado o procedimento de sub-elementação, o qual foi adotado neste trabalho. Caso o ponto fonte pertença à linha de carga recomenda-se calcular essa integral empregando-se recursos analíticos, tal como feito nesse trabalho. Dessa forma a expressão para a determinação das grandezas no contorno é a apresentada na Eq. (21),

$$[H_{bb}]\{U_b\} = [G_{bb}]\{P_b\} + [G_{bE}]\{f^D\} \quad (21)$$

Sendo as matrizes $[H_{bb}]$ e $[G_{bb}]$ iguais às matrizes $[H]$ e $[G]$ clássicas do MEC, decorrentes da integração das soluções fundamentais de deslocamento e força de superfície sobre o contorno. O sub-índice b indica contorno. A matriz $[G_{bE}]$ contém os coeficientes de integração da Eq. (20).

Para completar as equações necessárias ao acoplamento e a conseqüente determinação dos parâmetros do contorno, falta montar as equações algébricas dos deslocamentos dos pontos internos. Deve-se escrever uma equação para cada deslocamento do meio contínuo, nos pontos coincidentes com os nós de deslocamento dos elementos finitos, para que a Eq. (16) seja obedecida. Assim,

$$u^D = u_i(f)\eta_i^* = \int_{\Gamma} P_j(c) \cdot u_{ij}^*(f, c) \cdot \eta_i^* d\Gamma - \int_{\Gamma} u_j(c) \cdot P_{ij}^*(f, c) \cdot \eta_i^* d\Gamma + \int_{\Omega_E} f^E(c) \cdot u_{ij}^*(f, c) \cdot \eta_j^* \eta_i^* d\Omega_E \quad (22)$$

Ou seja, a Eq. (22) é a equação integral dos deslocamentos dos pontos internos do sólido, na direção do eixo da fibra, que é a direção do grau de liberdade em deslocamento do elemento de barra, Figura 3. A Eq. (22) vale somente para pontos fontes “f” internos. A equação algébrica que resulta da Eq. (22), aplicada a todos os nós internos, pode ser escrita como,

$$[H_{Eb}]\{U_b\} + \{U_E\} = [G_{Eb}]\{P_b\} + [G_{EE}]\{f^D\} \quad (23)$$

Sendo $[H_{Eb}]$, $[G_{Eb}]$ e $[G_{EE}]$ matrizes de influência das integrações dos pontos internos.

Na Figura 5, tem-se a representação de uma barra, discretizada em n elementos finitos, e da linha de carga de domínio, superposta à barra. Os nós de deslocamento, definidos geometricamente para cada elemento finito, segundo a Figura 3, estão representados por quadrados na Figura 5. As cruces representam os pontos fontes “f” da Eq. (22) dos deslocamentos internos. Observa-se que, nas extremidades da fibra, para os primeiro e último nós, as equações do MEC não são escritas na posição dos nós, mas para posições deslocadas, internas à linha de carga. Para os demais nós, internos à linha de carga, os pontos fonte da equação do MEC coincidem com os nós de deslocamento dos elementos finitos.

O esquema da Figura 5 estende-se, nesta formulação, para todas as fibras do domínio. Este esquema facilita a integração analítica sobre o primeiro e último elementos da linha de carga da integral da Eq.(20), para a equação dos pontos deslocados de extremidade. Outra vantagem é permitir que as extremidades das fibras possam chegar ao contorno do corpo sem que a equação do MEC necessite ser escrita para pontos do contorno, evitando complicações.

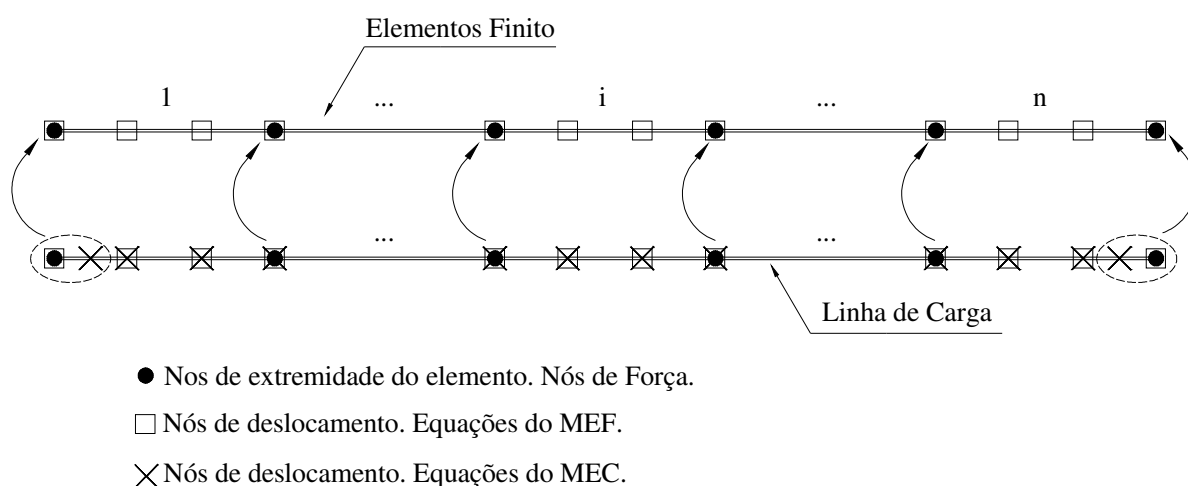


Figura 5 - Nós internos para a equação dos deslocamentos do MEC.

Com as posições dos nós definidas na Figura 5 a equação de compatibilidade de deslocamentos deve ser reescrita como,

$$\{u^D\} = [T]\{u^E\} = [T]\{u\} \quad (24)$$

Sendo $[T]$ a matriz que relaciona a posição dos nós de $\{u^D\}$ com os nós de $\{u^E\}$. Por exemplo, da Figura 3, para os dois pontos fonte deslocados das extremidades da fibra, supondo-os distantes de cada extremidade de $L/6$ do comprimento do primeiro ou do último elemento que contêm os pontos fonte, tem-se,

$$[T] = \begin{bmatrix} 0.3125 & 0.9375 & -0.3125 & 0.0625 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0.0625 & -0.3125 & 0.9375 & 0.3125 \end{bmatrix} \quad (25)$$

Ou seja, com exceção da primeira e da última linha, a matriz é igual à identidade. Dessa forma, o conjunto de equações para a determinação dos parâmetros do acoplamento MEC/MEF e os valores de contorno podem ser resumidos como na Eq. (26),

$$\begin{aligned} [H_{bb}]\{U_b\} &= [G_{bb}]\{P_b\} + [G_{bE}]\{f^D\} \\ [H_{Eb}]\{U_b\} + [T]\{U_E\} &= [G_{Eb}]\{P_b\} + [G_{EE}]\{f^D\} \\ [K^E]\{U^E\} &= -[G^E]\{f^D\} + \{F^E\} \\ &\Downarrow \\ [A_{bb}]\{X\} &= [B_{bb}]\{F_b\} + [G_{bE}]\{f^D\} \\ [A_{Eb}]\{X\} + [T]\{U_E\} &= [B_{Eb}]\{F_b\} + [G_{EE}]\{f^D\} \\ [K^E]\{U^E\} &= -[G^E]\{f^D\} + \{F^E\} \end{aligned} \quad (26)$$

Sendo que $[A_{bb}]$ e $[B_{bb}]$ resultam da troca de colunas entre as matrizes $[H_{bb}]$ e $[G_{bb}]$. Já $[A_{Eb}]$ e $[B_{Eb}]$ decorre da troca de colunas entre as matrizes $[H_{Eb}]$ e $[G_{Eb}]$. Enquanto $\{F_b\}$ são os valores prescritos de força de superfície e deslocamentos no contorno e $\{X\}$ são as grandezas incógnitas no contorno.

Resta ainda uma última equação a ser apresentada a qual refere-se à determinação das tensões nos pontos internos ao contorno. Nesse caso, a exemplo da identidade Somigliana, as forças de domínio são levadas em conta através da integral,

$$\int_{\Omega} b_j(c) \cdot D_{ijk}(f, c) d\Omega = \int_{\Omega_E} f_j^D(c) \cdot D_{ijk}(f, c) d\Omega_E \quad (27)$$

O termo D_{ijk} é obtido a partir da derivação da solução fundamental de deslocamento. E a exemplo da Eq. (20) tem-se,

$$\sum_{fb=1}^{ND} \sum_{k=1}^{NEF} \int_{\Omega_{E_k}} f^D(c) \cdot D_{ijk}(f,c) \cdot \eta_k d\Omega_{E_k} = \sum_{fb=1}^{ND} \sum_{k=1}^{NEF} \int_{\Omega_{E_k}} (\varphi(c) \cdot D_{ijk}^*(f,c) \cdot \eta_k) \cdot f_n^D(c) d\Omega_{E_k} \quad (28)$$

Assim a equação para a determinação das tensões internas, de forma semelhante à equação apresentada para a obtenção dos deslocamentos nos pontos internos, pode ser matricialmente expressa como,

$$\left[H_{Ib}^- \right] \{U_b\} + \{\sigma\} = \left[G_{Ib}^- \right] \{P_b\} + \left[G_{IE}^- \right] \{f^D\} \quad (29)$$

Onde o sub-índice I indica ponto interno. As matrizes $\left[H_{Ib}^- \right]$ e $\left[G_{Ib}^- \right]$ são as matrizes de influência das integrações dos pontos internos sobre os elementos no contorno. A matriz $\left[G_{IE}^- \right]$ é obtida como resultado da solução da Eq. (28).

A formulação acima descrita pode ser estendida para o caso em que os elementos finitos de fibra possuem dois graus de liberdade (x e y) e não apenas um grau de liberdade, paralelo ao comprimento da fibra. Esse procedimento foi efetuado neste trabalho e permite a análise de fibras que formam uma configuração de treliça no interior do domínio. A consideração desse tipo de configuração nos enrijecedores é de grande importância, pois permite a análise de estruturas mais complexas e ao mesmo tempo contribui para as formulações do MEC uma vez que formulações do acoplamento MEC/MEF que consideram esse tipo de interação entre enrijecedores não são encontrados na literatura. Para tanto as Eq.(12), Eq. (20), Eq. (22), Eq. (25) e Eq. (28) devem ser reescritas.

Para a Eq. (12), a matriz de rigidez deve ser expandida de forma a contemplar também os deslocamentos na direção normal ao corpo da fibra. O mesmo aplica-se a “lumping matrix” a qual deve também abranger as forças na direção normal ao eixo do elemento de fibra. Assim a matriz de rigidez pode ser reescrita como,

$$\frac{E \cdot S}{L} \begin{bmatrix} 3,7 \cdot C^2 & 3,7 \cdot C \cdot S & -4,725 \cdot C^2 & -4,725 \cdot C \cdot S & 1,35 \cdot C^2 & 1,35 \cdot C \cdot S & -0,325 \cdot C^2 & -0,325 \cdot C \cdot S \\ 3,7 \cdot C \cdot S & 3,7 \cdot S^2 & -4,725 \cdot C \cdot S & -4,725 \cdot S^2 & 1,35 \cdot C \cdot S & 1,35 \cdot S^2 & -0,325 \cdot C \cdot S & -0,325 \cdot S^2 \\ -4,725 \cdot C^2 & -4,725 \cdot C \cdot S & 10,8 \cdot C^2 & 10,8 \cdot C \cdot S & -7,425 \cdot C^2 & -7,425 \cdot C \cdot S & 1,35 \cdot C^2 & 1,35 \cdot C \cdot S \\ -4,725 \cdot C \cdot S & -4,725 \cdot S^2 & 10,8 \cdot C \cdot S & 10,8 \cdot S^2 & -7,425 \cdot C \cdot S & -7,425 \cdot S^2 & 1,35 \cdot C \cdot S & 1,35 \cdot S^2 \\ 1,35 \cdot C^2 & 1,35 \cdot C \cdot S & -7,425 \cdot C^2 & -7,425 \cdot C \cdot S & 10,8 \cdot C^2 & 10,8 \cdot C \cdot S & -4,725 \cdot C^2 & -4,725 \cdot C \cdot S \\ 1,35 \cdot C \cdot S & 1,35 \cdot S^2 & -7,425 \cdot C \cdot S & -7,425 \cdot S^2 & 10,8 \cdot C \cdot S & 10,8 \cdot S^2 & -4,725 \cdot C \cdot S & -4,725 \cdot S^2 \\ -0,325 \cdot C^2 & -0,325 \cdot C \cdot S & 1,35 \cdot C^2 & 1,35 \cdot C \cdot S & -4,725 \cdot C^2 & -4,725 \cdot C \cdot S & 3,7 \cdot C^2 & 3,7 \cdot C \cdot S \\ -0,325 \cdot C \cdot S & -0,325 \cdot S^2 & 1,35 \cdot C \cdot S & 1,35 \cdot S^2 & -4,725 \cdot C \cdot S & -4,725 \cdot S^2 & 3,7 \cdot C \cdot S & 3,7 \cdot S^2 \end{bmatrix} \quad (30)$$

em que: C é o cosseno do ângulo de inclinação do elemento finito e S o seno do ângulo de inclinação do elemento finito.

Enquanto a “lumping matrix” expandida pode ser reescrita como,

$$L \begin{bmatrix} 13/120 & 0 & 1/60 & 0 \\ 0 & 13/120 & 0 & 1/60 \\ 3/10 & 0 & 3/40 & 0 \\ 0 & 3/10 & 0 & 3/40 \\ 3/40 & 0 & 3/10 & 0 \\ 0 & 3/40 & 0 & 3/10 \\ 1/60 & 0 & 13/120 & 0 \\ 0 & 1/60 & 0 & 13/120 \end{bmatrix} \quad (31)$$

A equação dos deslocamentos nos pontos internos, determinada pelo MEC, deve também conter os deslocamentos no plano da estrutura. Assim a Eq. (22) deve ser reescrita como,

$$u^D = u_i(f) = \int_{\Gamma} P_j(c) \cdot u_{ij}^*(f, c) d\Gamma - \int_{\Gamma} u_j(c) \cdot P_{ij}^*(f, c) d\Gamma + \int_{\Omega_E} f^E(c) \cdot u_{ij}^*(f, c) d\Omega_E \quad (32)$$

Já a Eq. (20) deve ser reescrita de forma a considerar as duas forças atuantes em cada nó do elemento finito. Dessa forma a Eq. (20), para esse caso, passa a ser,

$$\sum_{jb=1}^{ND} \sum_{k=1}^{NEF} \int_{\Omega_{E_k}} f^D(c) \cdot u_{ij}^*(f, c) d\Omega_{E_k} = \sum_{jb=1}^{ND} \sum_{k=1}^{NEF} \int_{\Omega_{E_k}} (\varphi(c) \cdot u_{ij}^*(f, c)) \cdot f_n^D(c) d\Omega_{E_k} \quad (33)$$

Para a determinação das tensões nos pontos internos a Eq. (28) deve ser reescrita como,

$$\sum_{jb=1}^{ND} \sum_{k=1}^{NEF} \int_{\Omega_{E_k}} f^D(c) \cdot D_{ijk}(f, c) d\Omega_{E_k} = \sum_{jb=1}^{ND} \sum_{k=1}^{NEF} \int_{\Omega_{E_k}} (\varphi(c) \cdot D_{ijk}^*(f, c)) \cdot f_n^D(c) d\Omega_{E_k} \quad (34)$$

Para a Eq. (25) os valores nodais devem interpolados tanto na direção x quanto na direção y. Assim quando o nó em consideração não é descontínuo atribui-se valor unitário a diagonal correspondente. Caso contrário os valores não nulos apresentados na Eq. (25) devem ser aplicados tanto para o deslocamento x quanto para o deslocamento y.

4.2 Combinação das equações MEC/MEF com regularização por mínimos quadrados

Observando-se os vetores com as variáveis nodais de deslocamento e forças de superfície internos, e das definições para as aproximações desses campos sobre os elementos finitos, constata-se que existem mais variáveis em deslocamento do que em forças de superfície. O número de variáveis de deslocamentos internos é igual a duas vezes o número total de nós do elemento finito enquanto que para as forças de superfície o número de variáveis é igual a duas vezes o número de nós de extremidade do elemento finito.

Observando-se a Eq. (26) pode-se verificar que as variáveis do problema são $\{U_b\}, \{P_b\}, \{U_E\}$ e $\{f^D\}$. No entanto, o conjunto citado tem mais equações que o número de incógnitas. A causa é simples, vem da adoção de diferentes graus para os polinômios aproximadores das forças e deslocamentos internos. Para que o problema tenha solução utiliza-se um procedimento simples baseado na técnica dos mínimos quadrados. Como o

número de equações é maior que o de incógnitas é necessário reduzi-lo a um número conveniente. A técnica de regularização por mínimos quadrados consiste em ajustar o número de equações, tornando o sistema linear solvível, minimizando o erro da resposta quando levada ao sistema original.

Serão agora descritos os três procedimentos implementados neste trabalho para a redução das equações de forma a tornar o sistema solvível. O primeiro deles consiste na aplicação do processo de mínimos quadrados somente sobre as equações de deslocamentos nos pontos internos. Já no segundo, o processo de mínimos quadrados é aplicado somente sobre as equações provenientes do MEF enquanto que o terceiro trata da aplicação de mínimos quadrados sobre o conjunto de equações resultante do acoplamento.

Primeiramente será descrito o processo de regularização utilizando as equações de deslocamento nos pontos internos. O processo de mínimos quadrados aplicado nesse conjunto de equações consiste na pré-multiplicação de todos os termos dessa equação por uma matriz $[G_{EE}^*]$. Assim,

$$[G_{EE}^*][A_{Eb}]\{X\} + [G_{EE}^*][T]\{U_E\} = [G_{EE}^*][B_{Eb}]\{F_b\} + [G_{EE}^*][G_{EE}]\{f^D\} \quad (35)$$

A matriz $[G_{EE}^*]$ pode apresentar duas configurações diferentes para a regularização. Na primeira delas $[G_{EE}^*]$ é tomada igual à transposta da matriz $[G_{EE}]$. Nesse caso a regularização é global já que envolve a influência de cada elemento de fibra sobre os demais. Na segunda configuração, $[G_{EE}^*]$ é igual à transposta de $[G_{EE}]_{ii}$, sendo que essa última matriz contém apenas a influência de cada elemento sobre si próprio. Nesse caso aplica-se a regularização para cada conjunto de equações de cada barra.

Uma segunda alternativa, para a realização do processo de regularização, é a que emprega as equações provenientes do MEF. Nesse caso o processo de mínimos quadrados se faz pré-multiplicando todas as equações fornecidas pelo MEF pela transposta da “lumping matrix”, $[G^E]$. Dessa forma,

$$[G^E]^T [K^E]\{U^E\} = -[G^E]^T [G^E]\{f^D\} + [G^E]^T \{F^E\} \quad (36)$$

Existe também a possibilidade da realização do processo de mínimos quadrados sobre o conjunto final de equações. Para tal deve-se reescrever a Eq. (26) de uma forma mais conveniente, assim,

$$\begin{bmatrix} [A_{bb}] & 0 & -[G_{bE}] \\ [A_{Eb}] & [T] & -[G_{EE}] \\ 0 & [K^E] & [G^E] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{X\} \\ \{U_E\} \\ \{f^D\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [B_{bb}] \\ [B_{Eb}] \\ 0 \end{bmatrix} \{F_b\} \quad (37)$$

A regularização é efetuada pré-multiplicando todo o sistema apresentado na Eq. (37) pela transposta da matriz que multiplica as incógnitas. Assim,

$$\begin{bmatrix} [A_{bb}] & [A_{Eb}] & 0 \\ 0 & [T] & [K^E] \\ -[G_{bE}] & -[G_{EE}] & [G^E] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [A_{bb}] & 0 & -[G_{bE}] \\ [A_{Eb}] & [T] & -[G_{EE}] \\ 0 & [K^E] & [G^E] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{X\} \\ \{U^E\} \\ \{f^D\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [A_{bb}] & [A_{Eb}] & 0 \\ 0 & [T] & [K^E] \\ -[G_{bE}] & -[G_{EE}] & [G^E] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} [B_{bb}] \\ [B_{Eb}] \\ 0 \end{Bmatrix} \{F_b\} \quad (38)$$

Esse procedimento é mais custoso do ponto de vista computacional uma vez que necessita da transposição de uma matriz de grandes dimensões ao passo que nos outros dois casos anteriores apenas uma parte do sistema final é alterado.

5 INCLUSÃO DO COMPORTAMENTO NÃO-LINEAR FÍSICO DOS ENRIJECEDORES NAS EQUAÇÕES DO ACOPLAMENTO MEC/MEF

No modelo proposto, o comportamento não-linear físico (plastificação) ocorre somente nos elementos de fibra. Portanto, para que esse fenômeno seja considerado na formulação, apenas as equações provenientes do MEF devem ser modificadas. O problema não-linear é resolvido utilizando-se o processo clássico de Newton-Raphson, com fases de previsão e correção. Quando esse processo é aplicado na formulação, deve-se atualizar a matriz de rigidez local dos elementos finitos que plastificaram no passo de carga considerado. Nessa situação, as matrizes locais, inicialmente elásticas, devem ser reconstruídas utilizando o módulo elastoplástico tangente, conforme definido no item 2. Assim, as matrizes elásticas $[K^E]$ devem ser substituídas pelas matrizes elastoplásticas $[K^{Ep}]$. Dessa forma, para os elementos finitos que plastificaram, a equação proveniente do MEF, Eq. (11), deve ser substituída por,

$$[K^{Ep}]\{U^E\} = -[G^E]\{f^D\} + \{F^E\} \quad (39)$$

Por meio desse procedimento, faz-se uso do operador tangente, já que a matriz de rigidez será atualizada após a plastificação dos elementos. Utilizando os critérios de plastificação bilineares serão necessárias poucas iterações para a obtenção do equilíbrio, o que torna a formulação interessante do ponto de vista de eficiência computacional.

6 APLICAÇÕES

6.1 Chapa tracionada com enrijecedor inclinado

Nesse exemplo será analisada a estrutura apresentada na Figura 6. Trata-se de uma estrutura plana de comprimento igual a 2,0 metros e altura de 0,50 metros. O carregamento atuante na estrutura é constituído por um deslocamento de 0,05 metros imposto em sua extremidade direita, enquanto na extremidade esquerda a estrutura é engastada. A estrutura apresenta ainda cinco enrijecedores dispostos conforme indicam as hachuras na Figure 6. As propriedades dos materiais adotadas para o exemplo são as seguintes: para a matriz $E = 2,5 \cdot 10^7 \text{ kN/m}^2$ e $\nu = 0,20$, para as fibras $E = 2,1 \cdot 10^8 \text{ kN/m}^2$, área da seção transversal $S = 1,0 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$, tensão de escoamento $\sigma_y = 500 \cdot 10^3 \text{ kN/m}^2$, módulo de encruamento isótropo $K^p = 2,3333 \cdot 10^7 \text{ kN/m}^2$. Encruamento isótropo é considerado nessa análise.

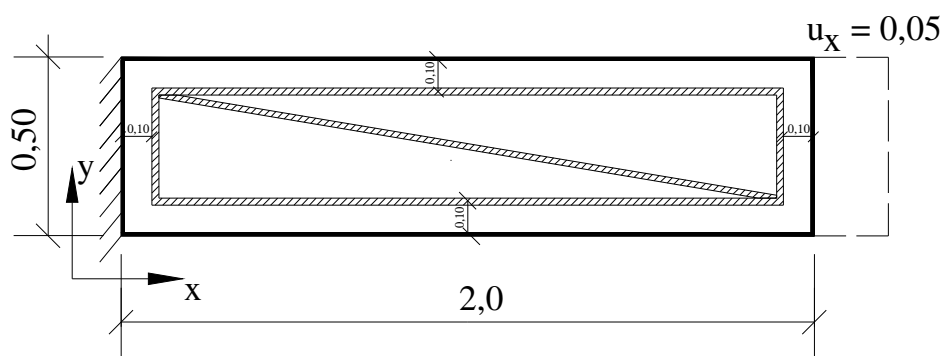


Figura 6 - Estrutura analisada. Dimensões em metro.

O contorno foi discretizado em 126 elementos enquanto nas fibras foram empregados 526 elementos finitos. A regularização é executada fazendo-se o processo de mínimos quadrados nas equações fornecidas pelo MEF.

Inicialmente foram analisados os deslocamentos ao longo do contorno da estrutura. Esse resultado foi comparado à resposta fornecida por um modelo equivalente construído no software ANSYS onde foram empregados 1070 elementos finitos na discretização do domínio e 526 na discretização das fibras. Nos diagramas comparativos dos deslocamentos essa grandeza é mostrada em função da numeração dos nós do contorno. Nesse modelo a numeração começa no canto inferior esquerdo e, a partir da face inferior, cresce no sentido anti-horário. Os diagramas estão apresentados na Figura 7 e na Figura 8 as quais indicam um bom desempenho da formulação proposta.

Foram analisados também os resultados para as fibras inclinada e inferior mostradas na Figura 6. Primeiramente, foram comparados os resultados para as deformações plásticas observadas nas fibras para o carregamento dado. Na Figura 9 é apresentado o diagrama comparativo onde a deformação plástica é mostrada em função do número de elementos finitos presente em cada fibra. Para a fibra inferior a numeração dos elementos começa no canto inferior esquerdo e termina no canto inferior direito. Já para a fibra inclinada a numeração começa no canto inferior direito e termina no canto superior esquerdo.

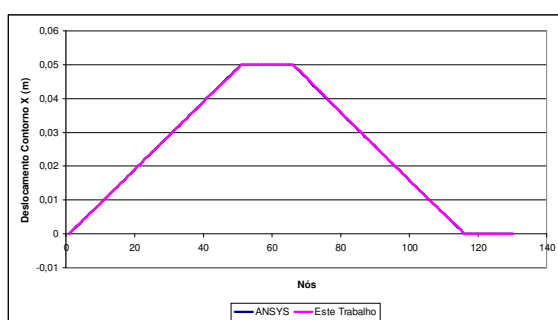


Figura 7 - Deslocamento X contorno.

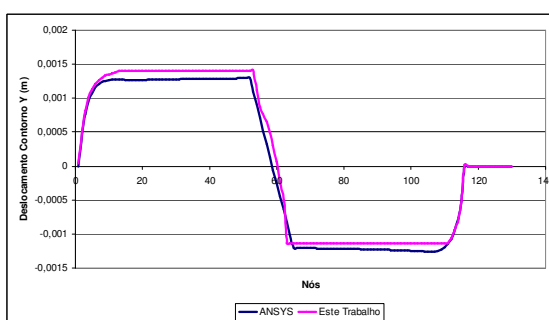


Figura 8 - Deslocamento Y contorno.

O diagrama apresentado na Figura 9 mostra que os resultados fornecidos pelo modelo de acoplamento MEC/MEF são muito próximos aos previsto pelo modelo em elementos finitos via ANSYS, validando, dessa forma, a formulação implementada.

O diagrama comparativo para a força normal atuante nas fibras inferior e inclinada para o carregamento dado é mostrado na Figura 10. Assim como na comparação para a deformação plástica os resultados para a força normal são apresentados em função do número de elementos finitos em cada fibra.

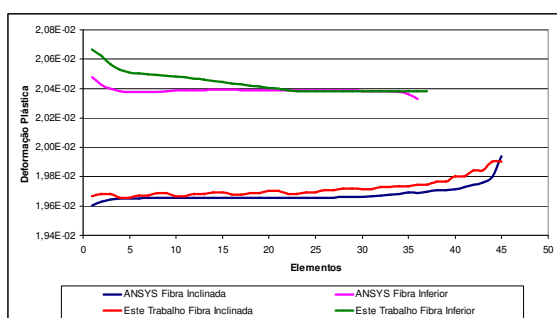


Figura 9 - Deformação plástica fibras.

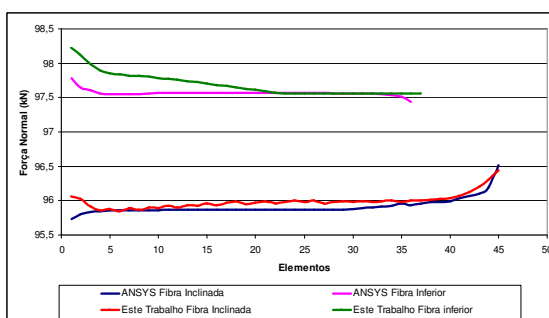


Figura 10 - Força normal fibras.

Verifica-se, por meio da Figura 10, que os resultados obtidos para a força normal nas duas fibras consideradas são concordantes com a resposta fornecida pelo modelo em elementos finitos construído via ANSYS. Assim, esse resultado valida a formulação proposta e implementada.

Por fim, o comportamento das deformações elásticas, para as fibras inferior e inclinada, foi estudado sendo o comparativo dos resultados apresentados na Figura 11. Assim como nos casos anteriores, o modelo de acoplamento MEC/MEF implementado fornece bons resultados quando comparado ao modelo construído no programa ANSYS indicando a eficiência da formulação implementada.

Assim, de acordo com os resultados obtidos para esse exemplo constata-se que a formulação proposta fornece bons resultados quando comparado aos resultados fornecidos por um modelo equivalente construído no software ANSYS. Portanto considera-se validada a formulação proposta e sua implementação.

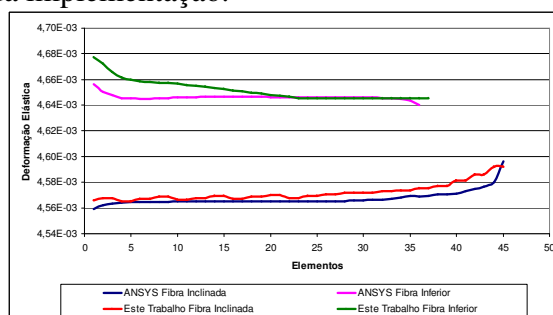


Figura 11 - Deformação elástica fibras.

6.2 Viga bi-apoiada com enrijecedores longitudinais e transversais

Nesse exemplo será discutida a estrutura mostrada na Figura 12. Trata-se de uma estrutura plana, bi-apoiada, de três metros de comprimento por cinquenta centímetros de altura. O carregamento atuante na estrutura é constituído por uma força de superfície igual a $10000 \frac{kN}{m^2}$ prescrito em sua face superior. São distribuídas fibras no domínio da estrutura conforme indicam as linhas na cor azul, apresentadas na Figura 12. As fibras são divididas em superior, inferior e estribos as quais formam um sistema de treliça no interior da estrutura. As propriedades dos materiais adotadas para a estrutura são as seguintes: para a matriz $E = 2,5 \cdot 10^7 \frac{kN}{m^2}$ e $\nu = 0,20$, para todas as fibras foi considerado $E = 2,1 \cdot 10^8 \frac{kN}{m^2}$ e módulo de encruamento isótopo $K^p = 2,3333 \cdot 10^7 \frac{kN}{m^2}$, no entanto a área da seção transversal foi considerada diferente para cada uma delas. Para as fibras superiores tem-se $S_{\text{superiores}} = 4,0 \cdot 10^{-4} m^2$, fibras inferiores $S_{\text{inferiores}} = 9,8 \cdot 10^{-4} m^2$ e estribos $S_{\text{estribos}} = 7,85 \cdot 10^{-5} m^2$. Para

as fibras inferior e superior a tensão de escoamento foi admitida igual a $\sigma_y = 500 \cdot 10^3 \text{ kN/m}^2$ e para os estribos essa grandeza foi considerada igual a $\sigma_y = 250 \cdot 10^3 \text{ kN/m}^2$.

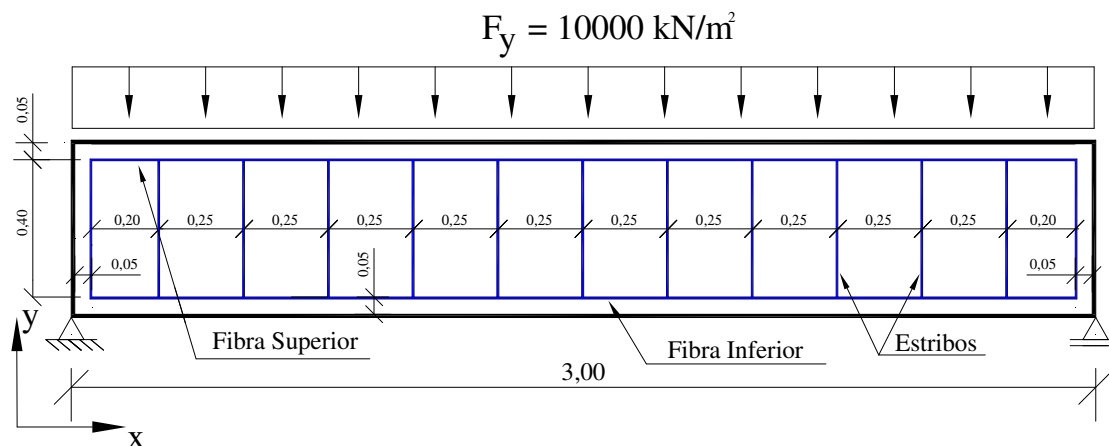


Figura 12 - Estrutura analisada, dimensões em metro.

O contorno foi discretizado em 700 elementos enquanto nas fibras foram utilizados 250 elementos finitos. A regularização é executada fazendo-se o processo de mínimos quadrados nas equações fornecidas pelo MEF. Foram analisados os deslocamentos ao longo do contorno, as deformações elásticas e plásticas e as forças normais nas fibras superiores e inferiores e também no estribo central. Esses resultados foram comparados aos fornecidos por um modelo equivalente construído no software ANSYS. No modelo do ANSYS foram utilizados 15000 elementos, distribuídos em uma malha regular, para a discretização do domínio, enquanto nas fibras foram empregados 1100 elementos.

Os diagramas comparativos dos deslocamentos no contorno da estrutura são apresentados na Figura 13 e Figura 14. Nesses diagramas os deslocamentos são apresentados em função da numeração dos nós no contorno sendo que essa numeração começa no canto inferior esquerdo e, a partir da face inferior, cresce no sentido anti-horário. Conforme apresentam essas duas figuras, o modelo proposto de acoplamento MEC/MEF fornece bons resultados quando comparados ao modelo do ANSYS. Tanto os deslocamentos na direção x quanto na direção y obtidos por ambos modelos numéricos considerados convergem, validando assim a formulação do acoplamento MEC/MEF proposto e implementado.

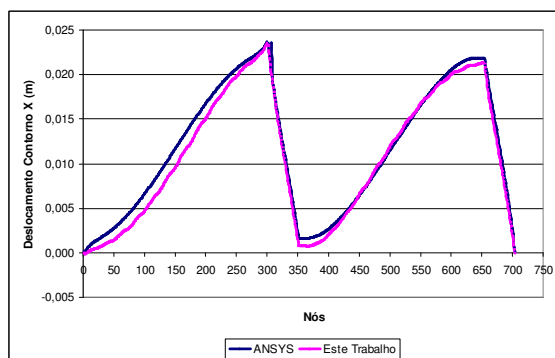


Figura 13 - Deslocamento X contorno.

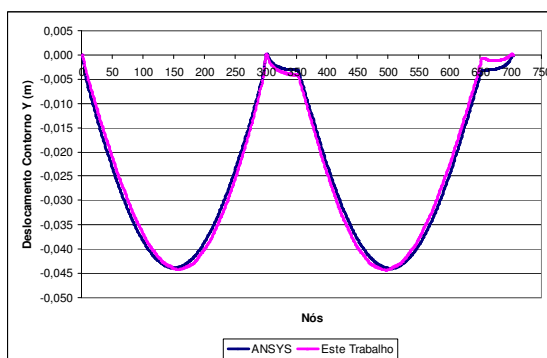


Figura 14 - Deslocamento Y contorno.

Os resultados obtidos para as fibras superior e inferior são mostrados na Figura 15, Figura 16 e Figura 17, onde são estudadas as deformações elásticas, plásticas e a força normal

respectivamente. Nessas figuras essas grandezas são comparadas aos resultados fornecidos pelo programa ANSYS. Por meio desses resultados, constatou-se que as respostas obtidas são concordantes entre os métodos numéricos empregados validando assim a formulação para o acoplamento MEC/MEF proposta e implementada.

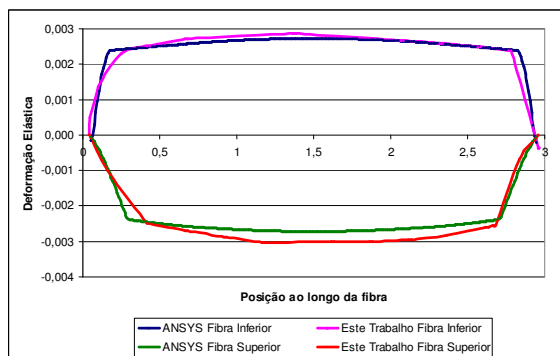


Figura 15 - Deformações elásticas.

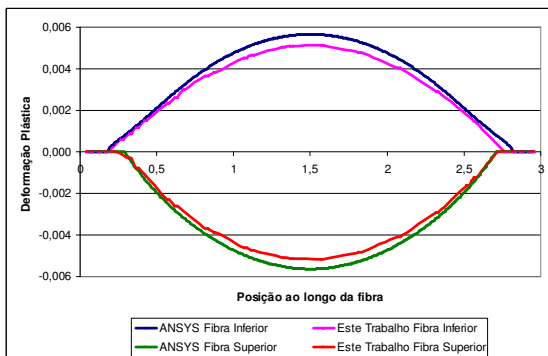


Figura 16 - Deformações plásticas.

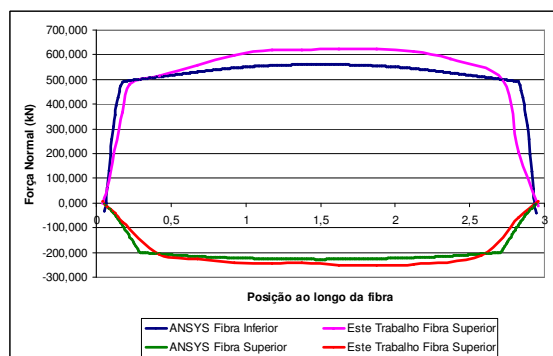


Figura 17 - Forças normais.

Os resultados para as deformações elásticas, plásticas e força normal foram também comparados para o estribo central da estrutura, sendo os mesmos apresentados na Figura 18, Figura 19 e Figura 20. Nessas figuras as grandezas citadas são apresentadas em função da posição da fibra, a qual cresce de acordo com o crescimento da coordenada y dos elementos no estribo central.

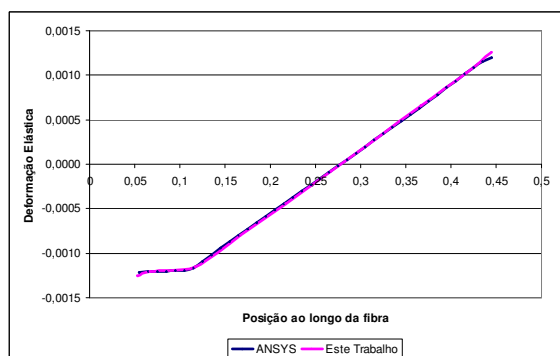


Figura 18 - Deformações elásticas estribo central.

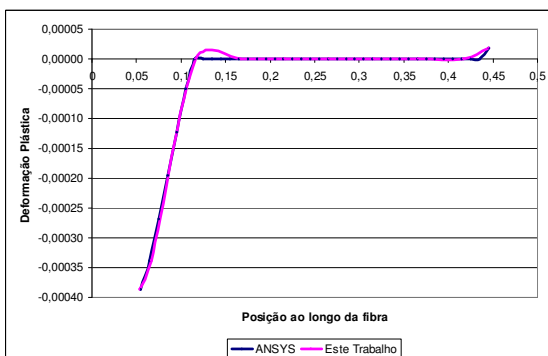


Figura 19 - Deformações plásticas estribo central.

Conforme mostram essas figuras os resultados obtidos pelo modelo de acoplamento MEC/MEF proposto são concordantes com os resultados fornecidos pelo programa ANSYS. Assim considera-se validada a formulação proposta e implementada.

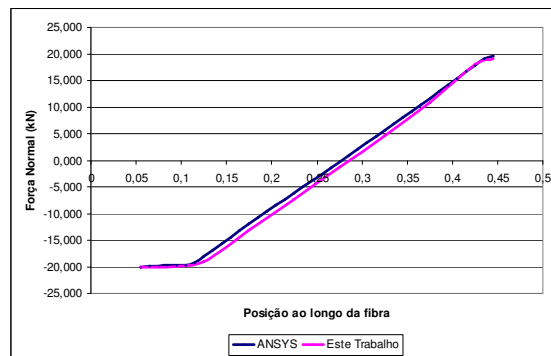


Figura 20 - Força normal estribo central.

7 CONCLUSÕES

Nesse trabalho foi apresentada uma formulação para a análise de domínios enrijecidos utilizando o acoplamento entre o método dos elementos de contorno e o método dos elementos finitos. A formulação proposta foi desenvolvida para levar em conta o comportamento estrutural não-linear físico dos enrijecedores, sendo três os critérios de encruamento considerados na implementação. Sobre o conjunto final de equações do acoplamento MEC/MEF, aplica-se o processo de regularização por mínimos quadrados. Esse procedimento é necessário devido a adoção de diferentes aproximações para os deslocamentos e forças de superfície nos elementos de fibra, o que faz com que sejam geradas mais equações que incógnitas na análise. Esse procedimento levou a resultados precisos como verificado.

A formulação proposta foi testada e os resultados das análises foram comparados às respostas fornecidas por modelos construídos no programa ANSYS. Os resultados são satisfatórios e confirmam a precisão da formulação proposta. Mesmo em estruturas onde os enrijecedores apresentam uma configuração geométrica complexa no interior do sólido, como nos exemplos 1 e 2, a formulação proposta conseguiu representar corretamente o comportamento estrutural.

Assim, pretende-se incluir, na formulação desenvolvida, os efeitos do escorregamento entre as fibras e o meio, bem como a inclusão de problemas de propagação de fissuras em domínios enrijecidos. Esses modelos estão já em desenvolvimento e seus resultados serão brevemente disponíveis.

AGRADECIMENTOS

Os autores gostariam de agradecer à FAPESP pelo apoio financeiro fornecido para a realização desta pesquisa.

REFERÊNCIAS

- Bialecki, R., A., Ostrowski, Z., Kassab, A., J., Yin, Q., Sciubba, E. Coupling BEM-FEM and analytic solutions in steady-state potential problems. *Engineering Analysis with Boundary Elements*. vol.26. 597–611, 2002.
- Elleithy, W., M., Tanaka, M., Guzik, A. Interface relaxation FEM-BEM coupling for elasto-plastic analysis. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, vol. 28, 7:849-857, 2004.
- Ganguly, S., Layton, J., B., Balakrishma, C. Symmetric coupling of multi-zone curved Galerkin boundary elements with finite elements in elasticity. *Int J Numer Meth Engng*. vol.48: 633–54, 2000.
- Kurz, S., Fetzer, J., Lehner, G. An improved algorithm for the BEM-FEM coupling method

using domain decomposition. *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 31, 3:1737-1740, 1995.

Leonel, E, D. *Modelos Não Lineares do Método dos Elementos de Contorno para Análise de Problemas de Fratura e Aplicação de Modelos de Confiabilidade e Otimização em Estruturas Submetidas à Fadiga*, Tese de Doutorado, Universidade de São Paulo, Escola de Engenharia de São Carlos, 2009.

Proenca, S,P,B. *Notas de Aula da disciplina Análise Não Linear*. Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 2004.

Zienkiewicz, O., C., Kelly, D., W., Bettes, P. The coupling of the finite element method and boundary solution procedures. *Int J Numer Meth Engng.*11:355–75, 1977.