

ANÁLISIS DE LA FLEXIBILIDAD DEL CONJUNTO LOSA-VIGA DE HORMIGÓN Y SU SIGNIFICACIÓN EN EL DISEÑO

Peralta, María* ; Ercoli, Norma* ; Dietrich, Claudia* ; Pico, Leonel†

* Area de Estructuras-Departamento de Ingeniería Civil-Facultad de Ingeniería-Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Bs.As. 7400 Olavarría, Argentina.

(mperalta@fio.unicen.edu.ar)

† Alumno Becario Area Estructuras-Departamento de Ingeniería Civil- Facultad de Ingeniería- Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Bs.As. 7400 Olavarría, Argentina.

Palabras Clave: losas-vigas, flexibilidad, hormigón

Resumen. *Los problemas relacionados con el análisis de estructuras de hormigón armado son diversos ya que no sólo deben considerarse las incertidumbres asociadas con el análisis de cargas actuantes, sino también las relacionadas con el modelo de análisis.*

En el caso particular de losas sobre vigas, en general se consideran procedimientos de análisis basados en el uso de soluciones clásicas asumiendo un modelo de comportamiento elástico lineal y con condiciones de apoyos ideales sin considerar la rigidez de las vigas de apoyo.

Un análisis más riguroso con modelos que consideran el trabajo conjunto losa-viga demuestra que la flexibilidad de las vigas de apoyo produce una redistribución de esfuerzos y deflexiones que conducen a diseños más reales y económicos.

En el presente trabajo se analizan mediante el uso del Método de los Elementos Finitos los sistemas constituidos por losas sobre vigas considerando diferentes rigideces de las vigas de apoyo. Los resultados se comparan con los obtenidos mediante la aplicación de métodos de análisis que consideran condiciones ideales de apoyo.

El mencionado análisis permite arribar a conclusiones respecto a cual es el real grado de empotramiento en función de la rigidez de los apoyos y por lo tanto indicar la validez de los modelos de análisis con apoyos ideales.

1 INTRODUCCION

En general el análisis de estructuras requiere, por un lado, la adopción de un modelo lo que implica la toma de decisiones por parte del proyectista en lo que se refiere a idealización de cargas, geometría, apoyos, materiales. Por otro lado, se debe adoptar una metodología de análisis acorde al problema en estudio. Lo indicado justifica el hecho de que no existan soluciones únicas para un mismo problema, pero sí que existan soluciones más adecuada u óptimas desde el punto de vista de la resistencia, economía, durabilidad, que el diseñador debe ser capaz de encontrar.

Las normas vigentes para el diseño estructural dan las pautas mínimas a tener en cuenta para lograr dichas soluciones más adecuadas.

En el caso particular de sistemas de losas el CIRSOC 201/02¹ en su Art. 13.5.1 indica:

"Los sistemas de losas *se pueden diseñar mediante cualquier procedimiento que satisfaga las condiciones de equilibrio y compatibilidad geométrica*, si se demuestra que la resistencia de diseño, en cada sección, es como mínimo, igual a la resistencia requerida por los artículos 9.2 y 9.3 y que se verifican todas las condiciones de servicio, incluyendo los valores límites establecidos para las flechas"

Lo indicado da libertad al proyectista para adoptar los modelos y procedimientos de análisis, siempre que la losa resultante resista el nivel de la carga de trabajo y las deflexiones y el agrietamiento se mantengan dentro de límites aceptables.

Desde el punto de vista de las deflexiones, para el caso de sistemas de losas con vigas en todos los bordes, el criterio que introduce el CIRSOC 201/ 02, para definir el espesor mínimo de la losa h , tiene en cuenta la relación de rigideces entre la losa y las vigas de apoyo en cada una de las direcciones, a través del cálculo del coeficiente α , siendo $\alpha = \frac{E_{cb}I_b}{E_{cs}I_s}$, dando para

ámbitos de variación del mismo, se dan expresiones para la altura h de la losa.

En la ecuación anterior E_{cb} y E_{cs} son los Módulos de Elasticidad del hormigón de la viga y de la losa, (generalmente iguales), I_b e I_s son los Momentos de Inercia de la viga efectiva y de la losa. Según el Art. 13.2.4¹ para los elementos monolíticos o totalmente construidos, las vigas deben incluir como ala, la parte de la losa situada a cada lado de las mismas, dentro de una distancia igual a la proyección abatida de la longitud saliente que configura la viga, hacia arriba o hacia debajo de la losa, la que sea mayor, pero como máximo igual a 4 veces el espesor de la losa.

Desde el punto de vista resistente, en el análisis del conjunto losa-viga de hormigón armado, en general se consideran procedimientos basados en el uso de soluciones clásicas asumiendo un modelo de comportamiento elástico lineal y con condiciones de apoyos ideales utilizando tablas disponibles en la bibliografía². El efecto de la rigidez de las vigas de apoyo ha sido estudiado por otros autores, entre los que pueden citarse el trabajo de *Carbonari y De Souza*³ quienes han estudiado el real comportamiento de las vigas en el conjunto losa-viga utilizando elementos finitos, *Correa y Ramalho*⁴ por otro lado han resuelto un entrepiso utilizando un método simplificado y elementos finitos considerando la interacción entre losas

y vigas. Los autores *Molinas Vega* y *Jourdan Dumot*⁵ presentaron una metodología que permite calcular la redistribución de esfuerzos en losas, obtenidos con tablas de uso habitual, debido a la flexibilidad de las vigas de apoyo. En todos los casos existe coincidencia en que la existencia de vigas de apoyo de dimensiones finitas modifica la distribución de momentos flectores y deflexiones en las losas en función de la rigidez de la viga de apoyo. Acorde con estos conceptos en el caso de sistemas de losas continuas con o sin vigas de apoyo el CIRSOC201/02 considera modelos de análisis, Método de Diseño Directo y Método del Pórtico Equivalente que contemplan las rigideces relativas de los elementos constitutivos del sistema que posibilitan distribuciones de esfuerzos más adecuados.

La adopción de condiciones ideales de apoyos empotrados o simplemente apoyados conduce a esfuerzos que, por lo general, requieren de gran congestión de armadura de apoyo o de tramo en el diseño correspondiente. Lo indicado justifica la importancia de cuantificar la modificación del comportamiento con la variación de las rigideces de las vigas de apoyo a efectos de adoptar para el diseño, con buen criterio, distribuciones de esfuerzos y deflexiones acordes a ellas.

En el presente trabajo se analizan losas aisladas de hormigón apoyadas sobre vigas de diferentes rigideces utilizando el Método de los Elementos Finitos considerando el trabajo conjunto losa-viga. La comparación de los resultados obtenidos con los que resultan de la consideración de condiciones de apoyo ideales permite visualizar el real grado de empotramiento y la correspondiente redistribución de esfuerzos que se puede considerar para el diseño.

2 MODELOS ANALIZADOS

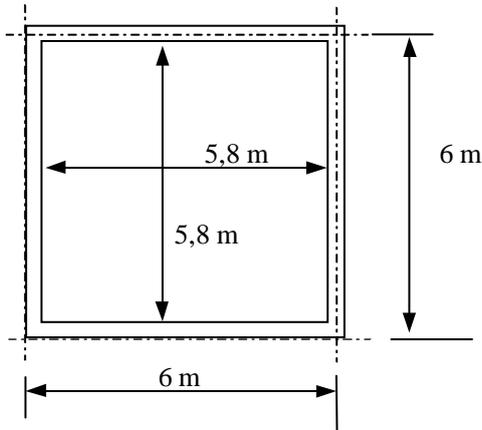
2.1 CASOS DE LOSAS AISLADAS CON CONDICIONES DE APOYOS IDEALES

El análisis de estos modelos se realizó, en primera instancia, considerando método elástico utilizando tablas y aplicando el MEF en la condición de apoyos simples y empotramientos ideales en los cuatro bordes. Esta primera etapa posibilitó, a través de la contrastación de los resultados, lograr la densidad de malla adecuada para la convergencia de los resultados.

Se analizaron losas cuadradas y rectangulares de acuerdo a la siguiente descripción:

Modelo 1: Relación de lados $\beta=1$, con condición de apoyos simplemente apoyada

Modelo 2: Relación de lados $\beta=1$, empotrada en todo el contorno



Datos

Materiales: Hormigón H25 y Acero ADN 420

Carga muerta sobre la losa: $D = 7,5 \text{ KN/m}^2$

Carga viva: $L = 2,5 \text{ KN/m}^2$

Factores de mayoración de carga: $D: 1,2; L: 1,6$

Espesor de la losa = 14 cm

Modelo 3: Relación de lados $\beta=1.5$ (dimensiones en planta 5 m x 7.5 m), con condición de apoyos simplemente apoyada

Modelo 4: Relación de lados $\beta=1.5$ (dimensiones en planta 5 m x 7.5 m), empotrada en todo el contorno

2.2 CASOS DE LOSAS AISLADAS CONSIDERANDO LA RIGIDEZ DE LAS VIGAS DE BORDE

En segunda instancia se consideró la flexibilidad del sistema losa-viga mediante la aplicación del Método de los Elementos Finitos, utilizando el software ALGOR⁶, a efectos de valorizar el grado de empotramiento que se logra con vigas de borde de diferentes rigideces. La losa se modelizó con elementos tipo Placa y las vigas perimetrales con elementos lineales tipo Viga disponibles en la librería de elementos del software. Se estableció como condición la compatibilidad de desplazamientos entre los elementos viga y losa

Se analizaron las losas de relación de lados en planta $\beta=1$ y 1.5 indicadas en inciso 2.1, considerándose la influencia de la rigidez de las vigas perimetrales a través de la variación de la misma según se indica a continuación:

Modelo 5: relación de lados $\beta=1$, con dimensiones en planta de 6m x 6m y dimensiones de vigas de borde:

- 0.20 m x 0.60 m, correspondiendo $L/h= 10.0$
- 0.20 m x 0.80 m, correspondiendo $L/h= 7.5$
- 0.20 m x 1.00 m, correspondiendo $L/h= 6.0$
- 0.20 m x 1.20 m, correspondiendo $L/h= 5.0$

Modelo 6: relación de lados $\beta=1.5$, con dimensiones en planta de 5.0 m x 7.5 m. Dimensiones de vigas de borde acordes a relaciones luz/altura (L/h) de igual valor en ambas direcciones para cada losa e indicadas a continuación:

$L/h= 10.0; L/h= 7.5; L/h= 6.0; L/h= 5.0$

3 RESULTADOS OBTENIDOS

3.1 CASOS DE LOSAS AISLADAS CON CONDICIONES DE APOYOS IDEALES

En Tabla 1 se indican los desplazamientos máximos obtenidos con las dos metodologías utilizadas para las losas cuadradas, simplemente apoyadas y empotradas en su contorno.

TABLA N° 1: Valores de desplazamientos [m] de las losas

Método de Resolución	Modelo 1		Modelo 2	
	Simplemente Apoyada ($\beta=1$)		Empotrada($\beta=1$)	
Tablas	$10.74 \cdot 10^{-3}$		$3.28 \cdot 10^{-3}$	
MEF	$10.81 \cdot 10^{-3}$		$3.375 \cdot 10^{-3}$	

En Tabla 2 se muestran los valores de Momentos máximos de tramo (M_x , M_y) y de apoyo (X , Y) para los casos analizados con $\beta=1$.

TABLA N° 2: Valores de Momentos [KNm/m] de las losas

Método de Resolución	Modelo 1		Modelo 2			
	Simplemente Apoyada^(*) ($\beta=1$)		Empotrada($\beta=1$)			
	M_x	M_y	X	M_x	M_y	Y
Tablas	16.00	16.00	18.3	7.86	7.86	18.3
MEF	18.43	18.43	20.85	8.82	8.82	20.85

(*) El valor correspondiente al momento principal en la zona de esquina es de 18.2 KNm cuyas componentes ortogonales resultan 9.1 KNm

En Figura 1 se observa las distribuciones de desplazamientos y tensiones, obtenidas mediante la aplicación del Método de los Elementos Finitos, para los Modelos 1 y 2.

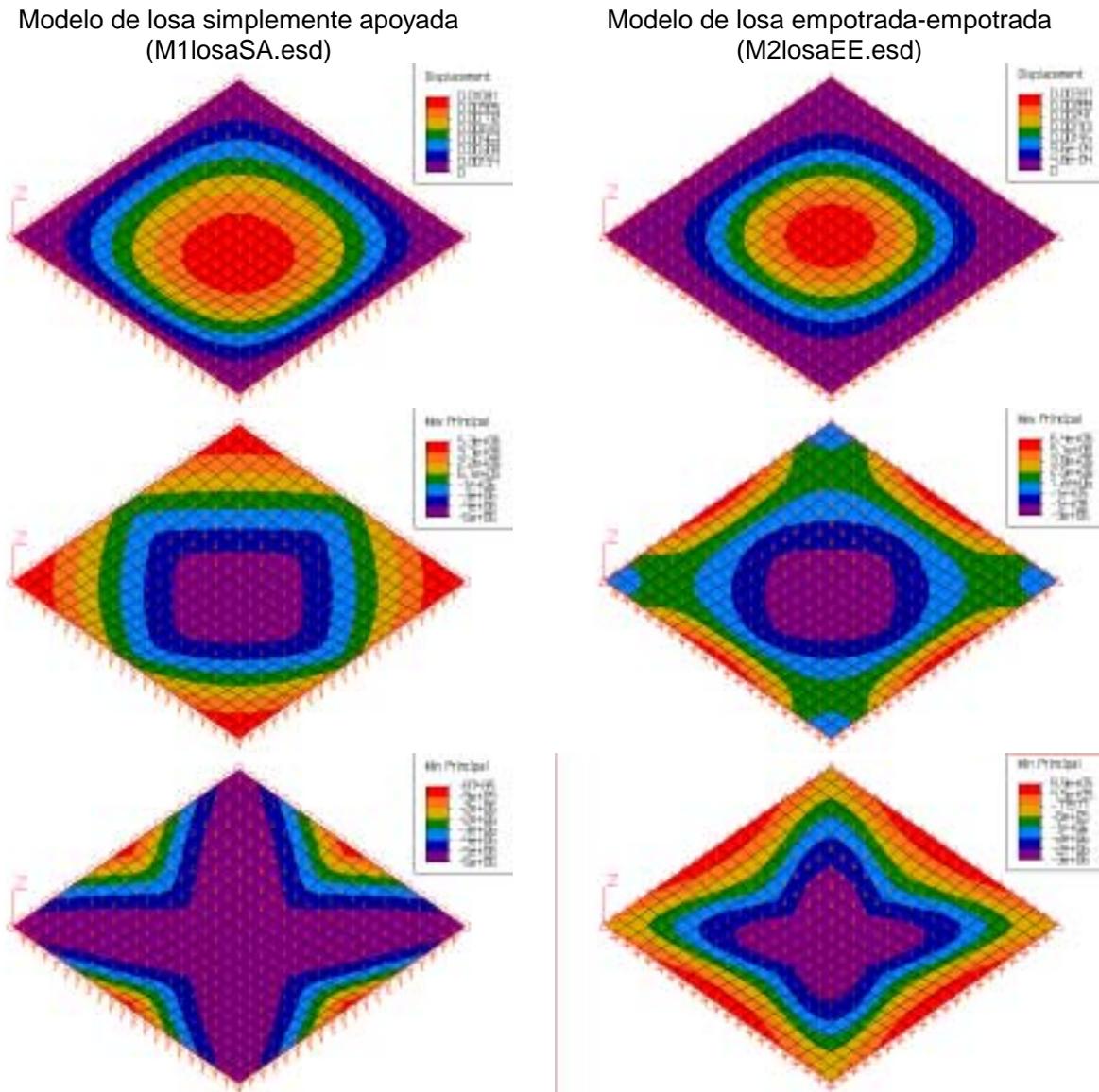


Figura 1: Distribución de desplazamientos, tensiones máximas y mínimas principales en losas con $\beta=1$

En Tablas 3 y 4 se indican los desplazamientos y momentos máximos obtenidos utilizando tablas y el Método de los Elementos Finitos para las losas rectangulares.

En Figura 2 se observa las distribuciones de desplazamientos y tensiones, obtenidas mediante la aplicación del Método de los Elementos Finitos, para los Modelos 1 y 2.

Tabla N° 3: Valores de desplazamientos [m] de las losas

Método de Resolución	Modelo 3 Simplemente Apoyada ($\beta=1.5$)	Modelo 4 Empotrada($\beta=1.5$)
Tablas	$7.5 \cdot 10^{-3}$	$2.09 \cdot 10^{-3}$
MEF	$7.62 \cdot 10^{-3}$	$2.17 \cdot 10^{-3}$

Tabla N° 4: Valores de Momentos [KNm/m] de las losas

Método de Resolución	Modelo 3 Simplemente Apoyada($\beta=1.5$)		Modelo 4 Empotrada($\beta=1.5$)			
	Mx	My	X	Mx	My	Y
Tablas	23.43	10.41	27.10	10.14	4.50	13.50
MEF	24.97	12.8	23.18	11.5	5.0	17.30

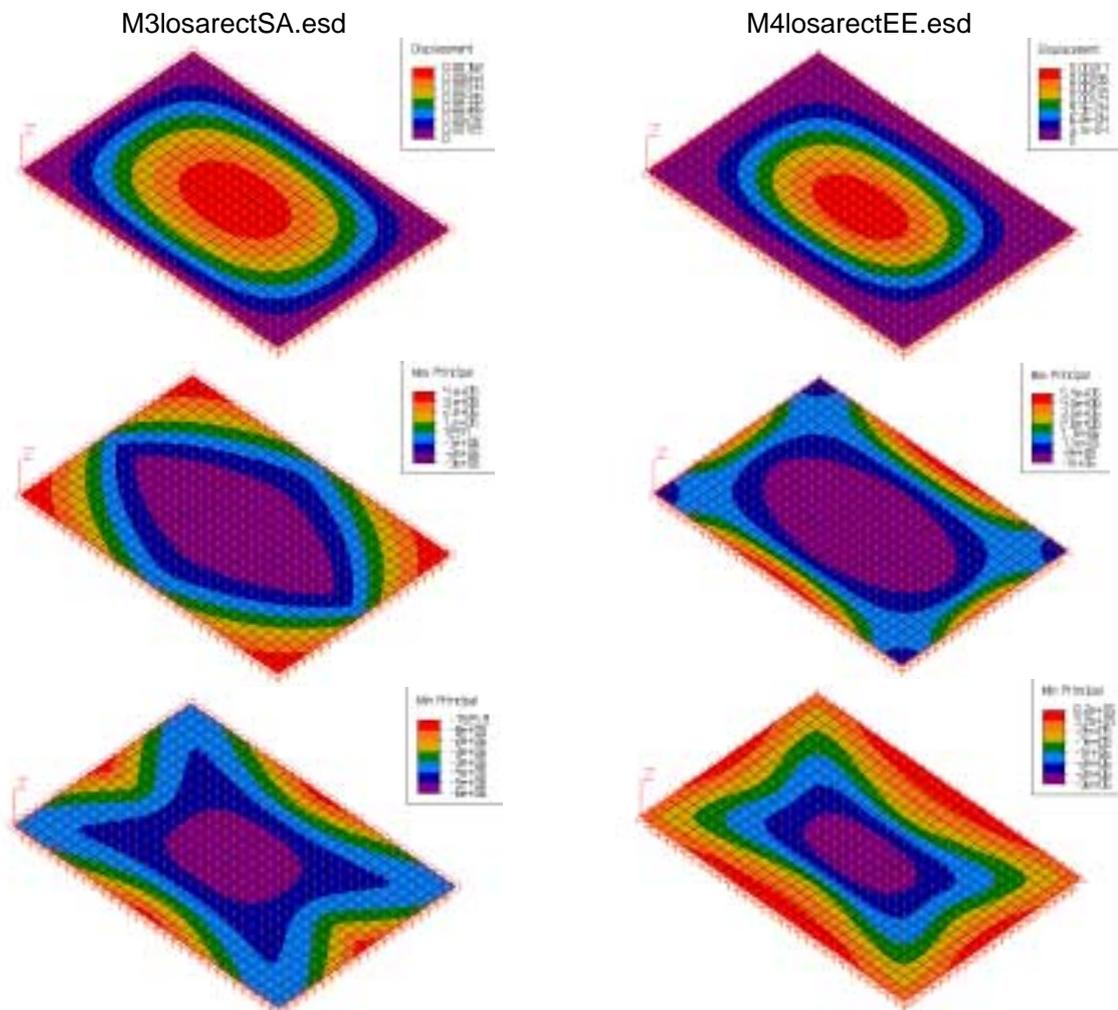


Figura 2: Distribución de Tensiones Máximas y Mínimas Principales en losas con $\beta=1.5$

3.2 CASOS DE LOSAS AISLADAS CONSIDERANDO LA RIGIDEZ DE LAS VIGAS DE BORDE

- **LOSAS CUADRADAS ($\beta=1$)**

La siguiente Figura 3 permite observar algunos de los resultados obtenidos aplicando MEF en las losas con $\beta=1$, considerando la influencia de la flexibilidad del apoyo. En Tabla 5 se presentan los mismos para todas las rigideces de vigas de apoyo consideradas.

Modelo de losa con viga perimetral de 20 x 60
(M5losaviga.esd)

Modelo de losa con viga perimetral de 20 x 100
(M5losaviga20100.esd)

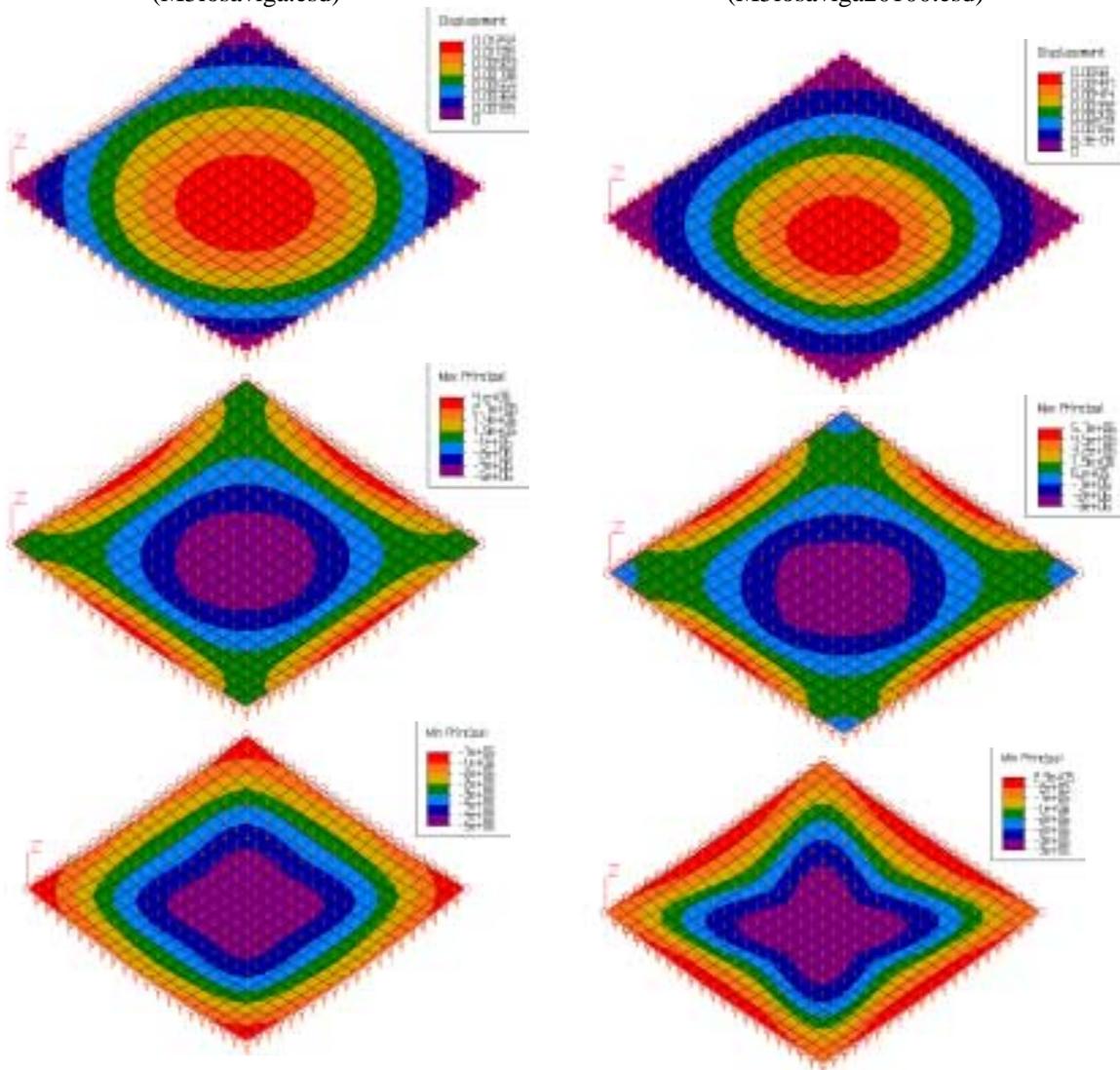


Figura 3: Distribución de desplazamientos, tensiones máximas y mínimas principales en losas con distintas rigideces en las vigas de borde para $\beta=1$

Tabla 5: Valores de desplazamientos y momentos para distintas rigideces de apoyos para $\beta=1$

Modelo	Datos geométricos y mecánicos				Desplazamientos		Momentos de losa		Momento de viga
	Viga perimetral b (m) x h (m)	I (m ⁴)	EI x 10 ⁷ (N-m ²)	L (m)	$\delta_{\text{máx}} \text{ losa (m)}$	$\delta_{\text{máx}} \text{ viga (m)}$	M _{máx+} (Nm)	M _{máx-} (Nm)	M _{máx viga (Nm)}
M1losaSA	*****	*****	*****	5.8	1.081×10^{-2}	*****	18428.8		*****
M2losaEE	*****	*****	*****	5.8	3.372×10^{-3}	*****	8819.53	20844.1	*****
M5losaviga	0.20 x 0.60	0.00360	8	5.8	1.292×10^{-2}	5.186×10^{-3}	15759.8	12929.2	123761.89
M5losaviga2080	0.20 x 0.80	0.00853	20	5.8	7.867×10^{-3}	2.414×10^{-3}	12111.5	17055.7	135778.08
M5losaviga20100	0.20 x 1.00	0.01667	39	5.8	5.803×10^{-3}	1.288×10^{-3}	10616.4	18735.5	140635.55
M5losaviga20120	0.20 x 1.20	0.02880	68	5.8	4.823×10^{-3}	7.555×10^{-4}	9906.12	19531.4	142945.39

En Figuras 4, 5 y 6 se indican las variaciones de los desplazamientos máximos de las losas en función de la rigidez flexional de las vigas de apoyo expresadas en términos de EI .

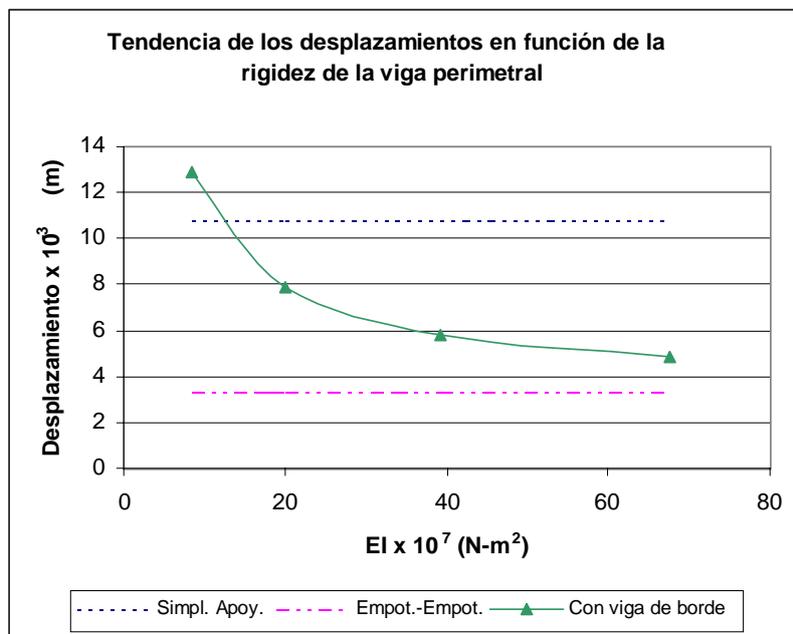


Figura 4: Variación de los desplazamientos máximos en función de la rigidez flexional de las vigas de borde

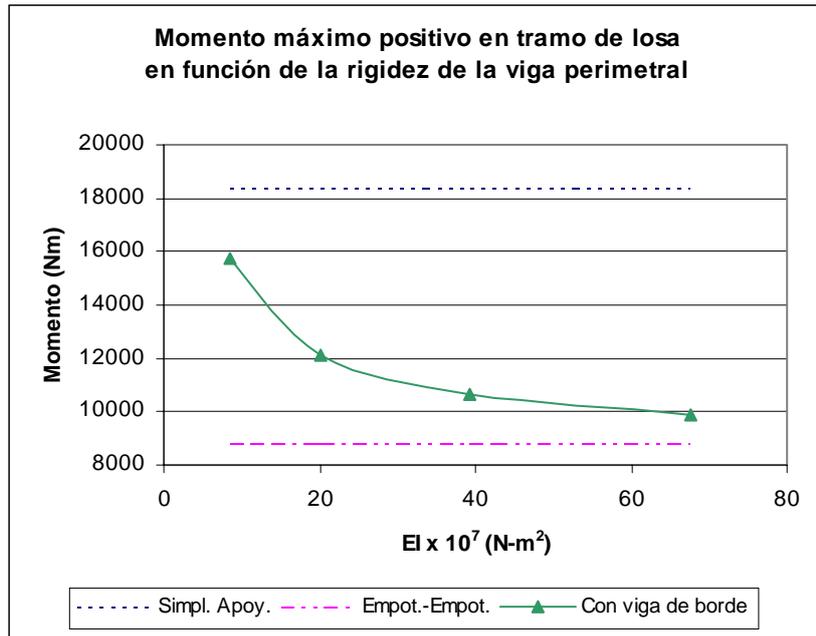


Figura 5: Variación de los momentos máximos positivos en función de la rigidez flexional de las vigas de borde

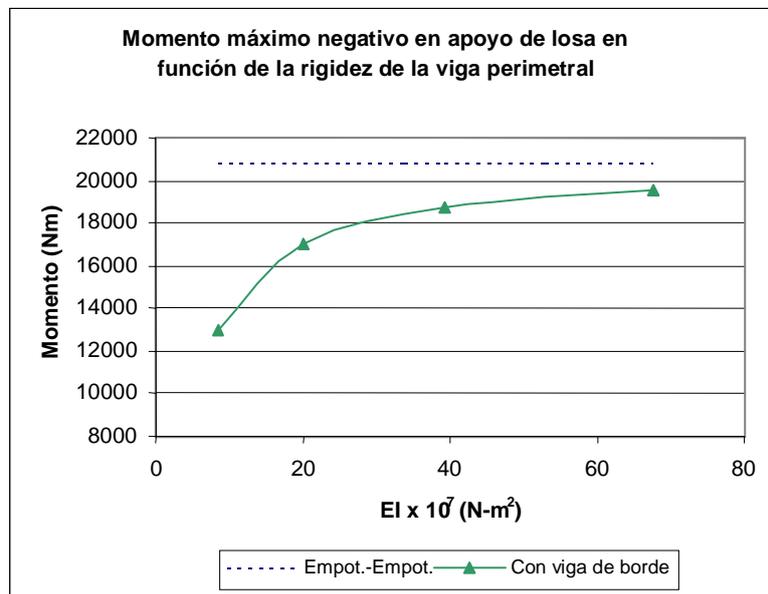


Figura 6: Variación de los momentos máximos negativos en función de la rigidez flexional de las vigas de borde

• **LOSAS RECTANGULARES ($\beta=1.5$)**

En Figuras 7, 8 y 9 se indican las variaciones de los desplazamientos máximos de las losas en función de las rigideces de las vigas de apoyo expresadas, en este caso, en términos de la relación L/h , teniendo en cuenta que al aumentar la rigidez de la viga de apoyo disminuye la relación L/h .

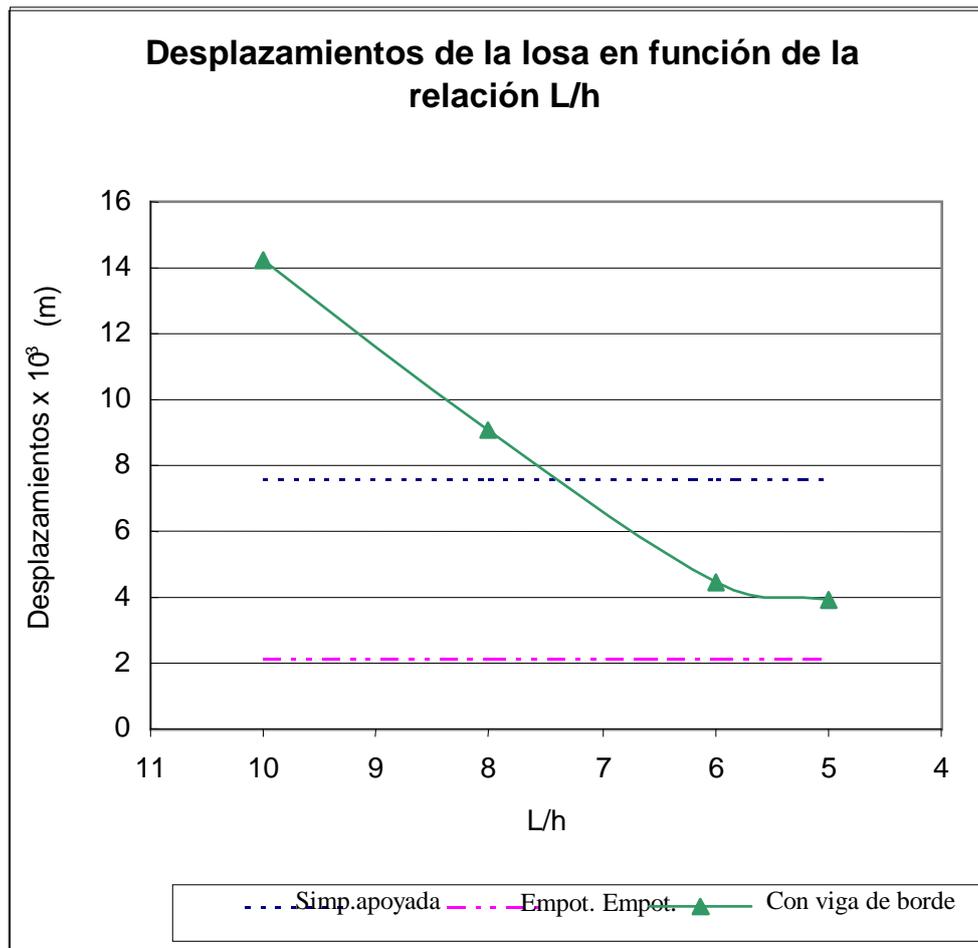


Figura 7: Distribución de desplazamientos máximos en función de la relación L/h

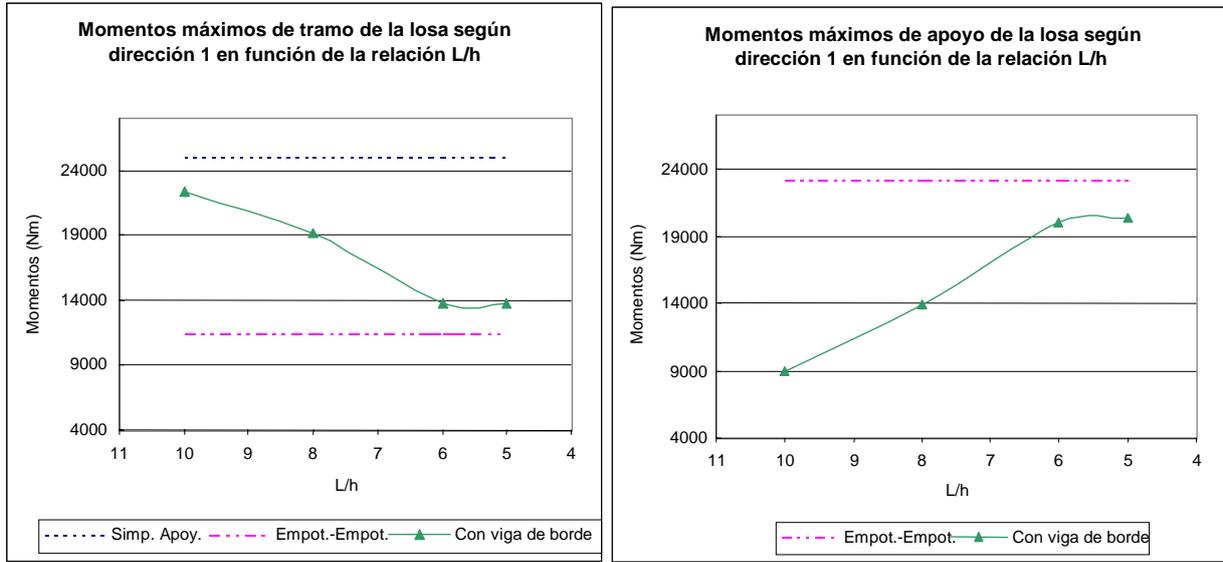


Figura 8: Distribución de momentos máximos positivos y negativos en función de la relación L/h

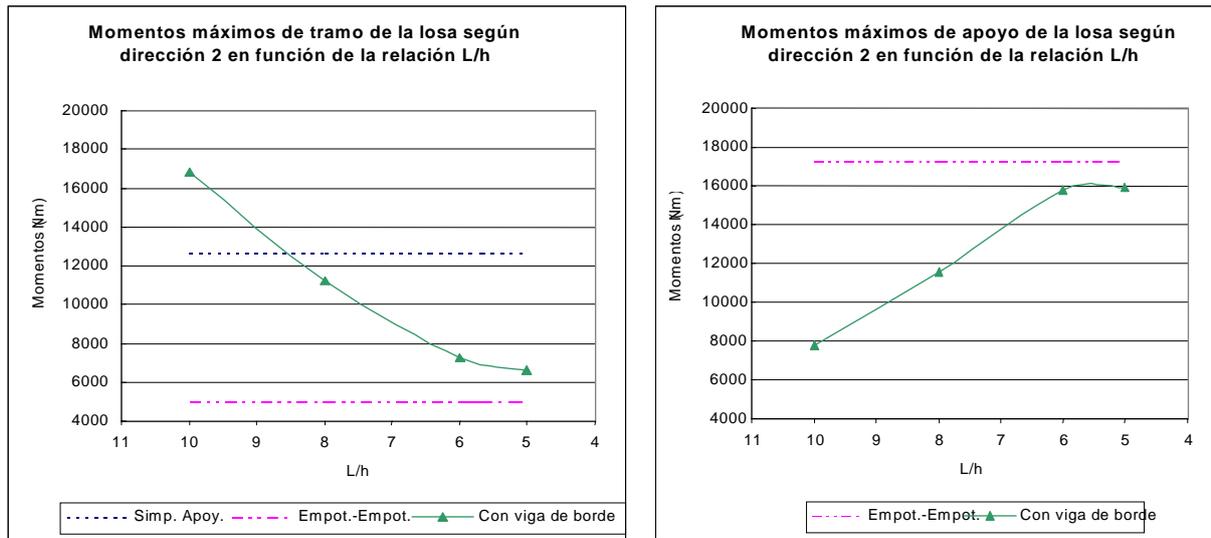


Figura 9: Distribución de momentos máximos positivos y negativos en función de la relación L/h

4 ANÁLISIS DE RESULTADOS

La mínima diferencia observada en los resultados de desplazamientos y momentos flectores en Tablas 1 y 2, permite indicar que el mallado adoptado en los modelos de elementos finitos es adecuado para continuar el análisis. Del análisis de los resultados en términos de momentos flectores puede inferirse que:

El sencillo análisis de los dos casos extremos, losas simplemente apoyadas y empotradas, permite observar que una redistribución de dichos esfuerzos sería beneficiosa para el posterior diseño de las armaduras.

En las representaciones de Figura 1 se visualiza el mallado utilizado para los casos de losas cuadradas estudiados. Asimismo, se observan las diferencias en las distribuciones de desplazamientos y tensiones máximas y mínimas principales en los dos casos de apoyos ideales analizados.

El mismo análisis indicado para losas cuadradas ($\beta=1$) puede realizarse para losas rectangulares ($\beta=1.5$) a partir de los resultados indicados en Tablas 3 y 4 y Figura 2.

Los resultados de Tabla 5 muestran la influencia de la flexibilidad del conjunto losa-viga. A medida que aumenta la rigidez flexional de la viga de apoyo, lo que se puede observar en el aumento de la altura de la viga, de la inercia o de la rigidez a flexión EI , se observa la disminución de los desplazamientos máximos en el centro del tramo. A efectos de cuantificar dicha influencia se considera la diferencia en el comportamiento analizado con elementos finitos respecto del analizado con condiciones ideales de apoyo. Dicha diferencia se observa en Figuras 4, 5 y 6 en términos de desplazamientos máximos de losa, momentos máximos positivos y momentos máximos negativos respectivamente. Puede indicarse que con los valores de la rigidez mínima considerada en el presente, como es la correspondiente a $L/10$, muy utilizada en la práctica profesional, no se llega a las distribuciones obtenidas con apoyos ideales. Por otro lado, para rigideces elevadas como es el caso de altura de viga $L/5$ tampoco se llega a las distribuciones de esfuerzos y desplazamientos que arrojan los modelos ideales. Las Figuras 4, 5 y 6 posibilitan la cuantificación de los porcentajes de redistribución de momentos en función de la rigidez flexional considerada.

Los resultados representados en Figuras 7, 8 y 9 para el caso de losas rectangulares ($\beta=1.5$), merecen el mismo análisis que el indicado previamente para losas cuadradas.

5 CONSIDERACIONES FINALES

De acuerdo a las comparaciones de los resultados obtenidos para los modelos con apoyos ideales (utilizando tablas) y modelos más reales (utilizando MEF) puede indicarse que:

- En los sistemas losa-viga como los analizados la flexibilidad del conjunto depende de la flexibilidad de las vigas de contorno. Dicha flexibilidad tiene fundamental importancia en la obtención de deformaciones y esfuerzos para la verificación de las condiciones de servicio y estados últimos respectivamente.
- En concordancia con el concepto anterior el CIRSOC 201/02, contempla en el predimensionado del espesor mínimo de losas, el control de deformaciones bajo cargas de servicio, a través de la consideración de la flexibilidad del conjunto.
- La influencia de tal flexibilidad afecta las distribuciones de momentos obtenidas mediante tablas provocando una atenuación en los valores máximos de los esfuerzos, que redundará en un diseño más adecuado evitando congestiones de armadura en las zonas de máximos momentos.
- El análisis con modelos más reales permite ratificar que no existe una única solución

para resolver cada problema, pero sí que existen soluciones más adecuadas. La optimización de las soluciones, en el caso de los sistemas analizados, depende directamente de las distribuciones de esfuerzos consideradas para el diseño posterior que se corresponden con los modelos de análisis adoptados.

- Para casos como los analizados, el diseñador puede usar las gráficas de Figuras 4, 5, 6, 7, 8 y 9 para cuantificar los porcentajes de redistribuciones resultantes a partir de la consideración de diferentes rigideces flexionales, EI o L/h según el caso.
- Por otro lado, el hecho de que el diseño de un mismo elemento de hormigón armado pueda resultar de diferentes distribuciones de esfuerzos puede explicarse con la siguiente reflexión de Arthur Nilson⁷:

"Puede ser reconfortante saber que el hormigón armado tiene una capacidad importante de adaptarse a las suposiciones del diseñador, es decir puede ser reconfortante saber que una estructura de concreto reforzado tratará de comportarse tal como el ingeniero ha supuesto que ella se va a comportar. Pueden hacerse así de manera segura suposiciones razonables en el análisis. Pero el corolario de este importante principio es la aceptación de sus límites: Deben reconocerse los patrones generales de fuerzas y momento y debe proporcionarse al menos una trayectoria de carga razonable. Una desviación mayor puede resultar en problemas de funcionalidad asociados con agrietamiento y deflexiones".

6 REFERENCIAS

- [1] CIRSOC 201, Proyecto de Reglamento Argentino de Estructuras de Hormigón – INTI-CIRSOC (2002)
- [2] R. Barés, *Tablas para el Cálculo de Placas y Vigas Pared*. Segunda Edición, Editorial Gustavo Gili. Barcelona, España. (1981)
- [3] G. Carbonari; M. De Souza; *Investigação da distribuição das reações de lajes retangulares isoladas sobre as vigas de apoio considerando a flexibilidade das mesmas*. XXV Jornadas Sul-Americanas de Engenharia Estrutural. Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Vol. II pp.49-60. (1991)
- [4] M. R. S. Correa; M.A. Ramalho; *Cálculo de Pavimentos de edificios utilizando-se o Método dos Elementos Finitos*. XXVI Jornadas Sudamericanas de Ingeniería Estructural, Montevideo, Uruguay, pp. 109-120. (1993)
- [5] I. Molinas Vega; J.P. Jourdan Dumot; *Distribución de Esfuerzos en Losas aisladas de hormigón armado sobre apoyos elásticos*. XXVIII Jornadas Sul-Americanas de Engenharia Estrutural, Sao Carlos, SP, Brasil. pp. 745-753 (1997)
- [6] ALGOR SOFTWARE PACKAGE y sus correspondientes manuales.
- [7] A. Nilson, "Diseño de Estructuras de Concreto" Mc Graw Hill, (2000)