

## PROCEDIMENTO PARA DETERMINAÇÃO DAS MATRIZES DE PONDERAÇÃO DO ALGORITMO DE CONTROLE ÓTIMO PARA UM AMORTECEDOR DE MASSA HÍBRIDO (AMH)

Suzana Moreira Avila<sup>a</sup> and Paulo Batista Gonçalves<sup>b</sup>

<sup>a</sup>Faculdade UnB-Gama – Engenharia – Universidade de Brasília, Área Especial 2 Lote 14 Setor Central, Gama/DF, Brasil, [avilas@unb.br](mailto:avilas@unb.br), <http://www.fga.unb.br>

<sup>b</sup>Departamento de Engenharia Civil – PUC-Rio, Rua Marques de São Vicente, 225, Gávea, Rio de Janeiro/RJ, Brasil, [paulo@puc-rio.br](mailto:paulo@puc-rio.br), <http://www.civ.puc-rio.br>

**Palavras Chave:** controle ótimo, amortecedor de massa híbrido, matriz de ponderação.

**Resumo.** Algoritmos de controle ótimo visam determinar uma lei de controle que minimize um índice de performance previamente estabelecido. A eficiência deste tipo de controle está diretamente ligada à escolha adequada das matrizes de ponderação. A flexibilidade existente na escolha destas matrizes permite a geração de uma família de controladores diversos, isto representa a maior vantagem, como também a maior desvantagem deste método. É extremamente importante a realização de um estudo paramétrico detalhado das matrizes de ponderação de forma a assegurar a robustez do sistema de controle. Neste trabalho propõe-se um método para determinar estas matrizes no caso do algoritmo de controle ótimo instantâneo aplicado a um amortecedor de massa híbrido (AMH) com o objetivo de obter-se um controle híbrido eficiente. Um estudo paramétrico busca encontrar as melhores matrizes de ponderação que minimizem a resposta permanente do sistema principal.

## 1 INTRODUÇÃO

No desenvolvimento de um sistema de controle ativo ou híbrido, uma das etapas fundamentais é a determinação de uma lei de controle apropriada. Essa lei é obtida através do algoritmo de controle. Uma classe de algoritmos bastante utilizado são os algoritmos de controle ótimo (Meirovitch, 1990; Soong, 1990; Yang *et al*, 1987). Consistem basicamente em encontrar forças de controle que minimizem determinado índice de performance quadrático. Uma das etapas é a determinação das matrizes de ponderação deste índice, cujas magnitudes são definidas de acordo com a importância relativa dada às variáveis de estado e às forças de controle no processo de minimização.

A escolha adequada destas matrizes é de fundamental importância na eficiência do algoritmos de controle ótimo clássico e instantâneo (Avila, 2002), segundo Junkins & Kim (1993), a flexibilidade na seleção destas matrizes, que resulta em uma total liberdade do projetista em gerar uma infinita família de controles, é a maior vantagem e desvantagem deste método. Torna-se de extrema importância, portanto, um estudo paramétrico detalhado destas matrizes de ponderação para garantir a robustez do sistema de controle.

Loh & Chao (1996) propuseram usar o do método de alocação de polos (Meirovitch, 1990) para a determinação das matrizes de ponderação. Outra metodologia para escolha destas matrizes, utilizando o método de Lyapunov, pode ser encontrada em Tzan & Pantelides (1994).

No presente trabalho pretende-se propor uma forma eficaz de determinação dessas matrizes, no caso do algoritmo de controle ótimo instantâneo aplicado ao cálculo da força de controle de um AMH, de forma que se obtenha um controle híbrido eficiente. Isto será feito realizando-se um estudo de otimização para escolha de matrizes de ponderação de modo que se possa minimizar a resposta permanente do sistema principal.

## 2 AMORTECEDOR DE MASSA HÍBRIDO

O controle híbrido trata-se de uma combinação dos controles passivo e ativo. Tem sido alvo de muitos estudos, já que se apresenta como forma alternativa de controle que supre as principais desvantagens dos controles passivo e ativo isoladamente. O controle passivo tem como principal desvantagem perder a eficiência se a excitação dinâmica estiver fora da faixa de frequência para a qual foi projetado. Já o controle ativo, apesar de não possuir essa deficiência, apresenta outro tipo de desvantagem que é a demanda de grandes quantidades de energia para geração das forças de controle. O sistema de controle híbrido, além de exigir forças de controle inferiores e manter sua eficiência ao longo de uma longa faixa de frequências, trata-se de um controle mais robusto e confiável.

Uma forma de controle híbrido bastante estudada e já implementada na prática em algumas estruturas no Japão e Taiwan é o chamado amortecedor de massa híbrido (AMH) (Spencer Jr. & Sain, 1997). Trata-se da combinação de um amortecedor de massa sintonizado (AMS) com um atuador de controle ativo.

A motivação para o início do estudo desse tipo de mecanismo se deve ao fato de uma série de amortecedores de massa sintonizados (AMS) passivos terem sido instalados na prática (Soong & Dargush, 1997; Holmes, 1995). Como foi dito anteriormente, em seu projeto, o AMS é sintonizado em uma única frequência e deixa de ser eficiente no caso de excitações que possuam uma ampla faixa de frequência, como é o caso de terremotos ou quando há variação dos parâmetros estruturais durante a vida útil da estrutura.

No caso do AMH, essa limitação pode ser superada fornecendo-se uma capacidade de controle ativo a este tipo de dispositivo. Devido ao aumento considerável na eficiência do mesmo, uma série de estudos teóricos e experimentais foi realizada sobre o assunto na última década (Soong 1990; Soong *et al* 1991(b); Chang & Yang 1995(b); Kwok & Samali 1995; Ankireddi & Yang 1996; Xu 1996; Mackriell *et al*, 1997; Cao *et al*, 1998; Yan *et al*. 1999). Esses estudos resultaram na instalação, com sucesso, deste mecanismo para proteção contra vibrações excessivas principalmente no Japão (Fujino *et al* 1996; Spencer Jr. & Sain, 1997; Spencer Jr. & Soong, 1999; Nishitani & Inoue 2001).

As equações de movimento de um sistema de vários graus de liberdade com um AMH conectado, são semelhantes ao da estrutura com o AMS. A diferença é que se inclui a parcela relativa à força de controle,  $u(t)$ , no AMH, sendo assim as equações de movimento do sistema controlado adquirem a forma

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{y}}(t) + \mathbf{C} \dot{\mathbf{y}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{y}(t) = \mathbf{F}(t) + \mathbf{D}' p(t) \quad (1)$$

$$m \ddot{z}(t) + c \dot{z}(t) + kz(t) = -m \ddot{y}_N + u(t) \quad (2)$$

onde  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$  e  $\mathbf{K}$  são as matrizes de massa, amortecimento e rigidez da estrutura, respectivamente;  $\mathbf{F}(t)$  é o carregamento dinâmico aplicado sobre a estrutura

$p(t) = c \dot{z}(t) + kz(t) - u(t)$ ;  $y_i(t)$  é o deslocamento da  $i$ -ésima massa em relação ao solo;  $z(t)$  é o deslocamento do AMH em relação ao andar onde o mesmo se encontra instalado e  $\mathbf{D}'$  representa o vetor de localização do AMH.

O componente  $d_j$  do vetor  $\mathbf{D}'$  é dado por

$$d_j = \begin{cases} 0, & j \neq i \\ 1, & j = i \end{cases} \quad (3)$$

sendo  $i$  o andar onde está instalado o AMH. No caso do AMH instalado no último andar  $i = N$ .

Vale ressaltar que os sistemas de controle AMH tratam-se de sistemas *single-input*, isto é, apenas uma única força de controle é necessária para seu funcionamento. A matriz de locação dos controladores,  $\mathbf{B}$ , que geralmente tem dimensões  $2n \times m$  passa a ter dimensões  $2n \times 1$  neste caso, e a matriz de ponderação  $\mathbf{R}$  utilizada nos algoritmos de controle ótimo, reduz-se neste caso a um número.

A análise dinâmica de edifícios altos com AMH, assim como no caso do AMS, também pode ser realizada reduzindo o sistema de vários graus de liberdade à um sistema de um único grau de liberdade (Soong & Dargush, 1997). As equações do sistema reduzido, podem ser reescritas adicionando-se a parcela da força de controle  $u(t)$ , como se segue

$$\mathbf{M}_1^* \ddot{y}_N + \mathbf{C}_1^* \dot{y}_N + \mathbf{K}_1^* y_N = c \dot{z} + kz + f(t) - u(t) \quad (4)$$

$$m \ddot{z}(t) + c \dot{z}(t) + kz(t) = -m \ddot{y}_N + g(t) + u(t) \quad (5)$$

### 3 CONTROLE ÓTIMO INSTANTÂNEO

O algoritmo de controle ótimo linear clássico (Meirovitch, 1990) não conduz à uma força de controle verdadeiramente otimizada em certos casos, já que o termo da excitação é ignorado na obtenção da matriz de Riccati  $\mathbf{P}(t)$ . Em um instante de tempo  $t$  qualquer, o conhecimento do valor da força de excitação pode ser utilizado para melhorar a eficiência do algoritmo de controle.

Yang *et al* (1987) propuseram um outro tipo de algoritmo de controle ótimo onde a função objetivo a ser minimizada, expressa em termos de funções quadráticas, é dependente do tempo. Em outras palavras, o índice de performance quadrático é minimizado em cada instante de tempo.

Os algoritmos de controle ótimo instantâneo incluem controle de malha fechada, malha aberta e malha aberta-fechada. A eficiência desses algoritmos é idêntica sob ambientes de controle ideais.

Esse algoritmo é de mais fácil implementação já que a matriz de ganho não requer esforço computacional e independe das características e parâmetros da estrutura. A determinação da matriz de Riccati requer um grande esforço computacional para edifícios altos com um alto número de graus de liberdade. Quando a matriz de Riccati é função das propriedades da estrutura, o sistema de controle é sensível à identificação da estrutura, o que em geral traz algumas incertezas.

Seja índice de performance dependente do tempo  $J(t)$ , definido por

$$J(t) = \mathbf{z}^T(t) \mathbf{Q} \mathbf{z}(t) + \mathbf{u}^T(t) \mathbf{R} \mathbf{u}(t) \quad (6)$$

As leis de controle ótimo são deduzidas minimizando  $J(t)$  em cada instante  $t$  para todo  $0 \leq t \leq t_f$ . O ponto de partida da dedução do algoritmo de controle ótimo instantâneo é considerar a evolução do vetor de estado  $\mathbf{z}(t)$  dentro de um pequeno intervalo de tempo  $\Delta t$ . Assumindo-se que a matriz do sistema de malha aberta  $\mathbf{A}$  possui autovalores distintos, as equações do sistema podem ser desacopladas através da transformação

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{T} \mathbf{x}(t) \quad (7)$$

onde  $\mathbf{T}$  é a matriz modal  $2n \times 2n$ , cujas colunas são os autovetores de  $\mathbf{A}$ .

As equações de estado desacopladas são dadas por

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \Lambda \mathbf{x}(t) + \mathbf{q}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{0} \quad (8)$$

onde

$$\Lambda = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T} \quad (9)$$

é diagonal com os elementos da diagonal iguais aos autovalores complexos  $\lambda_j, j=1,2,\dots,2n$ , da matriz  $\mathbf{A}$  e

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{T}^{-1} [\mathbf{B} \mathbf{u}(t) + \mathbf{H} \mathbf{f}(t)] \quad (10)$$

Ao longo de um pequeno intervalo de tempo  $\Delta t$ , o vetor de estado modal  $\mathbf{x}(t)$  pode ser expresso na forma

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \int_0^{t-\Delta t} \exp[\Lambda(t-\Delta t)] \mathbf{q}(\tau) d\tau + \int_{t-\Delta t}^t \exp[\Lambda(t-\tau)] \mathbf{q}(\tau) d\tau \\ &\cong \exp(\Lambda \Delta t) \mathbf{x}(t-\Delta t) + \frac{\Delta t}{2} [\exp(\Lambda \Delta t) \mathbf{q}(t-\Delta t) + \mathbf{q}(t)] \end{aligned} \quad (11)$$

Para o vetor de estado  $\mathbf{z}(t)$ , as equações (7), (10) e (11) levam a

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{T} \mathbf{d}(t-\Delta t) + \frac{\Delta t}{2} [\mathbf{B} \mathbf{u}(t) + \mathbf{H} \mathbf{f}(t)] \quad (12)$$

onde

$$\mathbf{d}(t-\Delta t) = \exp(\Lambda \Delta t) \mathbf{T}^{-1} \left\{ \mathbf{z}(t-\Delta t) + \frac{\Delta t}{2} [\mathbf{B} \mathbf{u}(t-\Delta t) + \mathbf{H} \mathbf{f}(t-\Delta t)] \right\} \quad (13)$$

Na expressão (13)  $\exp(\Lambda \Delta t)$  é uma matriz diagonal cujo  $j$ -ésimo elemento é  $\exp(\lambda_j \Delta t)$ . O vetor  $\mathbf{d}(t-\Delta t)$  contém todas as quantidades dinâmicas no tempo  $t-\Delta t$ .

Utilizando a equação (12) como restrição, a minimização de  $J(t)$  dada por (6) pode ser realizada, nesse caso o Hamiltoniano é

$$H = \mathbf{z}^T(t)\mathbf{Q}\mathbf{z}(t) + \mathbf{u}^T\mathbf{R}\mathbf{u}(t) + \lambda^T(t) \left\{ \mathbf{z}(t) - \mathbf{T}\mathbf{d}(t - \Delta t) - \frac{\Delta t}{2} [\mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{H}\mathbf{f}(t)] \right\} \quad (14)$$

onde  $\lambda(t)$  é o multiplicador de Lagrange.

As condições de minimização são

$$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{z}} = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial \lambda} = 0 \quad (15)$$

que levam a

$$\begin{aligned} 2\mathbf{Q}\mathbf{z}(t) + \lambda(t) &= 0 \\ 2\mathbf{R}\mathbf{u}(t) - \frac{\Delta t}{2}\mathbf{B}^T\lambda(t) &= 0 \\ \mathbf{z}(t) &= \mathbf{T}\mathbf{d}(t - \Delta t) + \frac{\Delta t}{2} [\mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{H}\mathbf{f}(t)] \end{aligned} \quad (16)$$

Sabe-se que, quando o vetor de controle de malha fechada é regulado pelo vetor de estado

$$\lambda(t) = \mathbf{P}(t)\mathbf{z}(t) \quad (17)$$

$$\mathbf{P}(t) = -2\mathbf{Q} \quad (18)$$

e, usando a segunda equação (16), tem-se

$$\mathbf{u}(t) = -\frac{\Delta t}{2}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{Q}\mathbf{z}(t) \quad (19)$$

O vetor resposta  $\mathbf{z}(t)$  é dado por

$$\mathbf{z}(t) = \left[ \mathbf{I} + \frac{\Delta t^2}{4}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{Q} \right]^{-1} \left[ \mathbf{T}\mathbf{d}(t - \Delta t) + \frac{\Delta t}{2}\mathbf{H}\mathbf{f}(t) \right] \quad (20)$$

É interessante comparar a equação (19) com a equação da lei de controle de malha fechada do controle ótimo clássico.

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{G}(t)\mathbf{z}(t) = -\frac{1}{2}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}(t)\mathbf{z}(t) \quad (21)$$

onde  $\mathbf{G}(t) = -\frac{1}{2}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}(t)$  é o ganho. Pode-se notar, neste caso, que o termo  $\Delta t\mathbf{Q}$  substitui a matriz de Riccati  $\mathbf{P}(t)$ . Verifica-se que este é um projeto de controle muito mais simples, já que não é necessária a solução da equação de Riccati. Vale ressaltar que a escolha da matriz  $\mathbf{Q}$ , matriz de ponderação prescrita associada ao índice de performance, requer maior cuidado em sua consideração no contexto do controle ótimo instantâneo (Soong, 1990).

No caso do controle de malha aberta-fechada onde o vetor de controle é regulado pelo vetor de estado e excitação externa, o multiplicador de Lagrange tem a forma

$$\lambda(t) = \mathbf{P}(t)\mathbf{z}(t) + \mathbf{p}(t) \quad (22)$$

onde o segundo termo  $\mathbf{p}(t)$  representa o controle de malha aberta.

Fazendo as deduções apropriadas Soong (1990) chega à seguinte expressão para o vetor de estado controlado

$$\mathbf{z}(t) = \left[ \mathbf{I} + \frac{\Delta t^2}{8} \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \right]^{-1} \left[ \mathbf{T} \mathbf{d}(t - \Delta t) + \frac{\Delta t^2}{8} \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{p}(t) + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{H} \mathbf{f}(t) \right] \quad (23)$$

Para o controle de malha aberta,  $\boldsymbol{\lambda}(t)$  pode ser simplesmente colocado na forma

$$\boldsymbol{\lambda}(t) = \mathbf{p}(t) \quad (24)$$

Por um procedimento similar (Soong, 1990), encontra-se  $\mathbf{z}(t)$ , sendo este dado por

$$\mathbf{z}(t) = \left[ \mathbf{I} - \frac{\Delta t^2}{4} \mathbf{B} \left( \frac{\Delta t^2}{4} \mathbf{B}^T \mathbf{Q} \mathbf{B} + \mathbf{R} \right)^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{Q} \right] \left[ \mathbf{T} \mathbf{d}(t - \Delta t) + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{H} \mathbf{f}(t) \right] \quad (25)$$

#### 4 CÁLCULO DA FORÇA DE CONTROLE NO AMH UTILIZANDO O COI

A força de controle de malha fechada segundo o algoritmo COI pode ser calculada através da expressão (19), no caso do AMH utiliza-se um controle *single-input*, isto é, existe apenas uma força de controle. Sendo assim, a matriz  $\mathbf{R}$  se reduz a um número. Na presente análise considera-se o sistema estrutural reduzido a um grau de liberdade, segundo procedimento descrito em Soong & Dargush (1997). Neste caso, a matriz de ponderação  $\mathbf{Q}$  tem a forma

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} & q_{14} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} & q_{24} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} & q_{34} \\ q_{41} & q_{42} & q_{43} & q_{44} \end{bmatrix} \quad (26)$$

Substituindo-se (26) na expressão (19) da força de controle de malha fechada segundo o COI e realizando a multiplicação obtém-se a expressão da força de controle do AMH, a saber

$$u = \frac{\Delta t}{2} \left[ \left( -\frac{q_{31}}{R} \frac{1}{M} + \frac{q_{41}}{R} \frac{1}{m} \right) z_1 + \left( -\frac{q_{32}}{R} \frac{1}{M} + \frac{q_{42}}{R} \frac{1}{m} \right) z_2 + \right. \\ \left. + \left( -\frac{q_{33}}{R} \frac{1}{M} + \frac{q_{43}}{R} \frac{1}{m} \right) z_3 + \left( -\frac{q_{34}}{R} \frac{1}{M} + \frac{q_{44}}{R} \frac{1}{m} \right) z_4 \right] \quad (27)$$

onde  $M$  é a massa modal do sistema principal e  $m$  é a massa do AMH.

Percebe-se que as duas primeiras linhas da matriz  $\mathbf{Q}$  não influem no cálculo da força de controle, portanto podem ser sempre iguais a zero. Verifica-se também que neste caso os valores dos elementos de  $\mathbf{Q}$  e  $\mathbf{R}$  não são independentes. O importante no processo de otimização é a razão  $q_{ij}/R$ . Resta portanto determinar as relações  $q_{31}/R$ ,  $q_{41}/R$ ,  $q_{32}/R$ ,  $q_{42}/R$ ,  $q_{33}/R$ ,  $q_{43}/R$ ,  $q_{34}/R$ ,  $q_{44}/R$  de forma a tornar o AMH o mais eficiente possível.

As variáveis de estado  $z_1$  e  $z_2$  correspondem aos deslocamentos da massa principal e do AMH, respectivamente. Enquanto que  $z_3$  e  $z_4$  representam as velocidades, da massa principal e do AMH, respectivamente. Denominemos os coeficientes que multiplicam  $z_1$ ,  $z_2$ ,  $z_3$  e  $z_4$ , dentro da expressão (24) de ganhos  $G_1$ ,  $G_2$ ,  $G_3$  e  $G_4$ , respectivamente. Esses ganhos provocam modificações nas matrizes de rigidez e amortecimento do sistema, na forma

$$\mathbf{K}' = \begin{bmatrix} k_{1,1} + G_1 & k_{1,2} + G_2 \\ k_{2,1} - G_1 & k_{2,2} - G_2 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{C}' = \begin{bmatrix} c_{1,1} + G_3 & c_{1,2} + G_4 \\ c_{2,1} - G_3 & c_{2,2} - G_4 \end{bmatrix} \quad (28)$$

Um aspecto importante a ser ressaltado é que a modificação nas matrizes de rigidez e amortecimento, devido à força de controle, torna as mesmas assimétricas.

Um passo essencial na análise do sistema controlado é a verificação de sua

estabilidade. Uma forma de fazê-lo é calcular os autovalores da matriz de estado controlada, a saber

$$\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}' & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C}' \end{bmatrix} \quad (29)$$

Se nenhum dos autovalores possuir parte real positiva, o sistema se mantém estável, caso contrário, as forças de controle tornarão o sistema instável.

## 5 ESTUDO PARAMÉTRICO

Com o objetivo de realizar um estudo paramétrico e de otimização para escolha das relações  $q_{ij}/R$  que minimizem a amplitude da resposta harmônica permanente do sistema principal,  $y(\omega)$ , dada pelo primeiro elemento da matriz

$$\mathbf{Y}(\omega) = (\omega^2\mathbf{M} - i\omega\mathbf{C} + \mathbf{K})^{-1}\mathbf{F} \quad (30)$$

, definida seguindo-se os procedimentos usuais da análise dinâmica de estruturas.

Foi realizada uma busca numérica afim de determinar as relações  $q_{ij}/R$  que produzissem o menor pico da resposta  $H$  dada por

$$H = \frac{y(\omega)xM_1}{F} = \sqrt{\frac{A^2 + B^2}{C^2 + D^2}} \quad (31)$$

onde

$$A = 2\beta^2\omega_1^2\mu^2M_1^2 - 2\mu^2M_1^2\alpha^2 + \Delta t \frac{q_{32}}{R}\mu - \Delta t \frac{q_{42}}{R}; \quad (32)$$

$$B = -4\beta\omega_1^2\xi_2\mu^2\alpha M_1^2 I + \beta\omega_1\Delta t \frac{q_{34}}{R}\mu I - \beta\omega_1\Delta t \frac{q_{44}}{R} I \quad (33)$$

$$C = -2\beta^4\omega_1^4\mu^2M_1^2 - \beta^2\omega_1^2\mu\Delta t \frac{q_{32}}{R} + 2\beta^2\omega_1^4\mu^2M_1^2\alpha^2 + \\ + \beta^2\omega_1^2\Delta t \frac{q_{42}}{R} + 2\omega_1^4\mu^2M_1^2\beta^2 - 2\omega_1^4\mu^2M_1^2\alpha^2 + \omega_1^2\mu\Delta t \frac{q_{32}}{R} - \\ - \omega_1^2\Delta t \frac{q_{42}}{R} + 2\omega_1^4\mu^3M_1^2\alpha^2\beta^2 + \Delta t \frac{q_{31}}{R}\mu^2\beta^2\omega_1^2 - \Delta t \frac{q_{41}}{R}\beta^2\omega_1^2\mu + \quad (34)$$

$$+ 8\beta^2\omega_1^4\xi_1\mu^2M_1^2\xi_2\alpha - 2\beta^2\omega_1^3\xi_1\mu\Delta t \frac{q_{34}}{R} + 2\beta^2\omega_1^3\xi_1\Delta t \frac{q_{44}}{R}$$

$$D = \beta^3\omega_1^3\Delta t \frac{q_{44}}{R} I + \beta^3\omega_1^3\Delta t \frac{q_{33}}{R}\mu^2 I + \omega_1^3\mu\beta\Delta t \frac{q_{34}}{R} I +$$

$$+ 4\beta^3\omega_1^4\mu^2M_1^2\xi_2\alpha I - \beta^3\omega_1^3\mu\Delta t \frac{q_{34}}{R} I + 4\beta^3\omega_1^4\xi_1\mu^2M_1^2 I -$$

$$- 4\beta\omega_1^4\xi_1\mu^2M_1^2\alpha^2 I + 2\beta\omega_1^2\xi_1\mu\Delta t \frac{q_{32}}{R} I - 2\beta\omega_1^2\xi_1\Delta t \frac{q_{42}}{R} I +$$

$$+ 4\beta^3\omega_1^4\xi_2\mu^3\alpha M_1^2 I - \beta^3\omega_1^3\Delta t \frac{q_{43}}{R}\mu I - 4\omega_1^4\mu^2M_1^2\beta\xi_2\alpha I - \quad (35)$$

$$- \omega_1^3\beta\Delta t \frac{q_{44}}{R} I$$

sabendo-se que :

$\alpha = \frac{\omega_1}{\omega_s}$  relação entre as frequências do AMH e da massa principal

$\mu = \frac{m}{M}$  relação entre as massas principal e do AMH

$\xi_1$  e  $\xi_2$  são as taxas de amortecimento da massa principal e do AMH, respectivamente

$\beta = \frac{\omega_s}{\omega_F}$  relação entre as frequências da excitação e natural da estrutura.

O valor máximo da curva de resposta em frequência é obtido através da solução da equação

$$\frac{\partial H}{\partial \beta} = 0 \quad (36)$$

sujeita à condição

$$\frac{\partial^2 H}{\partial \beta^2} > 0 \quad (37)$$

que define o ponto de máximo de uma função, onde  $\beta$  é a razão entre a frequência  $\omega$  e a frequência da excitação. Como a equação (36) é uma equação não-linear ela é resolvida numericamente através do método de Newton-Raphson.

Considere um edifício de oito andares, onde cada andar foi construído identicamente. As propriedades de cada um dos andares são:  $m_i = 345.6t$ ; rigidez  $k_i = 3.404 \times 10^5$  kN/m. O amortecimento considerado é o estrutural sendo a taxa de amortecimento do primeiro modo  $\xi=2\%$ . As frequências naturais, em rad/s, são  $\omega = [5.78, 17.18, 27.98, 37.82, 46.38, 53.62, 58.52, 61.68]$ . Verificou-se, após este estudo paramétrico detalhado, incrementando-se os valores dos ganhos  $G_1, G_2, G_3$  e  $G_4$ , que os picos da curva de resposta em frequência se reduzem de maneira satisfatória modificando somente a matriz de rigidez  $K$ , conforme se verifica nos exemplos apresentados na Tabela 1, que apresenta os picos da resposta permanente para cada combinação de ganhos. A melhor alternativa é fazer com que somente  $G_1 \neq 0$ , pois é a que causa a maior redução em relação à resposta sem controle ( $H_{sc} = 1.0934 \times 10^{-7}$ ), o que também se observa na curva de resposta em frequência apresentada na Figura (1).

	$q_{31}/R$	$q_{41}/R$	$q_{32}/R$	$q_{42}/R$	$q_{33}/R$	$q_{43}/R$	$q_{34}/R$	$q_{44}/R$	$H_{m\acute{a}x}$
$G_1 \neq 0$	$10^{15}$	$10^3$	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	$0.98689 \times 10^{-7}$
$G_1, G_2 \neq 0$	$10^{13}$	$10^3$	$10^{13}$	$10^3$	0.0	0.0	0.0	0.0	$1.07804 \times 10^{-7}$
$G_3, G_4 \neq 0$	0.0	0.0	0.0	0.0	$10^{11}$	$10^3$	$10^{11}$	$10^3$	$1.08660 \times 10^{-7}$
$G_1, G_2, G_3, G_4 \neq 0$	$10^4$	$10^3$	$10^4$	$10^3$	$10^4$	$10^3$	$10^4$	$10^3$	$1.09344 \times 10^{-7}$

Tabela 1: Picos da resposta em frequência em função de diversas combinações de ganhos

A Figura (2) apresenta a variação da resposta em frequência  $H$ , variando-se  $q_{31}/R$  e  $q_{41}/R$ , para  $\beta = 1.0$  no caso de  $\mu = 0.05$ . Percebe-se que  $H$  é tanto menor quanto mais altos os valores de  $q_{31}/R$  e  $q_{41}/R$ . As Figuras (3a) e (3b) apresentam as projeções do gráfico da Figura (2) nos planos  $H \times q_{41}/R$  e  $H \times q_{31}/R$ .

Devido ao fato de tratar-se de uma função monotônica, tornou-se necessário arbitrar uma restrição à busca numérica realizada. Isto foi feito adotando um tipo de restrição que garantisse a estabilidade do sistema e não calculasse um ganho que excedesse a capacidade do atuador. Sendo assim, o incremento dos valores de  $q_{31}/R$  e  $q_{41}/R$  se encerrava se os autovalores da matriz de estado controlada (29) indicassem instabilidade do sistema e/ou se os

ganhos excedessem valores que ultrapassassem os limites de capacidade dos atuadores.

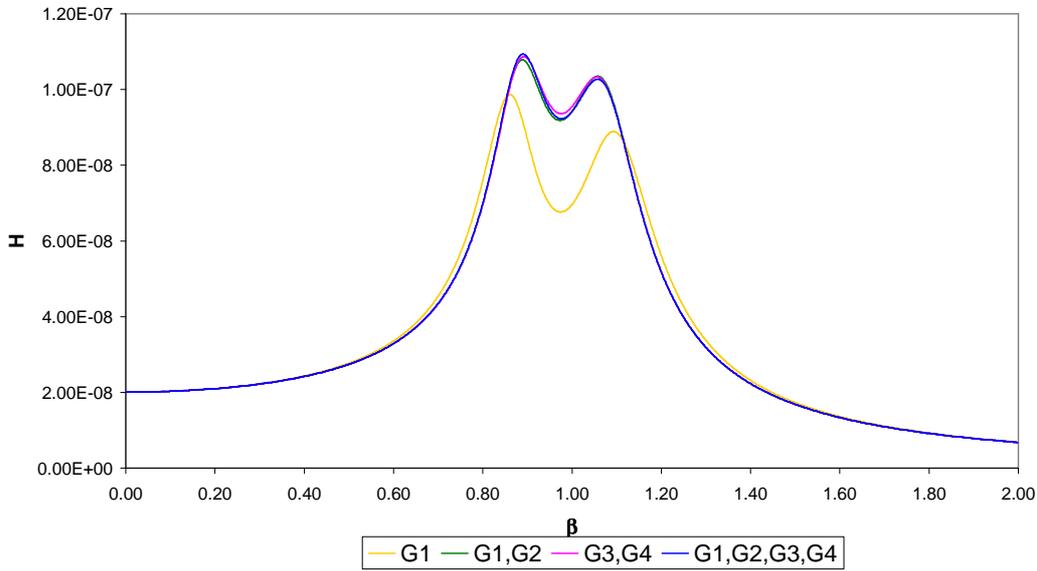


Figura 1: Resposta em frequência em função da combinação de ganhos

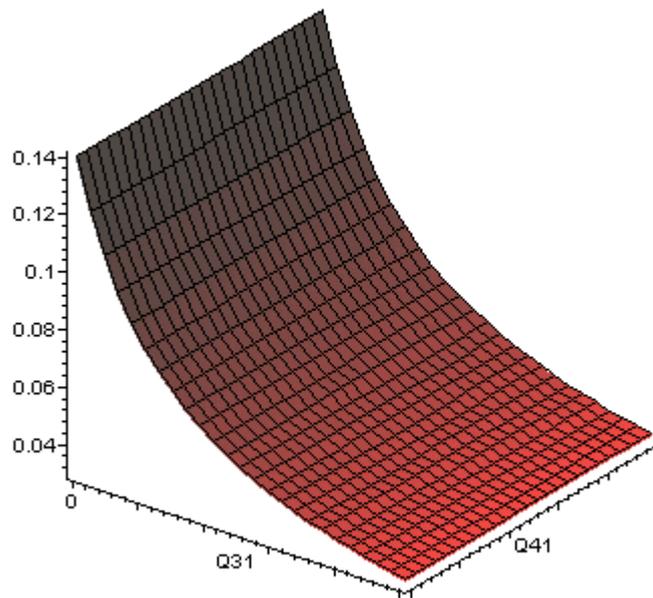
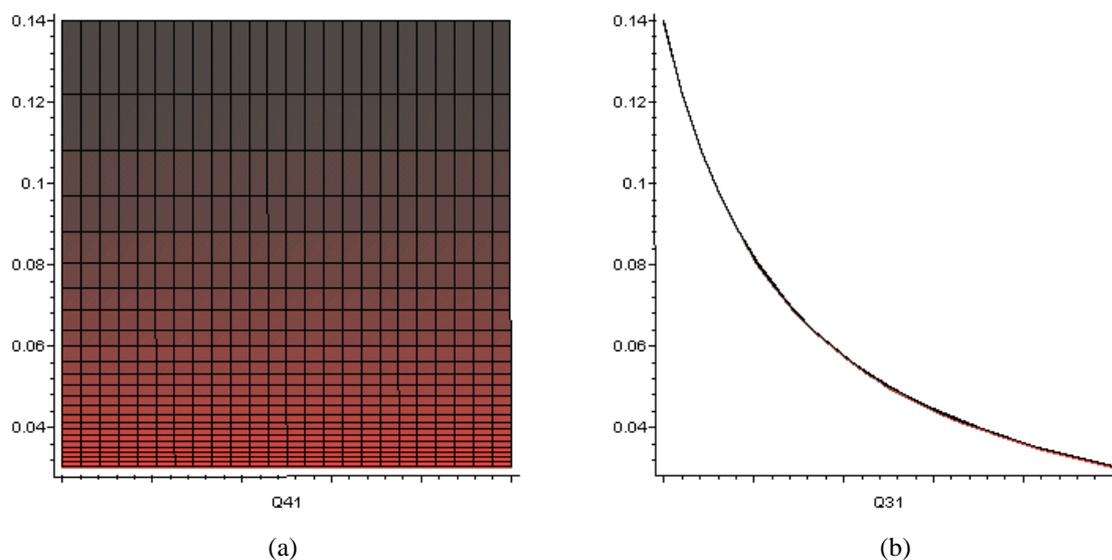


Figura 2: Variação da resposta em frequência em relação a  $q_{31}/R$  e  $q_{41}/R$

Figura 3: Projeções da superfície  $H$ 

Dando prosseguimento, a Tabela 2 apresenta, para diversos valores de  $\mu$ , fixando  $q_{41}/R = 10^3$ , os valores ótimos de  $q_{31}/R$ , que atendem o critério de estabilidade do sistema, seu respectivo ganho  $G_1$ , os picos da função resposta em frequência com AMS e com AMH e a redução correspondente, verifica-se que a redução foi em média de 15%.

Vale ressaltar que ao se modificar o  $\mu$ , as propriedades ótimas do AMS foram recalculadas segundo as expressões de parâmetros ótimos de Den Hartog.

$\mu$	$q_{31}/R$	$G_1$	$H_{\max}$ (AMS)	$H_{\max}$ (AMH)	$\Delta$ (%)
0.001	$1.2 \times 10^{14}$	$0.1256 \times 10^6$	$3.4954 \times 10^{-7}$	$3.0241 \times 10^{-7}$	13.5
0.01	$6.9 \times 10^{14}$	$0.7219 \times 10^6$	$1.9564 \times 10^{-7}$	$1.6352 \times 10^{-7}$	16.4
0.05	$2.7 \times 10^{15}$	$2.8250 \times 10^6$	$1.0934 \times 10^{-7}$	$0.9212 \times 10^{-7}$	15.8
0.1	$4.9 \times 10^{15}$	$5.1269 \times 10^6$	$0.8285 \times 10^{-7}$	$0.7097 \times 10^{-7}$	14.3

Tabela 2: Ganhos ótimos redução dos picos da resposta em frequência

As Figuras (4) a (7) apresentam as respostas em frequência com AMS e com AMH para cada uma das relações entre massas  $\mu$  considerada acima. Em todos casos verifica-se que o controle híbrido otimizado fornece resultados bastante satisfatórios para uma ampla faixa de frequências.

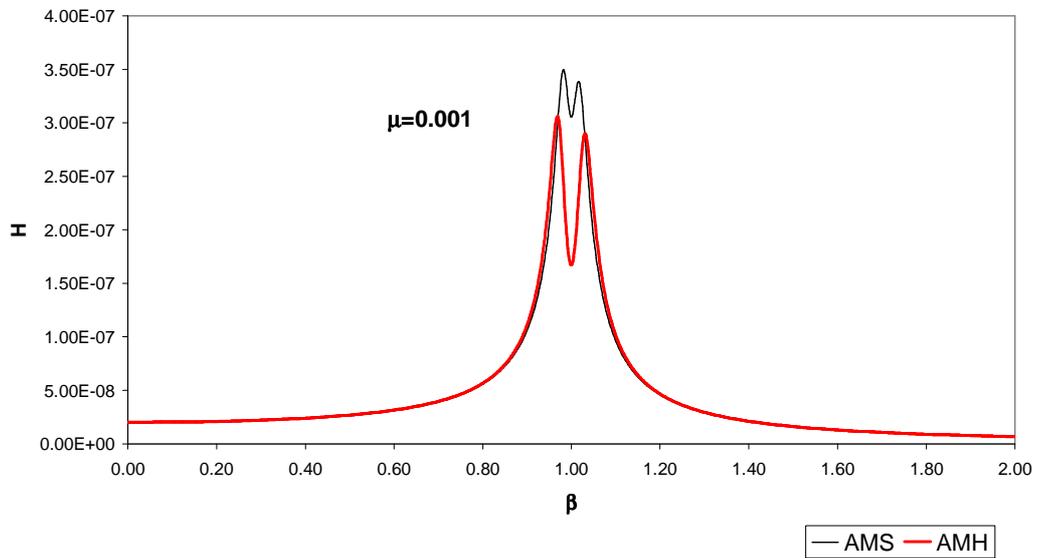


Figura 4: Respostas em frequência com AMS e com AMH ( $\mu = 0.001$ )

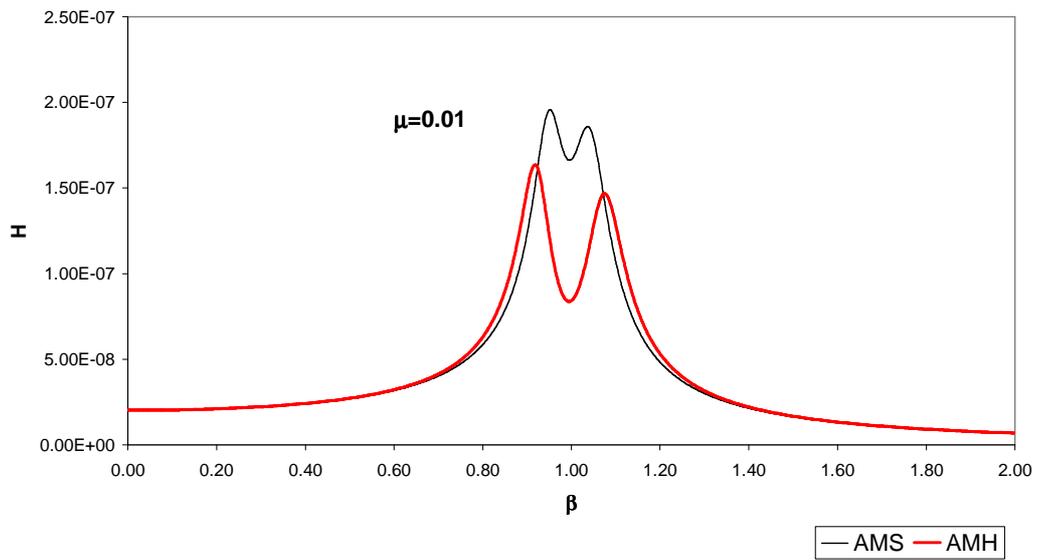


Figura 5: Respostas em frequência com AMS e com AMH ( $\mu = 0.01$ )

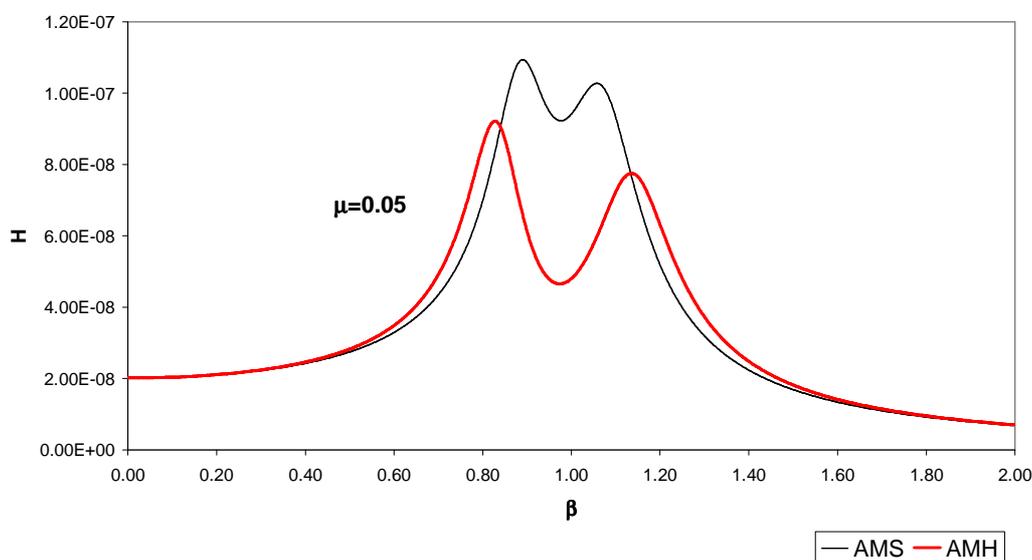


Figura 6: Respostas em frequência com AMS e com AMH ( $\mu = 0.05$ )

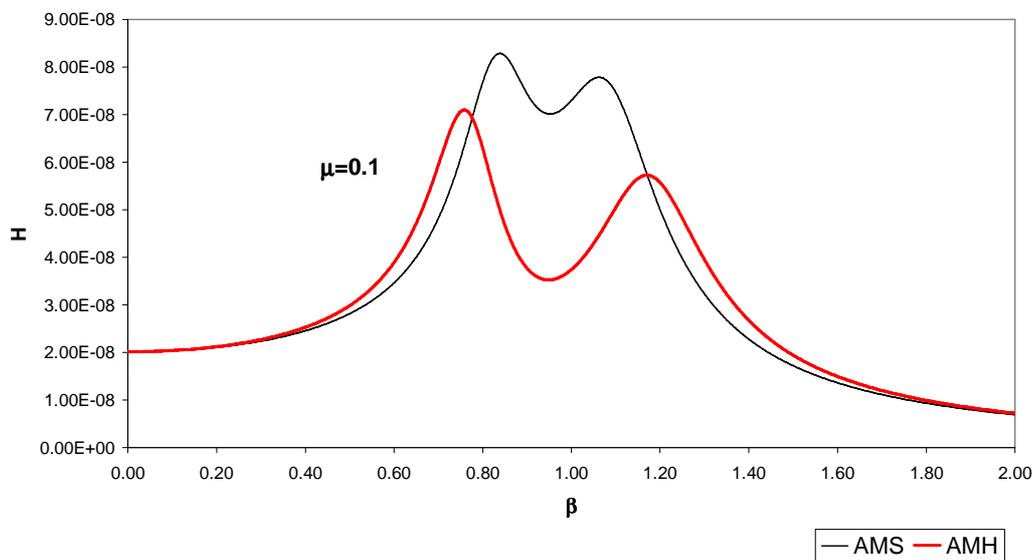
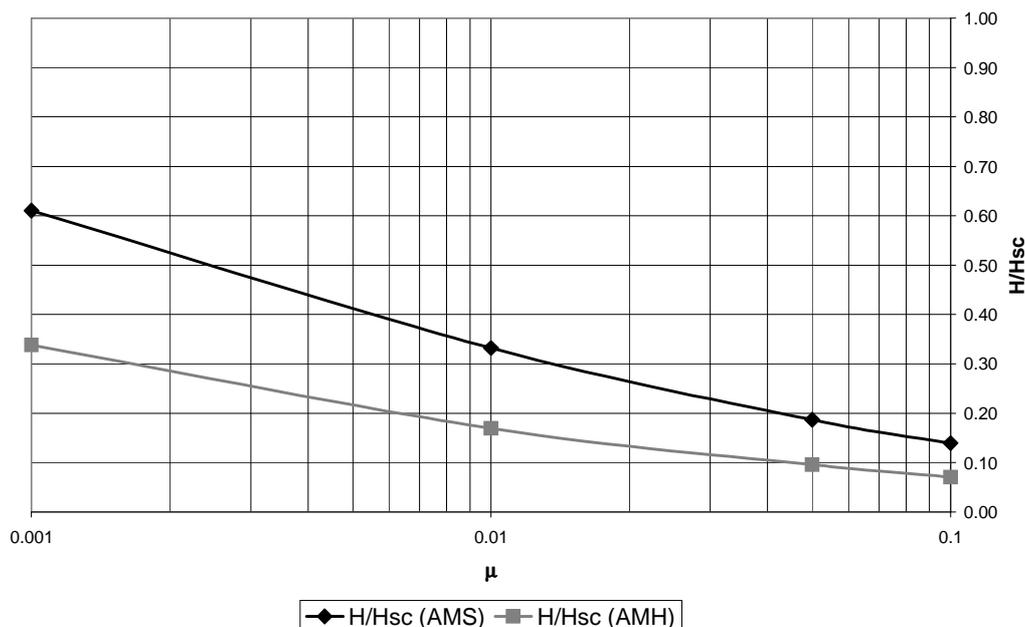


Figura 7: Respostas em frequência com AMS e com AMH ( $\mu = 0.1$ )

Na Tabela 3 apresentam-se as reduções para a frequência correspondente a  $\beta = 1.0$ , verifica-se que na região de ressonância a redução causada pela utilização do AMH é mais significativa, girando em torno de 48% em relação à resposta com AMS. Em seguida são comparadas as eficiências do AMH e do AMS em um gráfico, mostrado na Figura (8), que apresenta para diversos valores de  $\mu$  o valor da relação entre a resposta controlada e a sem controle,  $\frac{H_c}{H_{sc}}$ , para  $\beta = 1.0$ , e pode-se observar que o AMH é mais eficiente em todos os casos.

$\mu$	$H_{\beta=1.0}$ (AMS)	$H_{\beta=1.0}$ (AMH)	$\Delta$ (%)
0.001	$3.07 \times 10^{-7}$	$1.70 \times 10^{-7}$	44.6
0.01	$1.67 \times 10^{-7}$	$0.85 \times 10^{-7}$	49.3
0.05	$9.40 \times 10^{-8}$	$4.82 \times 10^{-8}$	48.7
0.1	$7.02 \times 10^{-8}$	$3.54 \times 10^{-8}$	49.6

Tabela 3: Redução da resposta em frequência para  $\beta = 1.0$ Figura 8: Relação entre a resposta controlada e a sem controle,  $\frac{H_c}{H_{sc}}$ , para o AMS e AMH

## 6 INFLUÊNCIA DOS PARÂMETROS DO AMH E DA ESTRUTURA

Em seguida, nas Figuras (9) a (11) são apresentadas as curvas de resposta em frequência, considerando que ao se modificar o  $\mu$ , as propriedades do AMH não fossem recalculadas, mantendo aquelas obtidas para  $\mu = 0.05$ . Verifica-se que isso compromete a eficiência do AMH, já que sua parcela passiva não se encontra mais otimizada, evidenciando o fato do AMH ser mais eficiente do que seu dispositivo ativo equivalente, o AMA.

Para um AMH com  $\mu = 0.05$  e parâmetros ótimos, verifica-se qual a influência da frequência da massa principal no comportamento do sistema controlado. A Tabela 4 apresenta o valor da amplitude da resposta permanente para  $\beta = 1.0$  com AMS e com AMH, para cada valor de frequência do sistema principal considerado, a porcentagem de redução e os respectivos ganhos otimizados,  $G_1$ . A frequência natural do sistema original é modificada mantendo-se a massa constante e alterando a rigidez. Verifica-se que estruturas com frequências mais altas exigem ganhos da força de controle mais elevados, porém as reduções em relação ao sistema de controle passivo são sempre por volta de 50% em todos os casos. Essas reduções podem ser melhor verificadas analisando-se as Figuras (12) a (16), que representam a curva de resposta em frequência para cada caso analisado.

$\omega$	$H(\beta=1.0)$ AMS	$H(\beta=1.0)$ AMH	$\Delta(\%)$	$q_{31}/R$	$G_1$
0.25	$1.25 \times 10^{-6}$	$0.64 \times 10^{-6}$	49.29 %	$4.6 \times 10^{13}$	207011.0
0.5	$3.15 \times 10^{-7}$	$1.59 \times 10^{-7}$	49.30 %	$3.7 \times 10^{14}$	832544.0
1.0	$7.89 \times 10^{-8}$	$3.94 \times 10^{-8}$	49.80 %	$3.0 \times 10^{15}$	3375180.0
2.0	$1.96 \times 10^{-8}$	$0.98 \times 10^{-8}$	49.79 %	$2.4 \times 10^{16}$	13500700.0
3.0	$8.72 \times 10^{-9}$	$4.36 \times 10^{-9}$	50.00 %	$8.1 \times 10^{16}$	30373600.0

Tabela 4: Valor da amplitude da resposta permanente para  $\beta=1.0$  com AMS e com AMH para cada valor de frequência

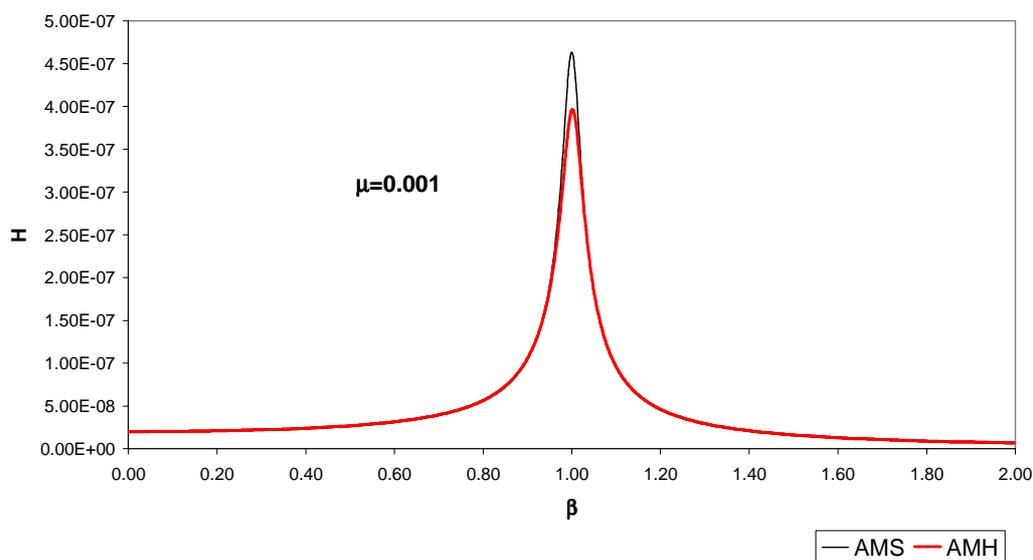


Figura 9: Respostas em frequência com AMH e AMS não otimizado ( $\mu = 0.001$ )

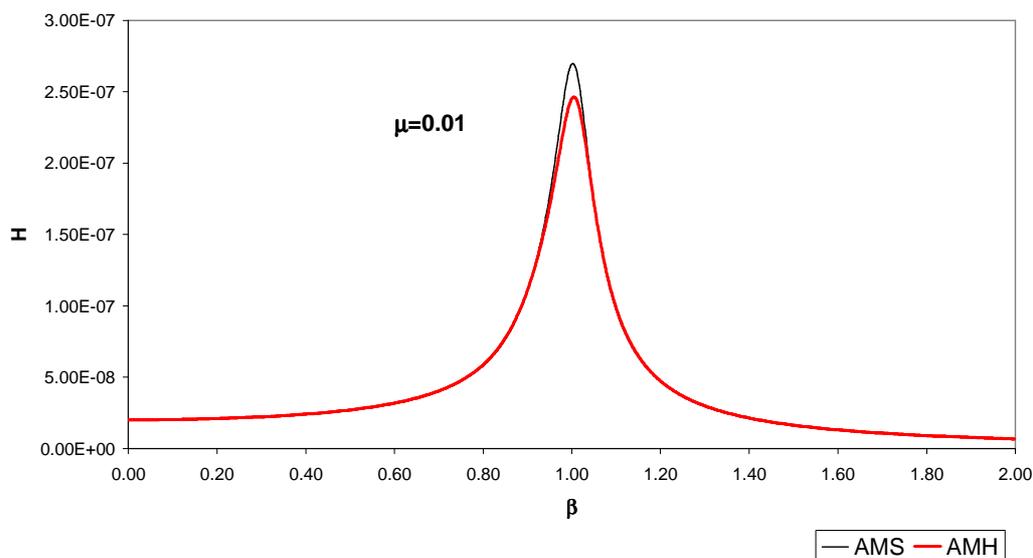


Figura 10: Respostas em frequência com AMH e AMS não otimizado ( $\mu = 0.01$ )

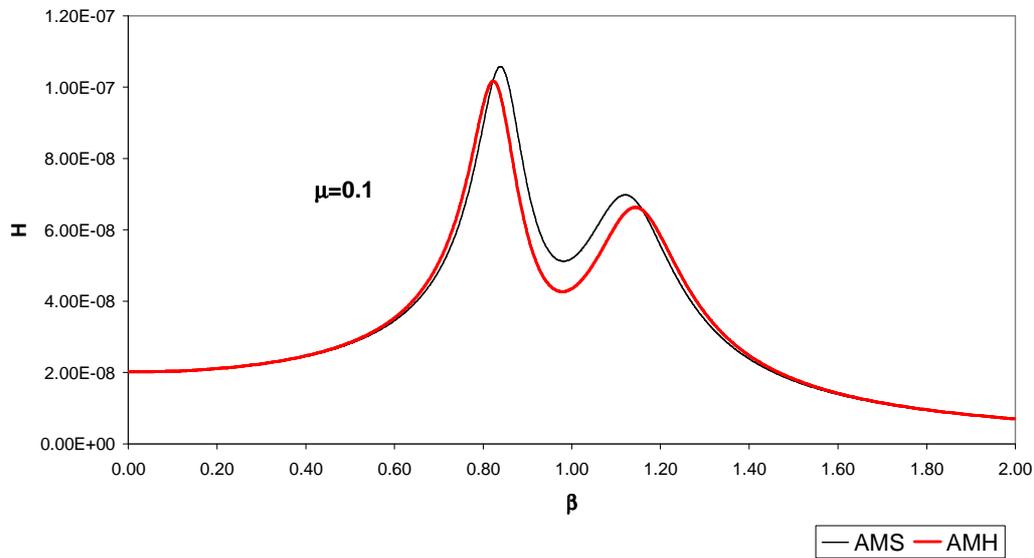


Figura 11: Respostas em frequência com AMH e AMS não otimizado ( $\mu = 0.1$ )

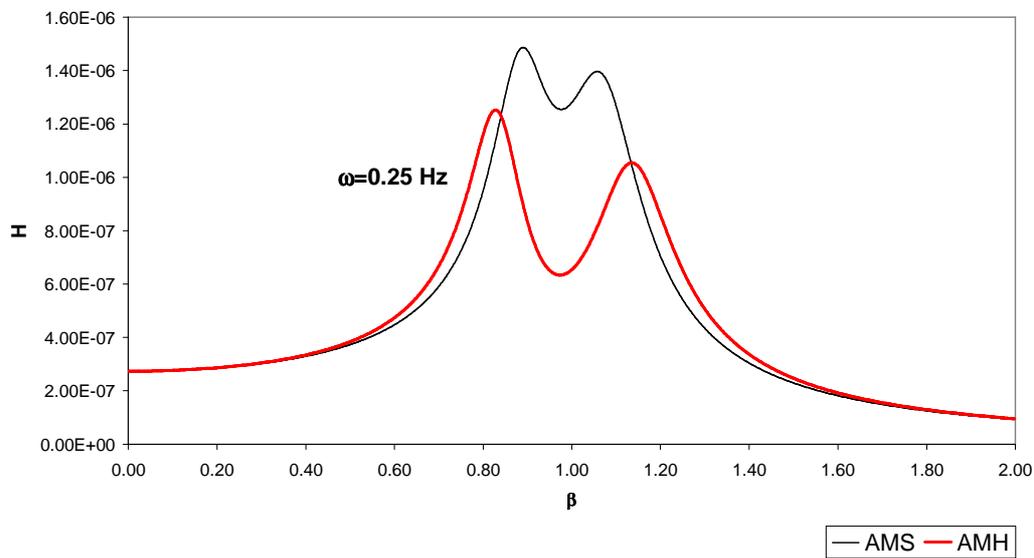
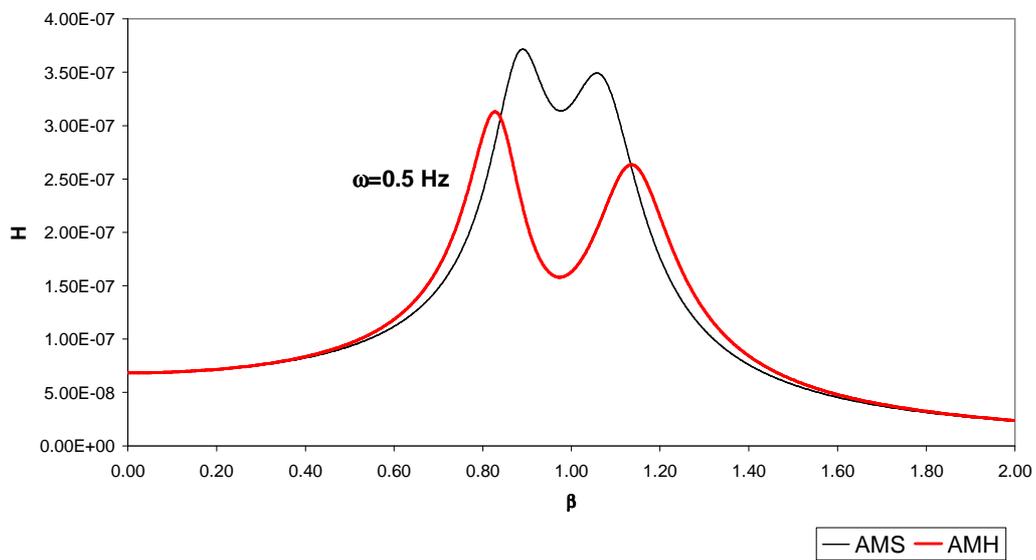
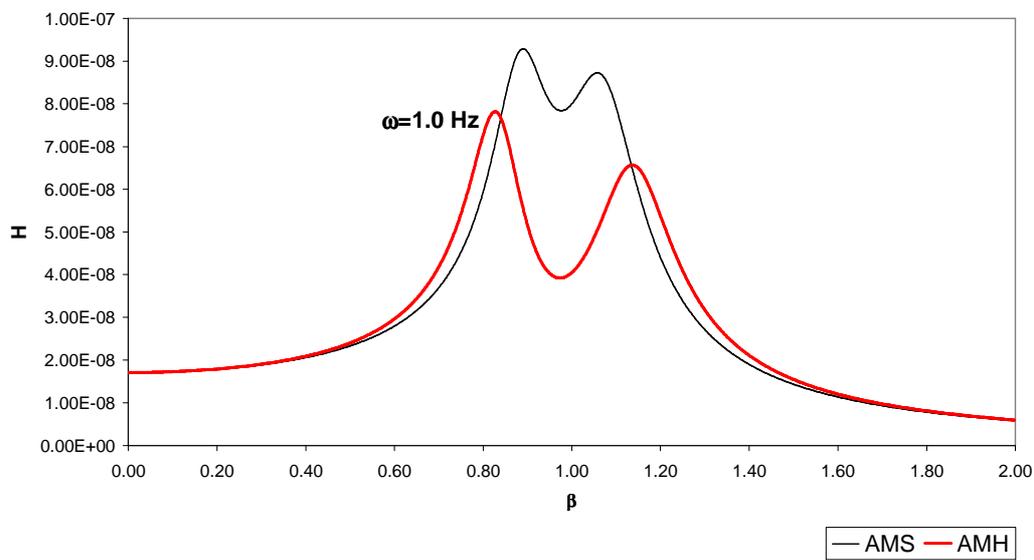


Figura 12: Respostas em frequência com AMH e com AMS ( $\omega = 0.25$  Hz)

Figura 13: Respostas em frequência com AMH e com AMS ( $\omega = 0.5$  Hz)Figura 14: Respostas em frequência com AMH e com AMS ( $\omega = 1.0$  Hz)

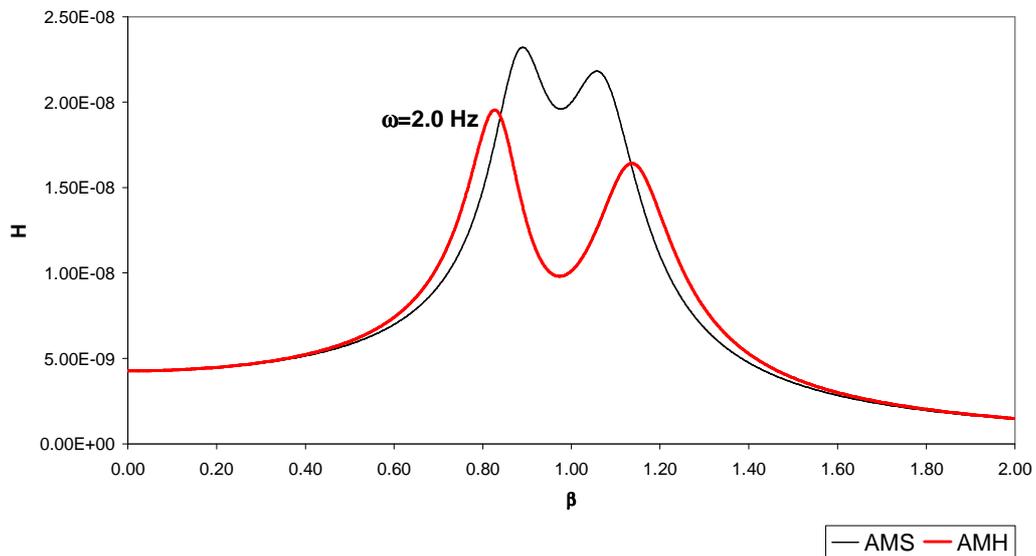


Figura 15: Respostas em frequência com AMH e com AMS ( $\omega = 2.0$  Hz)

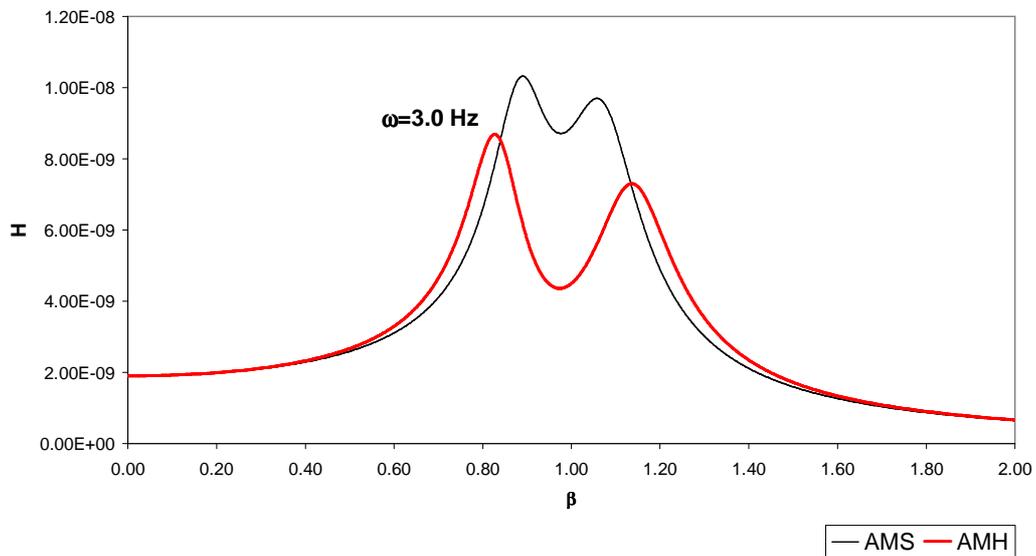


Figura 16: Respostas em frequência com AMH e com AMS ( $\omega = 3.0$  Hz)

A Figura (17) apresenta a variação da relação  $Q_{31}/K$  ( $Q_{31} = q_{31}/R$ ), onde  $K$  é a rigidez do sistema principal, em função da frequência natural  $\omega$ . Pode-se observar que existe uma relação linear entre essas duas variáveis.

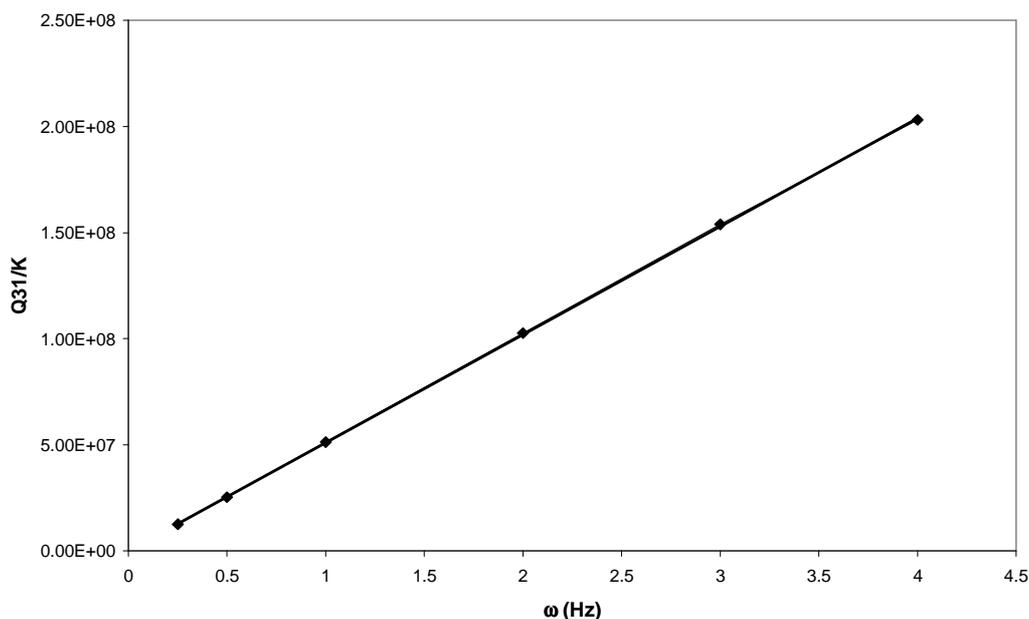


Figura 17: Variação de  $Q_{31}/K$  com a frequência natural

Com o objetivo de propor uma expressão do ganho ótimo  $G_1$  para qualquer edifício reduzido a um grau de liberdade pela análise modal, estudou-se a seguir a variação da relação  $Q_{31}/K$  com a massa do sistema principal reduzido,  $M$ . Fixando-se, por exemplo, os parâmetros  $\mu = 0.05$ ;  $\xi = 0.02$ ;  $\omega = 1.0\text{Hz}$ , pode-se perceber que esta relação é aproximadamente linear, conforme mostra a Figura (18).

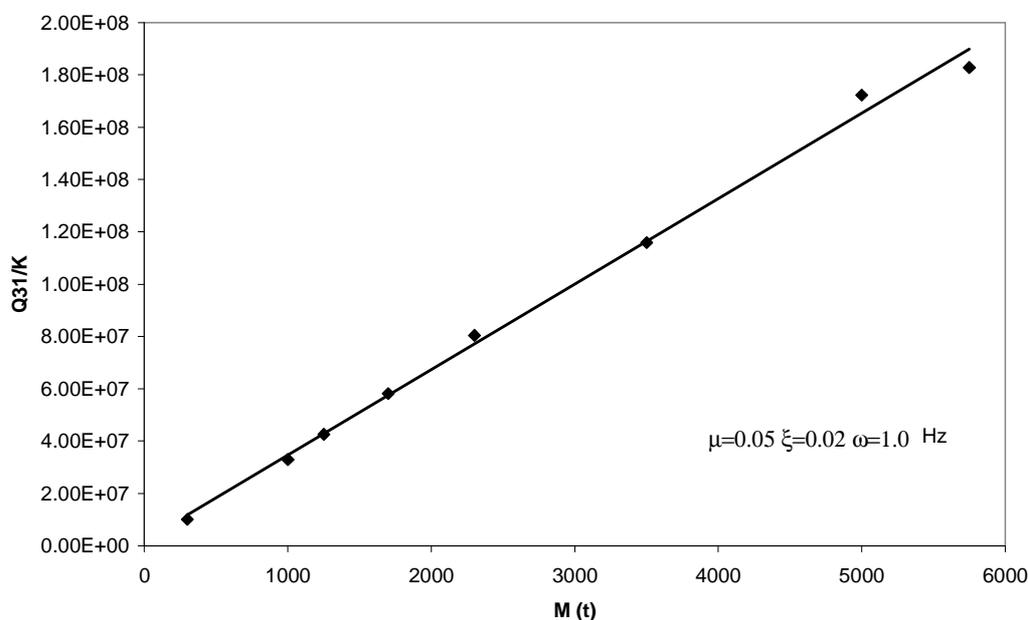


Figura 18: Variação do parâmetro ótimo  $Q_{31}/K$  em função da massa do sistema principal  $M$

Finalmente resta observar qual a influência da relação entre as massas  $\mu$  e da taxa de amortecimento do sistema principal, já que rigidez e amortecimento do AMH são função de  $\mu$  de acordo com as expressões de Den Hartog. A Figura (19) apresenta a variação da relação  $Q_{31}/K$  para uma massa  $m = 1000\text{t}$  e  $\omega = 1\text{Hz}$  para valores de  $\xi = 0.02, 0.05$  e  $0.10$ . Verifica-se

que a relação  $Q_{31}/K$  ótima aumenta a medida que  $\mu$  cresce de uma maneira não-linear. Isto porque a força de controle exigida para AMHs com massas maiores tem maior intensidade. Pode-se perceber ainda que o valor da taxa de amortecimento do sistema também afeta, embora em menor escala, a relação  $Q_{31}/K$  ótima.

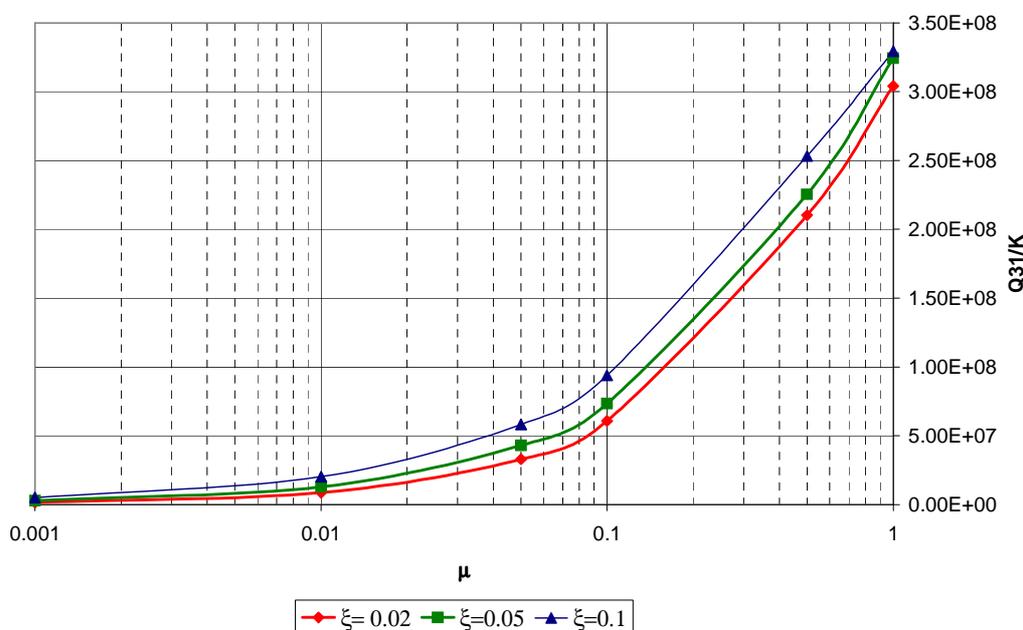


Figura 19: Variação de  $Q_{31}/K$  em relação a  $\mu$  para diferentes valores de  $\xi$

## 7 FORÇA DE CONTROLE OTIMIZADA

Com base no estudo paramétrico realizado neste capítulo, pode-se propor um ganho ótimo para o sistema controlado. Fixados os valores do parâmetro  $\mu$  do AMH, a taxa de amortecimento do sistema principal e  $q_{41}/R = 10^3$ , inicialmente consultam-se as Tabelas 5 e 6, que apresentam os valores de  $Q_{31}/K$  correspondentes a uma massa do sistema principal  $M$  igual a 1000t e frequência natural do sistema de 1Hz, de acordo com os valores de  $\mu$  e  $\xi$  adotados. Em seguida de acordo com a equação (37) multiplica-se esse valor pela massa do sistema principal analisado em Kg e pelo valor da frequência natural do sistema em Hz, obtendo-se assim o  $Q_{31}/K$  ótimo para a estrutura em questão

$$\frac{Q_{31}}{K} \text{ ótimo} = \frac{Q_{31}}{K} (M=1000t; \omega=1Hz) \times M_{(Kg)} \omega_{(Hz)} \quad (38)$$

$\mu$	$Q_{31}/K$
0.001	$0.1519820 \times 10^7$
0.01	$0.8612315 \times 10^7$
0.05	$3.2929441 \times 10^7$
0.1	$6.0792814 \times 10^7$
0.5	$2.1024182 \times 10^8$

Tabela 5: Valores de  $Q_{31}/K$  ( $M = 1000t$  e  $\omega = 1.0Hz$ ) para  $\xi = 0.02$

$\mu$	$Q_{31}/K$
0.001	$0.2786337 \times 10^7$
0.01	$1.2918473 \times 10^7$
0.05	$4.3061576 \times 10^7$
0.1	$7.3457983 \times 10^7$
0.5	$2.2544001 \times 10^8$

Tabela 6: Valores de  $Q_{31}/K$  ( $M = 1000t$  e  $\omega = 1.0\text{Hz}$ ) para  $\xi = 0.05$ 

Desta maneira o cálculo da força de controle ótima é feito através da expressão (39), lembrando-se que inicialmente é calculado  $q_{31}/R$  ( $Q_{31} = q_{31}/R$ ) a partir de  $Q_{31}/K$ , sabendo-se que  $K$  é a rigidez do sistema principal

$$u_{\text{ótimo}} = \frac{\Delta t}{2} \left( -\frac{q_{31}}{R} \frac{1}{\text{ótimo}} x \frac{1}{M} + \frac{q_{41}}{R} \frac{1}{m} \right) z_1 \quad (39)$$

## 8 CONCLUSÃO

Vale ressaltar a importância da escolha de coeficientes de ponderação adequados na eficiência deste tipo de controle, uma escolha equivocada pode fazer com que a não-linearidade da força acarrete uma perda de periodicidade da resposta da estrutura, além de sua amplificação. A partir dos resultados obtidos evidenciou-se a necessidade de um estudo paramétrico detalhado das matrizes de ponderação dos algoritmos de controle ótimo, para que se possa escolher uma lei de controle que leve às reduções desejadas no projeto sem que para isso sejam necessárias forças de elevada magnitude que aumentem o custo ou inviabilizem o sistema. Sendo assim, apresentou-se neste trabalho uma sugestão para cálculo destas matrizes, que conduzem a uma expressão da força de controle ótima, para estruturas submetidas à excitações harmônicas equipadas com AMH.

## 9 REFERÊNCIAS

- Ankireddi, S., Yang, T.Y., Simple ATMD control methodology for tall buildings subject to wind loads, *Journal of Structural Engineering ASCE*. 122:83-91, 1996.
- Avila, S.M., *Controle Híbrido para Atenuação de Vibrações em Edifícios*. Tese de Doutorado, Rio de Janeiro: Departamento de Engenharia Civil PUC-Rio, 2002.
- Cao, H., Reinhorn, A.M.; Soong, T.T., Design of an active mass damper for a tall TV tower in Najing, China, *Engineering Structures*. 20:134-143, 1998.
- Chang C. C., Yang H.T.Y., Control of buildings using active tuned mass dampers, *Journal of Engineering Mechanics ASCE*. 121:355-366, 1995.
- Fujino, Y., Soong, T.T., Spencer JR., B.F. Structural control: basic concepts and applications, *Proceedings of ASCE Structures Congress*. Chicago, 1996.
- Holmes, J.D., Listing of installations, *Engineering Structures*. 17:676-678, 1995.
- Junkins, J.L., Kim, Y. *Introduction to dynamics and control of flexible structures*. Washington DC: American Institute of Aeronautics and Astronautics (AIAA), 1993.
- Kwok, K.C.S., Samali, B., Performance of tuned mass dampers under wind loads, *Engineering Structures*. 17:655-667, 1995.

- Loh, C.H.; Chao, C.H., Effectiveness of active tuned mass damper and seismic isolation on vibration control of multi-storey building, *Journal of Sound and Vibration*, 193:773-792, 1996.
- Mackrikel, L.E.; Kwok, K.C.S.; Samali, B. Critical mode control of a wind-loaded tall building using an active tuned mass damper, *Engineering Structures*, 19:834-842, 1997.
- Meirovitch, L. *Dynamics and control of structures*, New York: John Wiley & Sons, 1990.
- Soong, T.T. *Active structural control, theory & practice*, New York: John Wiley & Sons, 1990.
- Soong, T.T; Masri, S.F.; Housner, G.W. An overview of active structural control under seismic loads, *Earthquake Spectra*, 7:483-505, 1991.
- Soong, T.T; Dargush, G.F. *Passive energy dissipation systems in structural engineering*, Chichester: John Wiley & Sons, 1997.
- Spencer JR., B.F.; Sain, M.K., Controlling buildings: a new frontier in feedback, *Special Issue of the IEEE Control Systems Magazine on Emerging Technology*, 17:19-35, 1997.
- Spencer JR., B.F.; Soong, T.T. New applications and development of active, semi-active and hybrid control techniques for seismic and non-seismic vibration in the USA, *Proceedings of International post-smirt conference seminar nos seismic isolation, passive energy dissipation and active control of vibration of structures*, Cheju, Korea, 1999.
- Tzan, S.; Pantelides, C.P. Hybrid structural control using viscoelastic dampers and active control systems, *Earthquake Engineering. and Structural Dynamics*, 23:1369-1388, 1994.
- Yan, N.; Wang, C.M.; Balendra, T. Optimal damper characteristics of ATMD for buildings under wind loads, *Journal of Structural Engineering*, 125:1376-1383, 1999.
- Yang, J.N.; Akbarpour, A.; Ghaemmaghami, P. New optimal control algorithms for structural control, *Journal of Engineering Mechanics ASCE*, 113:1369-1386, 1987.
- Xu, Y.L. Parametric study of active mass dampers for wind-excited tall buildings, *Engineering Structures*, 18:64-76, 1996.