

ALGORITMOS PARA TRANSFERIR DATOS ENTRE GRILLAS AERODINAMICAS Y MALLAS ESTRUCTURALES: UNA REVISIÓN DE LAS DIFERENTES ALTERNATIVAS PARA LA AEROELASTICIDAD COMPUTACIONAL

Mauro S. Maza^{a,b,c}, Sergio Preidikman^{a,b,c} y Fernando G. Flores^{a,b}

^a CONICET - Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas, Av. Rivadavia 1917, Bs. As., Argentina. mauro-maza@hotmail.com <http://www.conicet.gov.ar>

^b Departamento de Estructuras, FCEfyN, Universidad Nacional de Córdoba, Casilla de Correo 916, Córdoba, Argentina. fflores@efn.uncor.edu, <http://www.efn.uncor.edu>

^c Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Río Cuarto, Ruta Nacional 36 Km 601, 5800 Río Cuarto, Argentina. spreidikman@ing.unrc.edu.ar, <http://www.ing.unrc.edu.ar>

Palabras Clave: Aeroelasticidad computacional, Dinámica de fluidos computacional, Dinámica de estructuras computacional.

Resumen. El principal objetivo de este artículo es presentar los resultados de una extensa revisión bibliográfica cuyo objetivo fue identificar y evaluar los métodos más comúnmente utilizados para transferir información entre grillas/mallas correspondientes a la dinámica de fluidos computacional (CFD) y mallas correspondientes a la dinámica de estructuras computacional (CSD). Esta transferencia de datos entre grillas es de capital importancia en el campo de la aeroelasticidad computacional, donde los métodos de interpolación entre las grillas/mallas pueden fácilmente transformarse en el factor que controla la precisión de la simulación aeroelástica.

En general las grillas provenientes de la CFD y las mallas provenientes de la CSD tienen topologías muy diferentes; la topología de las grillas provenientes de la CFD depende de consideraciones puramente aerodinámicas y es independiente de la discretización de la estructura (en general una malla de elementos finitos) que obedece únicamente a consideraciones de la dinámica estructural.

En el campo de la aeroelasticidad computacional, el problema de transferir datos entre una grilla aerodinámica y una malla estructural usualmente involucra: 1) la transferencia de desplazamientos, velocidades, y aceleraciones desde los nudos de la malla de CSD hacia los puntos nodales de la grilla de CFD; y 2) la transferencia de fuerzas/presiones desde los llamados puntos de control de la grilla de CFD hacia los nudos de la malla de CSD.

La revisión bibliográfica presentada en este esfuerzo describe las ventajas y desventajas de los algoritmos más comúnmente utilizados, y tiene como objetivo final identificar los mejores candidatos para ser implementados en un código computacional de alta fidelidad que permita realizar simulaciones del comportamiento aeroservoelástico de generadores eólicos de gran potencia y de eje horizontal.

1 INTRODUCCIÓN

Una tarea de gran importancia dentro del campo de la aeroelasticidad computacional (CAE) es la simulación numérica de problemas de interacción fluido-estructura (FSI). La principal dificultad radica en que las acciones aerodinámicas sobre un cuerpo flexible inmerso en un fluido, con movimiento relativo entre ellos, dependen de la forma, velocidad, y aceleración del cuerpo, mientras que estas tres dependen de las cargas aerodinámicas que el fluido ejerce sobre el cuerpo flexible.

El problema aeroelástico puede ser tratado computacionalmente de dos maneras:

- Resolviendo en forma conjunta y acoplada las ecuaciones que gobiernan a el comportamiento del fluido y la estructura (esquema monolítico); o
- Resolviendo en forma separada (con códigos separados para cada problema) las ecuaciones en ambos medios, utilizando un método de interacción entre ellos (esquema particionado).

Si se opta por el esquema monolítico, es necesario obtener el sistema de ecuaciones diferenciales acopladas que describen el fenómeno completo, incluyendo el comportamiento estructural del objeto sumergido en la corriente fluida, el flujo alrededor de dicho objeto y la interacción de ambas partes. Las ecuaciones deben ser resueltas simultáneamente.

La segunda aproximación permite la utilización de dos códigos diferentes, especializados para resolver cada parte, y requiere el diseño y programación de un esquema de interacción que, si bien no resulta una tarea trivial, es más asequible que el desarrollo y codificación de un método que permita atacar el problema completo, como un solo sistema.

Muchos autores creen que el enfoque apropiado para resolver el problema de FSI es el de plantear un esquema particionado. Debido a las desventajas de utilizar un esquema monolítico, entre ellas:

- las matrices involucradas estarán mal condicionadas debido a las grandes diferencias de rigidez entre la estructura y el fluido; y
- las componentes del sistema completo (estructura, fluido e interfase) tienen propiedades matemáticas y numéricas diferentes, lo que conlleva exigencias variadas en la implementación computacional,

y a las importantes ventajas de utilizar un esquema de interacción de códigos:

- es posible utilizar códigos ya existentes, basados en métodos altamente especializados y probados;
- se puede utilizar, para cada disciplina, la estrategia de solución que mejor se adapte;
- disminuyen los esfuerzos de desarrollo de códigos computacionales; y
- se dispone de una estructura modular, de manera tal que los componentes individuales pueden ser reemplazados sin modificar la estructura general.

Así mismo, la utilización del esquema particionado presenta ciertas dificultades. La más importante está relacionada con la transferencia de información entre los códigos. Con el esquema de interacción, los códigos de CFD y de CSD se convierten en subrutinas llamadas alternativamente por un programa principal que se encarga además de pasar la información correspondiente entre ellos.

Como se ha mencionado, desarrollar un esquema particionado para la interacción de códigos dista mucho de ser una tarea trivial. En general, la respuesta de la estructura a las cargas aerodinámicas se calcula utilizando el método de elementos finitos (FEM), mientras que para las cargas aerodinámicas sobre la estructura se utilizan técnicas de la CFD.

En todos los casos el dominio del problema es discretizado, apareciendo dos mallas o grillas. Sobre la estructura aparece una malla de elementos finitos, que denominaremos *malla estructural* (ME). El dominio fluido se discretiza completamente, se denominará *malla aerodinámica* (MA) a la parte que se encuentra sobre el contorno del cuerpo definido en el modelo aerodinámico, mientras que llamaremos *grilla aerodinámica* (GA) al conjunto completo. Aparecen dos problemas que pueden tratarse separadamente: a) el de interacción fluido-estructura, que depende de lo que sucede en la interfase; y b) el de la deformación de la malla aerodinámica para acompañar las deformaciones estructurales.

La interacción de los códigos se realiza transfiriendo información entre las mallas. Por un lado es necesario transferir variables cinemáticas, fuerzas y/o presiones calculadas con el FEM desde la ME a la MA, además de deformar la GA en función de los desplazamientos. Por el otro, deben llevarse las cargas calculadas con el código de CFD desde la MA a la ME. Además, el paso de información debe ser tal que se conserven las cargas totales y la energía total.

En general las grillas provenientes de la CFD y las mallas provenientes del FEM tienen topologías muy diferentes; la MA debe ajustarse lo más fielmente posible a la forma externa de la estructura, ya que las cargas aerodinámicas dependen de ella. Esta discretización es independiente de la ME, que obedece únicamente a consideraciones de la dinámica estructural.

Así, la topología de la MA queda claramente definida para un problema dado, mientras que las posibilidades con respecto al modelo estructural son muy variadas. Por ejemplo, una misma ala puede ser representada, en diferentes análisis, por una viga, por el llamado cajón de torsión, o por un modelo completo que incluya el recubrimiento, los largueros y las cuernas, entre otras tantas opciones.

En la Figura 1 se observan la malla aerodinámica y la malla estructural que representan a la misma ala, aunque una se utiliza en el código de CFD y la otra en el de CSD. En este caso particular la MA resulta de la discretización de la superficie externa de un ala con perfil asimétrico, mientras que la ME representa el modelo del cajón de torsión, discretizado en elementos finitos.

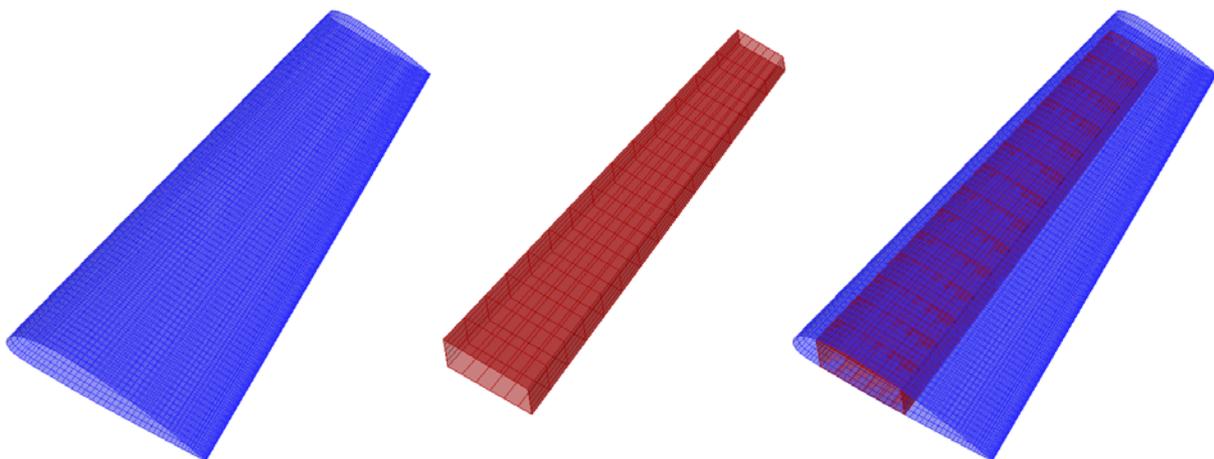


Figura 1: Diferencias entre la malla estructural y la malla aerodinámica.

En la sección siguiente se hace una revisión de los métodos de interacción basados en técnicas de interpolación. La mayoría de ellos han sido desarrollados a partir de un enfoque matemático del problema, por lo que muchos son utilizados en otras áreas de las ciencias. Luego se presentan los métodos de proyección, los cuales están basados en aproximaciones físicas del problema y tienen en cuenta las discretizaciones realizadas en los dominios de cada parte del problema (la parte estructural y la aerodinámica).

2 MÉTODOS DE INTERPOLACIÓN

Existe un amplio grupo de métodos que permiten realizar interpolación de una función escalar g , dados los valores conocidos g_i en un conjunto de N puntos \mathbf{x}_i llamados *centros* (tales que $g_i = g(\mathbf{x}_i)$), para calcular los valores g_j que tomaría dicha función en un conjunto de M puntos \mathbf{y}_i , llamados *puntos objetivo*. La idea no es encontrar una expresión matemática para g , sino solo poder calcular sus valores en los puntos objetivo de una manera eficiente.

Una *manera eficiente* de hacer esto es poder calcular, a partir de los puntos \mathbf{x}_i e \mathbf{y}_i , y de los valores g_i , una matriz de interpolación \mathbf{H} tal que:

$$\mathbf{g}_y = \mathbf{H} \mathbf{g}_x \quad (1)$$

donde:

\mathbf{g}_y es un vector con los valores de g en los puntos objetivo (g_j); y

\mathbf{g}_x es un vector con los valores de g en los centros (g_i).

En esta sección se presenta un conjunto de métodos que permiten calcular la matriz \mathbf{H} para realizar interpolaciones. Estos son aplicables a nubes de puntos totalmente arbitrarias, por lo que la implementación no es dependiente de los métodos de discretización utilizados por las técnicas de CSD ni de CFD seleccionadas.

Se ha dicho que los métodos de interacción deben conservar, entre otras cosas, la energía total del sistema. Esto implica que en todo momento, la energía adquirida (o entregada) por la estructura (excepto en el caso que exista amortiguamiento estructural) debe ser igual a la energía entregada (o adquirida) por el fluido. Una manera de forzar a que esto suceda es exigir que el trabajo virtual realizado por la estructura sea igual al realizado por el fluido, esto es:

$$\delta W_E = \delta W_A \quad (2)$$

Si \mathbf{f}_E es un vector con cargas puntuales, aplicadas sobre los nodos de la ME, $\delta \mathbf{u}_E$ es un vector de desplazamientos virtuales nodales de la ME, el trabajo virtual realizado por la estructura es:

$$\delta W_E = \mathbf{f}_E^T \delta \mathbf{u}_E \quad (3)$$

y de la misma manera puede escribirse el trabajo virtual realizado por el fluido. Por lo tanto, utilizando las Ecs. (2) y (3), se tiene:

$$\mathbf{f}_E^T \delta \mathbf{u}_E = \mathbf{f}_A^T \delta \mathbf{u}_A \quad (4)$$

En caso de utilizar un método de interpolación para los desplazamientos, tal que:

$$\Delta \mathbf{u}_A = \mathbf{H} \Delta \mathbf{u}_E \quad (5)$$

los desplazamientos virtuales deben ser compatibles, por lo que pueden interpolarse de la misma manera:

$$\delta \mathbf{u}_A = \mathbf{H} \delta \mathbf{u}_E \quad (6)$$

Reemplazando la Ec. (6) en la Ec. (4) se tiene:

$$\mathbf{f}_E^T \delta \mathbf{u}_E = \mathbf{f}_A^T \mathbf{H} \delta \mathbf{u}_E \quad (7)$$

Luego, simplificando los $\delta \mathbf{u}_E$ (debido a su arbitrariedad) y transponiendo ambos miembros

se llega a:

$$\mathbf{f}_E = \mathbf{H}^T \mathbf{f}_A \quad (8)$$

La Ec. (8) indica que, una vez calculada la matriz de transferencia \mathbf{H} para interpolar los desplazamientos de la MA a partir de los de la ME, debe utilizarse su transpuesta para interpolar las fuerzas de la MA en la ME si se desea conservar la energía en el proceso de interacción.

2.1 Interpolación con funciones base radiales

Los métodos de interpolación que utilizan funciones base radiales (o RBFs, por su nombre en inglés: Radial Basis Functions) han resultado muy exitosos en las últimas décadas para la interpolación de funciones con valores conocidos en puntos discretos y ubicados de forma no estructurada. Inclusive han aparecido de manera importante en métodos de solución numérica de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales (Kansa, 1990a,b).

Una función radial $\varphi(r)$ es una función continua, de una variable escalar, con un comportamiento radial respecto a un punto denominado *centro*, siendo r la distancia desde el centro hasta el punto donde se evalúa la función φ .

En general se utiliza la distancia euclídea, aunque algunos autores han sugerido definir otras normas con propiedades que las hacen más adecuadas para la aplicación en ciertos problemas de interacción fluido estructura. Allen y Rendall (2007) proponen utilizar una norma definida por:

$$r = \sqrt{k_x x^2 + k_y y^2 + k_z z^2} \quad (9)$$

en la que k_x , k_y y k_z son coeficientes arbitrarios con los que puede darse mayor peso a los valores que toma la función que estamos interpolando en alguna de las direcciones.

Supóngase que se está estudiando el comportamiento aeroelástico de un ala en tres dimensiones, cuya sección transversal se encuentra en el plano xy . Utilizar funciones base decrecientes con valores de k_x y k_y más pequeños que el de k_z resulta en una influencia mayor en la interpolación de los puntos en el plano de la sección que los puntos fuera de ella. Esto es deseable si se tiene en cuenta que deformaciones en las direcciones de la cuerda y del espesor del ala son más importantes aerodinámicamente que desplazamientos en el sentido de la envergadura.

La teoría general de RBF la presentan Buhmann (2005) y Wendland (2005). Si se desea interpolar una función $s(\mathbf{x})$ a partir de valores conocidos de s en puntos \mathbf{x}_i , con $i=1, \dots, N$, se comienza planteando la función interpolante como:

$$s(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N \alpha_i \varphi(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|) + p(\mathbf{x}) \quad (10)$$

donde:

- N es el número de centros;
- \mathbf{x} es la posición de los puntos en el espacio tridimensional;
- \mathbf{x}_i son las posiciones de los centros;
- α_i son coeficientes cuyos valores deben ser determinados; y
- $p(\mathbf{x})$ es un polinomio en tres dimensiones (cuya utilización es opcional).

Beckert y Wendland (2001) utilizaron polinomios lineales para $p(\mathbf{x})$, de manera de recuperar exactamente traslaciones y rotaciones de cuerpo rígido.

Los valores de los coeficientes α_i se calculan imponiendo que la función interpolante devuelva los valores conocidos $s(\mathbf{x}_i) = s_i$ y que se cumpla que:

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i q(\mathbf{x}) = 0 \quad (11)$$

para todo polinomio $q(\mathbf{x})$ de grado menor o igual que $p(\mathbf{x})$. Esta última condición se aplica cuando la función interpolante posee la parte polinómica, y asegura que no sólo se recuperen las traslaciones y rotaciones de cuerpo rígido, sino también que se conserven la fuerza y el momento total.

La obtención de la matriz de transferencia \mathbf{H} comienza con el cálculo de la matriz \mathbf{C} , cuyos elementos, suponiendo que se utilice un polinomio $p(\mathbf{x})$ lineal de la forma:

$$p(\mathbf{x}) = \gamma_0 + \gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3 z \quad (\text{con } \mathbf{x} = (x, y, z)) \quad (12)$$

son:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_1^e & x_2^e & \cdots & x_N^e \\ 0 & 0 & 0 & 0 & y_1^e & y_2^e & \cdots & y_N^e \\ 0 & 0 & 0 & 0 & z_1^e & z_2^e & \cdots & z_N^e \\ 1 & x_1^e & y_1^e & z_1^e & \varphi_{11}^{ee} & \varphi_{12}^{ee} & \cdots & \varphi_{1N}^{ee} \\ 1 & x_2^e & y_2^e & z_2^e & \varphi_{21}^{ee} & \varphi_{22}^{ee} & \cdots & \varphi_{2N}^{ee} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_N^e & y_N^e & z_N^e & \varphi_{N1}^{ee} & \varphi_{N2}^{ee} & \cdots & \varphi_{NN}^{ee} \end{bmatrix} \quad (13)$$

donde x_i^e, y_i^e y z_i^e son las componentes de los vectores posición de los centros \mathbf{x}_i^e , que en este caso corresponden a los nodos de la malla estructural, y φ_{ij}^{ee} significa:

$$\varphi_{ij}^{ee} = \varphi(\|\mathbf{x}_i^e - \mathbf{x}_j^e\|) \quad (14)$$

La matriz \mathbf{C} nos permite calcular los valores de los coeficientes α_i (en la Ec. (10)) y γ_j (en la Ec. (11)) de tal manera que la función interpolante devuelva los valores conocidos de $s(\mathbf{x})$ en los centros. Las cuatro primeras filas de \mathbf{C} están relacionadas con la condición en Ec. (11).

Lo siguiente es calcular la matriz \mathbf{A} como:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & x_1^a & y_1^a & z_1^a & \varphi_{11}^{ae} & \varphi_{12}^{ae} & \cdots & \varphi_{1N}^{ae} \\ 1 & x_2^a & y_2^a & z_2^a & \varphi_{21}^{ae} & \varphi_{22}^{ae} & \cdots & \varphi_{2N}^{ae} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & x_M^a & y_M^a & z_M^a & \varphi_{M1}^{ae} & \varphi_{M2}^{ae} & \cdots & \varphi_{MN}^{ae} \end{bmatrix} \quad (15)$$

siendo x_i^a, y_i^a y z_i^a las componentes de los \mathbf{x}_i^a , (los vectores posición de los centros), que corresponden a la malla aerodinámica, y φ_{ij}^{ae} significa:

$$\varphi_{ij}^{ae} = \varphi(\|\mathbf{x}_i^a - \mathbf{x}_j^a\|) \quad (16)$$

Finalmente, \mathbf{H} se calcula como:

$$\mathbf{H} = \mathbf{A}\mathbf{C}^{-1} \quad (17)$$

Existe una gran variedad de funciones base que pueden utilizarse. En el método denominado Thin-Plate Spline (TPS, también llamado Surface Spline), introducido por Duchon (1977), la función base es:

$$\varphi(r) = r^2 \ln(r) \quad (18)$$

Este método se utiliza para caracterizar superficies irregulares minimizando un funcional de energía. Aplicado a problemas unidimensionales el método permite encontrar curvas que representan las posiciones de equilibrio de una barra en flexión. En casos bidimensionales, las superficies se interpretan como posiciones de equilibrio de una placa en flexión.

Un caso particular del TPS aplicado a problemas bidimensionales es el método de Infinite-Plate Spline (IPS) de Harder y Desmarais (1972), cuya función base es:

$$\varphi(r) = r^2 \ln(r^2) \quad (19)$$

Si bien las fórmulas para realizar la interpolación tienen la forma detallada en este trabajo, en los desarrollos de Harder y Desmarais (1972) se obtienen como la superposición de las soluciones de la ecuación diferencial de equilibrio de una placa infinita.

Un método muy conocido es el Biharmonic-Multiquadric (MQ), desarrollado por Hardy (1971) para realizar interpolación en estudios topográficos. La función base utilizada inicialmente era (Smith et al., 1995):

$$\varphi(r) = r = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|_2 \quad (20)$$

que resulta ser la distancia euclídea en sí misma. Esta función es la que utiliza el método de Volume Spline, introducido en el área de aeroelasticidad computacional por Hounjet y Meijer (1994). Como esta función no es diferenciable en el centro \mathbf{x}_i se añadió el parámetro de forma k , obteniéndose:

$$\varphi(r) = (r^2 + k^2)^{1/2} \quad (21)$$

Esta nueva función es infinitamente diferenciable y su forma está gobernada por el parámetro k : un valor grande para k resulta en funciones *planas*, que varían poco con r , mientras que pequeños valores de k proporcionan funciones en forma de cono.

Estudios posteriores realizados por Kansa (1990a,b) sugieren que:

- Se puede mejorar el condicionamiento de la matriz de transferencia \mathbf{H} permitiendo que el parámetro de forma k varíe cuando se calculan los elementos de las matrices \mathbf{C} y \mathbf{A} (en particular, se encontró que el mejor de los casos ocurría cuando se permitía que k variara exponencialmente);
- La descomposición del dominio completo en subdominios permite reducir el tiempo de cálculo y mejorar el condicionamiento de \mathbf{H} ; y
- Los resultados mejoran al mapear la información a subdominios unitarios.

Los métodos mencionados precedentemente tienen la desventaja de utilizar funciones base crecientes (que aumentan su valor junto con la distancia al centro r). Esto hace que los valores

de $s(\mathbf{x})$ en puntos lejanos al centro \mathbf{x}_i utilizado tengan más influencia que los valores en puntos cercanos, lo que tiende a suavizar variaciones locales de la función que se está interpolando. Así se obtiene, además, una matriz \mathbf{C} llena, que hace más caro computacionalmente el método.

Una mejora importante es utilizar funciones base decrecientes (es decir, que disminuyen su valor a medida que r crece). De esta manera, tanto las deformaciones como las fuerzas interpoladas en un punto dependen de los valores de esas variables en las cercanías del punto en cuestión, lo que se corresponde mucho mejor con la física del problema. Ejemplos son la función base del método denominado Inverse Multiquadrics:

$$\varphi(r) = (r^2 + k^2)^{-1/2} \quad (22)$$

o la función de Gauss:

$$\varphi(r) = e^{-\alpha r} \quad (23)$$

La utilización de funciones de soporte compacto permite reducir aún más la influencia de cargas y desplazamientos en puntos lejanos, localizando mejor la interpolación y reduciendo el número de elementos no nulos en las matrices de interpolación. Dentro de este grupo podemos citar la función Euclid's Hat presentada por [Wendland \(1994\)](#):

$$\varphi(r) = \pi \left(\frac{r^3}{12} - k^2 r + \frac{4}{3} k^3 \right) \quad (24)$$

y el conjunto de funciones de soporte compacto introducidas más recientemente por [Wendland \(1996, 1995\)](#). Para el caso bi- o tridimensional, requiriendo continuidad C^0 y C^2 las funciones de Wendland toman la forma:

$$\begin{aligned} \varphi(r) &= (1-r)^2 & C^0 \\ \varphi(r) &= (1-r)^4 (4r+1) & C^2 \end{aligned} \quad (25)$$

Wendland demostró que estas funciones, dado el número de dimensiones en el que se realizará la interpolación y especificada la continuidad deseada para las funciones base, poseen el menor grado posible entre las funciones radiales de soporte compacto definidas positivas. El que las funciones sean definidas positivas, aseguran la unicidad de la solución del problema de interpolación definido en la ecuación (10). Más detalles sobre funciones definidas positivas puede encontrarse en trabajos de [Beckert y Wendland \(2001\)](#).

El tamaño del soporte de estas funciones puede definirse en términos de un parámetro ρ , utilizado por [Beckert y Wendland \(2001\)](#), de manera que las funciones base de Wendland y la Euclid's Hat se convierten en:

$$\begin{aligned} \varphi_\rho(r) &= \left(1 - \frac{r}{\rho}\right)^2 & C^0 \\ \varphi_\rho(r) &= \left(1 - \frac{r}{\rho}\right)^4 \left(4 \frac{r}{\rho} + 1\right) & C^2 \\ \varphi_\rho^{EH}(r) &= \pi \left(\frac{r^3}{12} - 4\rho^2 r + \frac{32}{3} \rho^3 \right) \end{aligned} \quad (26)$$

Esto, en conjunto con la densidad de la malla cuyos nodos sean los centros que se estén utilizando, permite fijar la cantidad de puntos que se utilizarán para realizar la interpolación en una zona dada de la interfase fluido-estructura. La determinación de este radio ρ no es una cuestión menor y conlleva la adopción de una solución de compromiso que permita utilizar suficientes puntos y a su vez eliminar la influencia de puntos *mu*y alejados. Al respecto [Beckert y Wendland \(2001\)](#) mencionan las siguientes consideraciones a tener en cuenta:

- Un valor grande para ρ (comparado con la densidad de los centros) da como resultado una buena aproximación, mientras que un valor más pequeño mejora la estabilidad del sistema (en términos de su solubilidad);
- Un valor apropiado debe ser tal que se incluyan en el soporte de la función, como mínimo, todos los puntos más cercanos a cada centro utilizado; y
- Si bien algunas aplicaciones numéricas permiten observar buenos resultados cuando se utilizan distintos valores de ρ (adaptando este parámetro a la densidad local de puntos), la teoría solo asegura solubilidad si se utiliza un valor fijo de ρ .

Con respecto al último punto, [Beckert y Wendland \(2001\)](#) utilizan en sus aplicaciones el mayor valor de ρ entre los estimados correspondientes a cada centro.

Recientemente ([Nam y Thanh, 2001a,b, 2003](#)) se ha propuesto utilizar, para la solución de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, funciones base integradas una o dos veces, argumentando que el suavizado que produce la integración de funciones permite llegar a mejores resultados al realizar la interpolación. Esto puede relacionarse con el hecho de que la diferenciación de funciones base del método Biharmonic-Multiquadrics trae aparejado una caída en la velocidad de convergencia ([Madych, 1992; Madych y Nelson, 1988](#)).

Al respecto se han realizado estudios de los efectos que tiene la variación del parámetro de forma k cuando se utilizan como funciones base las obtenidas a partir de integrar repetidas veces la función (21) ([Sarra, 2006](#)). Los resultados indican que el comportamiento de las funciones base depende de si se ha integrado un número par o impar de veces. En líneas generales, las funciones base integradas presentan menor sensibilidad al parámetro de forma k que las originales no integradas.

Cuando la herramienta computacional empleada para resolver el problema aerodinámico utiliza técnicas de CFD, el dominio fluido debe mallarse completamente y el movimiento de los nodos sobre la superficie de la estructura debe ser acompañado por una deformación de la malla completa. Generalmente, esto se ve como un problema diferente de aquel relativo a la interacción fluido estructura en la interfase de los modelos aerodinámico y estructural.

Sin embargo, a través de los métodos de interpolación con RBF es posible atacar ambos problemas de forma conjunta ([Allen y Rendall, 2007](#)). Esto tiene como desventaja que el costo computacional es algo elevado. Sin embargo la malla deformada obtenida es de buena calidad y el método es de fácil aplicación, ya que durante la simulación solo se requieren multiplicaciones de matrices. El costo computacional puede reducirse eliminando todos los elementos de la matriz de interpolación que sean menores que un límite determinado, esto sin disminuir la calidad de la malla deformada.

Finalmente, cabe destacar que se han propuesto ([Wendland, 2005; Ahrem et al., 2006; Rendall y Allen, 2009](#)) implementaciones basadas en la técnica conocida como Partition Of Unity ([Wendland, 2002, 2005; Ahrem et al., 2006; Babuska y Melenk, 1997](#)) que permite localizar la interpolación reduciendo el costo computacional y la influencia de la elección de las funciones base y del radio del soporte ρ (esto último para el caso de funciones base con soporte compacto).

2.2 Método de elementos de contorno

Chen y Jadic (1998) proponen asimilar el problema de interacción fluido-estructura a uno de mecánica de sólidos y resolverlo con un método de elementos de contorno (BEM, por Boundary Element Method). Así se obtiene una matriz de interpolación que permite llevar a cabo la interacción de códigos de CFD y CSD. La única limitación del método es que la malla estructural se encuentre *contenida* dentro de la malla aerodinámica durante todo el proceso de cálculo.

Esto último implica que todos los nodos de la ME deben encontrarse dentro del espacio que delimita la MA (un ejemplo de esta situación se observa en la Figura 1). Esta condición no se cumpliría en caso que se utilice para el modelo aerodinámico de un ala la superficie definida por la línea media de los perfiles que la componen, mientras que para el modelo estructural se utilice el cajón de torsión. En esa situación la MA no delimita un espacio cerrado y es imposible que contenga a la ME.

Los métodos de elementos de contorno permiten resolver ecuaciones diferenciales lineales en derivadas parciales a partir de una formulación con integrales en el contorno. En el caso de problemas de elasticidad estática, la solución del problema permite calcular el desplazamiento de cualquier punto interno de un cuerpo a partir de los desplazamientos de los puntos del contorno y de las cargas aplicadas en ellos. De esta forma se obtiene una matriz de transferencia que permite relacionar los desplazamientos, mientras que su transpuesta permite relacionar las cargas, como se ve al comienzo de esta sección.

Para aplicar el BEM al problema de interpolación, la idea es asimilar la malla del modelo de CFD al contorno de un sólido elástico, lineal y homogéneo, y la malla de CSD a un conjunto de puntos dentro de ese sólido, cuyos desplazamientos interesan. Para el cálculo de la matriz de transferencia \mathbf{H} se impone además un requerimiento de mínima energía de deformación, lo que evita la aparición de deformaciones no deseadas.

Una ventaja de este método es que las deformaciones en todos los sentidos están acopladas utilizando un criterio físico. Esto, en los métodos con RBF, no sucede pues cada componente de desplazamiento se obtiene a partir de los valores de esa misma componente en nodos cercanos, pero no se ve influenciada por desplazamientos de los mismos nodos en otras direcciones. La desventaja del acoplamiento es que la matriz \mathbf{H} es llena y no necesariamente simétrica, lo que aumenta el costo computacional. Sin embargo, el hecho de que se utilice la misma matriz a lo largo de todo el proceso de cálculo ayuda de forma significativa a disminuir el tiempo de cálculo.

Por último, podemos destacar que los autores proponen atacar de esta misma manera el problema de la deformación de la malla completa de CFD, asimilando el dominio fuera del contorno del cuerpo a un medio elástico, homogéneo e infinito. Dos condiciones básicas que deben ser satisfechas por el método de deformación de la GA son:

- La magnitud de los desplazamientos debe disminuir a medida que los nodos se encuentran más alejados del contorno del cuerpo; y
- La grilla no debe intersectarse.

El método propuesto cumple con estas dos condiciones. La primera se satisface inherentemente debido a las características del modelo de sólido infinito adoptado. La segunda se cumple pues, estructuralmente, una intersección de la grilla equivaldría a una concentración de tensiones que no puede darse en el volumen que rodea al cuerpo, ya que las cargas puntuales sólo se aplican sobre la superficie del cuerpo.

2.3 Inverse Isoparametric Mapping

Este método, aplicable en caso en que la MA y la ME posean topologías *muy* similares, hace uso directo de la discretización utilizada por la CSD y del método conocido como Inverse Isoparametric Mapping (IIM) (Murti et ál., 1986, 1988). El IIM se utiliza para calcular las *coordenadas locales* de los nodos de la MA dentro de los elementos de la ME de manera eficiente. Debe tenerse presente que si las topologías de las mallas son muy similares, ambas mallas se encontrarán solapadas, por lo que resulta natural pensar a cada nodo de la MA como *perteneciente* a un elemento de la ME.

Utilizando las coordenadas locales de cada nodo de la MA, los valores nodales de desplazamientos en la ME y las funciones de forma del FEM, se puede obtener una matriz de transferencia \mathbf{H} para calcular desplazamientos de los nodos de la MA. Luego, la transpuesta de \mathbf{H} permitiría llevar las cargas, calculadas en los nodos de la MA, a los nodos de la ME.

Se enfatiza que las topologías de las mallas deben ser muy similares, puesto que para la transferencia de velocidades y aceleraciones deberán calcularse matrices de transferencia con un procedimiento similar al utilizado para calcular \mathbf{H} , pero con las funciones de forma (o sus derivadas) correspondientes. Si un nodo de la MA se encontrara muy alejado de la superficie del elemento al que *pertenece*, su velocidad sería diferente a la interpolada dentro de ese elemento.

Por las razones expuestas en el párrafo precedente, este método es de uso particular en la solución de problemas con geometrías simples, aunque se utiliza para el desarrollo e implementación de métodos más potentes y generales.

3 MÉTODOS DE PROYECCIÓN

En esta sección se describe un conjunto de métodos en los que se hace uso de las funciones de forma (o funciones base) utilizadas en la discretización del modelo aerodinámico y del estructural para interpolar variables (como desplazamientos, velocidades, fuerzas, etc.) dentro de los elementos de la malla correspondiente.

3.1 Interpolación Consistente

Cebral y Löhner (1997) dividen el problema en tres partes: transferencia de cargas (presiones), transferencia de desplazamientos (que denominan *rastreo de superficies*) y transferencia de velocidades (que relacionan con la de presiones para conservar la energía total).

Para la transferencia de presiones, los autores plantean una solución que pretende conservar exactamente la carga total a partir de obtener, sobre la superficie estructural, una distribución de presiones $p_E(\mathbf{x})$ igual a la distribución de presiones sobre la superficie aerodinámica $p_A(\mathbf{x})$, es decir, se intenta obtener:

$$p_E(\mathbf{x}) = p_A(\mathbf{x}) \quad (27)$$

siendo \mathbf{x} el vector posición en el espacio. Esta igualdad se aproxima mediante el método de residuos ponderados:

$$\int_{\Gamma} W^i(\mathbf{x}) p_E(\mathbf{x}) d\Gamma = \int_{\Gamma} W^i(\mathbf{x}) p_A(\mathbf{x}) d\Gamma \quad (28)$$

Como se observa en la Ec. (28), se asume que la MA y la ME provienen ambas de dos discretizaciones diferentes de la misma superficie. Utilizando para las presiones una aproximación con las funciones de forma de las discretizaciones respectivas a la ME y a la MA:

$$p_E(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{NE} \underline{p}_E^j N_E^j(\mathbf{x}) \quad ; \quad p_A(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{NA} \underline{p}_A^k N_A^k(\mathbf{x}) \quad (29)$$

donde:

- \underline{p}_E^j es el valor de la presión en el nodo j de la ME;
- \underline{p}_A^k es el valor de la presión en el nodo k de la MA;
- N_E^j es la función de forma correspondiente al nodo j de la ME;
- N_A^k es la función de forma correspondiente al nodo k de la MA;
- NE es el número total de nodos de la ME; y
- NA es el número total de nodos de la MA,

y el método de Galerkin como:

$$W^i(\mathbf{x}) = N_E^i(\mathbf{x}) \quad (30)$$

la Ec. (28) queda:

$$\sum_{j=1}^{NE} \left(\underline{p}_E^j \int_{\Gamma} N_E^i N_E^j d\Gamma \right) = \sum_{k=1}^{NA} \left(\underline{p}_A^k \int_{\Gamma} N_E^i N_A^k d\Gamma \right) \quad (31)$$

donde las integrales del miembro de la izquierda dan los elementos de la matriz de masa:

$$(\mathbf{M}_E)^{ij} = \int_{\Gamma} N_E^i N_E^j d\Gamma \quad (32)$$

Las presiones nodales sobre la ME pueden calcularse resolviendo:

$$\mathbf{M}_E \underline{\mathbf{p}}_E = \mathbf{M}_{AE} \underline{\mathbf{p}}_A \quad (33)$$

en donde $\underline{\mathbf{p}}_E$ y $\underline{\mathbf{p}}_A$ son los vectores con valores nodales de presión en la ME y la MA respectivamente, y:

$$(\mathbf{M}_{AE})^{ik} = \int_{\Gamma} N_E^i N_A^k d\Gamma \quad (34)$$

Puede demostrarse que este método asegura la conservación de la carga si las topologías de la ME y la MA son iguales. Una cuestión que debe determinarse es sobre cuál de las mallas se realizan las integrales de la Ec. (34). Cebral y Löhner sugieren aproximarlas utilizando cuadratura de Gauss con puntos de cuadratura sobre la MA. Para esto deben hallarse las coordenadas locales de los puntos de cuadratura (o de sus proyecciones) sobre la ME, lo que permite evaluar las funciones de forma de la ME en esos puntos.

Las integrales se realizan sobre la MA simplemente para asegurarse que cada elemento de ella aporte con el valor de su presión correspondiente. Además, se propone comprobar la

existencia de un punto de cuadratura por cada elemento de la ME. En caso contrario, se deberá subdividir el elemento de la MA correspondiente, de manera de ubicar más puntos de cuadratura en esa zona hasta lograrlo.

Finalmente, los autores proponen la utilización de un método que ellos denominan pFCT, que permite suavizar la distribución de presiones obtenidas a partir de la Ec. (33). Este método está basado en el esquema denominado Flux-Corrected Transport, utilizado en la solución numérica de problemas de dinámica de fluidos (Boris y Book, 1973).

Para transferir los desplazamientos de la ME a la MA se propone un esquema de distancia inicial. Para ello se asocia a cada nodo de la MA un punto que representa su proyección sobre la ME y se calcula, antes de comenzar la simulación, el vector posición relativa entre cada nodo y su proyección. Dicho vector se mantiene constante a lo largo de toda la simulación, lo que permite encontrar la posición de cada nodo de la MA en función de la forma de la ME.

La velocidad de los nodos de la MA no se calcula como la derivada de la posición respecto al tiempo, sino de manera que se conserve la energía. Para ello se realiza un desarrollo análogo al descrito para la transferencia de presiones, partiendo de:

$$E_E(\mathbf{x}) = E_A(\mathbf{x}) \quad (35)$$

y llegando a una ecuación análoga a la Ec. (33):

$$\mathbf{M}_E \underline{\mathbf{E}}_E = \mathbf{M}_{AE} \underline{\mathbf{E}}_A \quad (36)$$

donde $\underline{\mathbf{E}}_E$ y $\underline{\mathbf{E}}_A$ son los vectores con valores nodales de energía en la ME y la MA respectivamente. Luego se escriben los valores nodales de energía como función de los valores nodales de presión y velocidad:

$$\underline{\mathbf{E}}_E = \underline{\mathbf{p}}_E \odot \underline{\mathbf{v}}_E \quad ; \quad \underline{\mathbf{E}}_A = \underline{\mathbf{p}}_A \odot \underline{\mathbf{v}}_A \quad (37)$$

En la Ec. (37), el símbolo \odot representa el producto de Hadamard, y $\underline{\mathbf{v}}_E$ y $\underline{\mathbf{v}}_A$ son los vectores con velocidades nodales de la ME y la MA respectivamente. Como las presiones nodales son conocidas en ambas mallas, así como las velocidades de la ME, el vector $\underline{\mathbf{v}}_A$ puede calcularse. De esta manera, las velocidades en la MA dependen de las presiones transferidas desde a la ME, y no coincidirán, en general, con las velocidades calculadas como dicta la mecánica analítica.

3.2 Nuevo método conservativo

Farhat et al., (1998) atacan el problema de FSI de manera muy similar a lo expuesto previamente, introduciendo algunas mejoras. En primer lugar realizan un estudio de la conservación de carga total y energía para casos concretos utilizando una variación del *esquema de interpolación consistente*, obteniendo excelentes resultados.

Sin embargo, hacen notar que en el caso en que las topologías de las mallas aerodinámica y estructural sean diferentes, algunos efectos, como la resistencia aerodinámica inducida, no podrán ser captados. Para solucionar este problema proponen un método en el que las cargas actuantes sobre ambas mallas se calculen utilizando una misma discretización (es decir, la malla y funciones de forma), sea la de la CFD o la de la CSD.

Por ejemplo, si se utiliza la discretización de la CFD, las fuerzas nodales en la ME se calcularían cómo:

$$f_E^i = \sum_{j=1}^{NA} \Phi^j c^{ji} \quad (38)$$

donde f_E^i son los valores nodales de fuerza en la ME, y NA el número total de nodos de la MA. Suponiendo que para la CSD se utilice un FEM, los factores de cada término en la sumatoria se calculan como:

$$\Phi^j = \int_{\Gamma_A} (-p\mathbf{n} + \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n}) D^j d\Gamma_A \quad (39)$$

$$c^{ji} = N_E^i(\boldsymbol{\chi}^j) \quad (40)$$

donde:

- p campo de presiones del fluido;
- \mathbf{n} versor normal unitario a la superficie;
- $\boldsymbol{\sigma}$ tensor de tensiones viscosas del fluido;
- D^j función que relaciona los desplazamientos nodales de la MA entre sí;
- Γ_A superficie del modelo aerodinámico;
- N_E^i función de forma de la discretización del FEM correspondiente al nudo i ; y
- $\boldsymbol{\chi}^j$ vector posición de la proyección del nodo aerodinámico j sobre la ME.

Los autores concluyen la presentación del método con una comparación entre resultados obtenidos con él y el método presentado por Cebral y Löhner. Para flujos simples no existen diferencias, mientras que para casos con ondas de choque fuertes si las hay, aunque la diferencia máxima no alcanza al 4 %.

Con respecto a la transferencia de desplazamientos, los autores indican que un *esquema de interpolación consistente* produce un aumento del error local respecto de aquel debido a la discretización de las ecuaciones que gobiernan el flujo y la respuesta estructural. Para resolver el problema se plantea la utilización del Mortar Element Method (MEM) (Bernardi et al., 1994). De esta manera se obtiene un error debido al acoplamiento que no es mayor que el proveniente de las discretizaciones.

Sin embargo, se indica que no puede asegurarse que sea ventajoso utilizar el MEM debido a lo siguiente:

- Si las diferencias en la topología de las mallas son importantes, es cuestionable la validez del análisis realizado por los autores respecto a la implementación del MEM;
- Si la MA es mucho más fina que la ME (lo que es frecuente), el MEM y el *esquema de interpolación consistente* producen aproximadamente los mismos errores; y
- En general, la cantidad de elementos de la MA hacen demasiado caro computacionalmente al MEM.

3.3 Refinamiento común de mallas

El problema de realizar la integral del miembro de la derecha en la Ec. (34) al utilizar dos discretizaciones diferentes fue atacado por [Jiao y Heath \(2004\)](#). Estos autores proponen hacer un refinamiento común de las mallas dato (en este caso la MA y la ME), de manera de obtener una nueva malla con elementos formados a partir de la subdivisión de elementos de las mallas dato.

Si las N_E^j y las N_A^k son polinomios en los elementos de la ME y de la MA respectivamente, su producto es un polinomio en cada subelemento de la malla de refinamiento común. Por esto, la integral de la Ec. (34) puede calcularse exactamente sobre los subelementos con una regla de cuadratura adecuada.

Pruebas realizadas sobre el refinamiento común de mallas planas (en una dimensión las mallas dato representaban discretizaciones de una recta y en dos dimensiones discretizaciones de un plano) dieron resultados muy alentadores, según los cuales, sucesivas aplicaciones del método para transferir datos entre dos mallas producían errores menores que los obtenidos de aplicar otros métodos ya mencionados en este trabajo (Thin-Plate Spline, Inverse Isoparametric Mapping, entre otros).

Sin embargo, el refinamiento común de mallas dato que no poseen exactamente la misma topología acarrea problemas como la definición de cuál de las superficies deben utilizarse para realizar las integrales. Para resolver este problema se propone utilizar una superficie virtual, obtenida a partir de las dos superficies que definen las mallas aerodinámica y estructural, sobre la cual realizar el refinamiento común.

La utilización de una superficie virtual permite resolver el problema de discretización con mallas diferentes de una misma superficie o de dos superficies muy similares. Sin embargo no es posible aplicar esta técnica para el caso de topologías muy diferentes, lo cual ocurre muy a menudo en análisis aeroelásticos con esquemas particionados.

4 CONCLUSIONES

En este trabajo se ha presentado el estado del arte de los métodos más comúnmente utilizados para transferir información entre grillas correspondientes a la dinámica de fluidos computacional y mallas correspondientes a la dinámica de estructuras computacional. Se ha enfatizado la importancia de la correcta elección y aplicación de un método de interacción, dado que la calidad de la solución obtenida depende de las calidades de los métodos para resolver el problema aerodinámico, el estructural y el de interacción. En relación a esto se ha mencionado que un método de interacción debe conservar las cargas totales (fuerzas y momentos) y la energía total del sistema.

La principal desventaja de los métodos de interpolación es que no conservan adecuadamente las cargas totales, no obstante es posible aplicarlos de manera de conservar la energía total. Por otro lado, la simplicidad de aplicación cuando las topologías de las mallas en la interfase son muy diferentes hacen a estos métodos muy atractivos. Dentro de este grupo, el esquema basado en el Método de Elementos de Contorno ha demostrado conservar las cargas totales correctamente, aunque solo es de aplicación para casos en que la malla estructural se encuentre *contenida* en la aerodinámica.

Los métodos de proyección permiten realizar una implementación con un importante significado físico, haciendo uso de las discretizaciones seleccionadas para las técnicas de CSD y de CFD, por lo que resultan los mejores candidatos para resolver problemas de CAE. Sin embargo, quedan muchos interrogantes a resolver respecto a la manera en que han de realizarse ciertas integrales y cómo han de proyectarse puntos correspondientes a una malla sobre los elementos de la otra, especialmente cuando las topologías de estas son muy diferentes entre sí.

REFERENCIAS

- Ahrem R., Beckert A. y Wendland H., A meshless spatial coupling scheme for large-scale fluid-structure-interaction problems. *Computer Modeling in Engineering and Sciences*, 12:121-136, 2006.
- Allen C.B. y Rendall T.C.S., Unified Approach to CFD-CSD Interpolation and Mesh Motion using Radial Basis Functions. *25th AIAA Applied Aerodynamics Conference*, 2007.
- Babuska I. y Melenk J.M., The partition of unity method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 40:727-758, 1997.
- Beckert A. y Wendland H., Multivariate interpolation for fluid-structure-interaction problems using radial basis functions. *Aerospace Science and Technology*, 5:125-134, 2001.
- Bernardi C., Maday Y. y Patera T., A new non-conforming approach to domain decomposition; the mortar element method. *Nonlinear Partial Differential Equations and their Applications*, 11:13-51, 1994.
- Boris J.P. y Book D.L., Flux-corrected transport. I. SHASTA, a fluid transport algorithm that works. *Journal of Computational Physics*, 11 (1):38-69, 1973.
- Buhmann M. *Radial Basis Functions*. Cambridge University Press, 2005.
- Cebral J.R. y Löhner R., Conservative load projection and tracking for fluid-structure problems. *AIAA Journal*, 35 (4):687-692, 1997.
- Chen P.C. y Jadic I., Interfacing of fluid and structural models via innovative structural boundary element method. *AIAA Journal*, 36 (2):282-286, 1998.
- Duchon J., Splines Minimizing Rotation-Invariant Semi-Norms in Sobolev Spaces. *Constructing Theory of Functions of Several Variables, Oberwolfach 1976*, 85-100, 1977.
- Farhat C., Lesoinne M. y Le Tallec P., Load and motion transfer algorithms for fluid-structure interaction problems with non-matching discrete interfaces: Momentum and energy conservation, optimal discretization, and application to aeroelasticity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 157:95-114, 1998.
- Harder R.L. y Desmarais R.N., Interpolation Using Surface Splines. *AIAA Journal*, 9 (2):189-191, 1972.
- Hardy R.L., Multiquadric Equations of Topography and Other Irregular Surfaces. *Journal of Geophysical Research*, 76 (8):1905-1915, 1971.
- Hounjet M.H.L. y Meijer J.J., Evaluation of elastomechanical and aerodynamic data transfer methods for non-planar configurations in computational analysis. *ICAS-Publication*, 10.1-10.25, 1994.
- Jiao X. y Heath M.T., Common-refinement-based data transfer between non-matching meshes in multiphysics simulations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 61:2420-2427, 2004.
- Kansa E., Multiquadrics-A scattered data approximation scheme with applications to computational fluid dynamics I: Solutions to parabolic, hyperbolic, and elliptic partial differential equations. *Computers & Mathematics with Applications*, 19 (8/9):147-161, 1990a.
- Kansa E., Multiquadrics-A scattered data approximation scheme with applications to computational fluid dynamics I: Surface approximations and partial derivative estimates. *Computers & Mathematics with Applications*, 19 (8/9):127-145, 1990b.

- Madych W.R., Miscellaneous error bounds for multiquadric and related interpolators. *Computers & Mathematics with Applications*, 24 (12):121-138, 1992.
- Madych W.R. y Nelson S.A., Multivariate interpolation and conditionally positive definite functions. *Approximation theory and Its Applications*, 4 (4):77-89, 1988.
- Murti V. y Valliappan S., Numerical inverse isoparametric mapping in remeshing and nodal quantity contouring. *Computers & Structures*, 22 (6):1011-1021, 1986.
- Murti V., Wang Y. y Valliappan S., Numerical inverse isoparametric mapping in 3D FEM. *Computers & Structures*, 29 (4):611-622, 1988.
- Nam M.-D. y Thanh T.-C., Approximation of function and its derivatives using radial basis functions networks. *Applied Mathematical Modeling*, 27:197-220, 2003.
- Nam M.-D. y Thanh T.-C. Numerical solution of differential equations using multiquadric radial basis function networks. *Neural Networks*, 14:185-199, 2001a.
- Nam M.-D. y Thanh T.-C., Numerical solution of Navier-Stokes equations using multiquadric radial basis function networks. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 37 (1):65-86, 2001b.
- Rendall T.C.S. y Allen C.B., Improved radial basis function fluid–structure coupling via efficient localized implementation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 78 (10):1188-1208, 2009.
- Sarra S.A., Integrated Multiquadric Radial Basis Function Approximation Methods. *Computers & Mathematics with Applications*, 51 (8):1283-1296, 2006.
- Smith M.J., Hodges D.H. y Cesnik C.E.S., An Evaluation of Computational Algorithms to Interface Between CFD and CSD Methodologies. *U.S. Air Force Research Laboratory*, TR-96-3055, 1995.
- Wendland H., Ein Beitrag zur Interpolation mit radialen Basisfunktionen. *Diplomarbeit Universität Göttingen*, 1994.
- Wendland H., Fast evaluation of radial basis functions: Methods based on Partition of Unity. *Approximation Theory X: Wavelets, Splines, and Applications*, 473-483, 2002.
- Wendland H., Konstruktion und Untersuchung radialer Basisfunktionen mit kompaktem Träger. *Dissertation Universität Göttingen*, 1996.
- Wendland H., Piecewise polynomial, positive definite and compactly supported radial basis functions of minimal degree. *Advances in computational Mathematics*, 4:389-396, 1995.
- Wendland H., *Scattered Data Approximation*. Cambridge University Press, 2005.