

## COMBINAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS E DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO PARA ANÁLISE NÃO LINEAR GEOMÉTRICA DE PÓRTICOS PLANOS ACOPLADOS A MEIOS CONTÍNUOS HETEROGÊNEOS

Wagner Q. Silva <sup>a</sup>, Humberto B. Coda <sup>b</sup>

<sup>a</sup> *Doutorando na Universidade de São Paulo, Av. Trabalhador São-carlense, 400, Campus Universitário, São Carlos - SP, Brasil, wagner1@sc.usp.br*

<sup>b</sup> *Professor da Universidade de São Paulo, Av. Trabalhador São-carlense, 400, Campus Universitário, São Carlos - SP, Brasil, hbcoda@sc.usp.br*

**Palavras chave:** Acoplamento MEC/MEF, não linearidade geométrica, interação solo-estrutura.

**Resumo:** A combinação entre diferentes métodos numéricos é uma alternativa interessante para a análise de problemas que envolvem diferentes meios. Neste trabalho apresenta-se o desenvolvimento de um programa computacional para análise não linear geométrica (NLG) de pórticos planos acoplados a meios contínuos heterogêneos. Adota-se o Método dos Elementos de Contorno (MEC) combinado com o Método dos Elementos Finitos (MEF). Considera-se um comportamento elástico linear para o meio contínuo, modelado via MEC, adotando-se uma estratégia algébrica alternativa à clássica técnica de sub-região que permite melhor eficiência na consideração de múltiplas inclusões com diferentes rigidezes. Adotam-se também elementos de linha de carga internos aos domínios e em qualquer direção, inclusive ultrapassando diferentes materiais. As singularidades presentes nas equações integrais são tratadas por meio de uma técnica de subtração de singularidade. Para a modelagem da estrutura de pórtico foi utilizado o software AcadFrame. Este software foi desenvolvido na Universidade de São Paulo, e é baseado em uma formulação posicional do MEF para análise NLG com cinemática exata. O sistema não linear é resolvido de forma iterativa pelo método de Newton-Raphson. Em ambos os programas foi realizada uma generalização do grau dos elementos discretos aplicando os polinômios de Lagrange na determinação das funções de forma de cada elemento. Assim é possível a utilização de elementos curvos de alta ordem. O acoplamento numérico foi realizado através de uma estratégia algébrica, onde a matriz de rigidez e o vetor de forças de contato do meio contínuo são condensados e somados, respectivamente à matriz da estrutura e ao vetor de forças internas a cada iteração no processo de Newton-Raphson. Os resultados obtidos se mostraram satisfatórios e apresentam boa precisão, quando comparados com soluções analíticas e outros programas comerciais. O programa pode ser aplicado à análise de edifícios apoiados sobre solos com múltiplas inclusões. É possível considerar elementos superficialmente ligados ao meio contínuo (sapatas) ou elementos internos e em qualquer direção, como estacas verticais ou inclinadas.

## 1 INTRODUÇÃO

A análise de sistemas estruturais complexos é geralmente realizada isolando-se cada meio envolvido no problema para facilitar o processo de análise. Estruturas de edificações, por exemplo, são usualmente analisadas em separado do solo de fundação em razão da complexidade de se modelar o sistema solo-estrutura. Para edifícios de pequena e média altura, este tipo de análise pode não ser necessário, a depender do nível de carga e do tipo de solo. No entanto, em edificações de maior porte ou em caso de solos complexos é interessante a avaliação de todo o conjunto acoplado para que possam ser observadas as reais interferências que um meio tem em relação ao comportamento mecânico do outro. De fato, em diversos problemas de interação solo-estrutura a análise dos fenômenos de interação é essencial para que se obtenham os reais esforços nos elementos estruturais e se realize um dimensionamento mais seguro e econômico.

Surge então a necessidade de ferramentas computacionais que permitam esse tipo de análise. Porém, é necessário simular adequadamente o comportamento de cada meio considerando suas diferentes características e a transmissão de esforços entre seus elementos a fim de se verificar as reais influências que um tem em relação ao outro. O acoplamento entre diferentes métodos numéricos é uma solução interessante para esse tipo de problema, fazendo uso das vantagens de cada método onde o mesmo melhor se aplica (Leite, 2007).

O objetivo deste trabalho é realizar um estudo de sistemas estruturais formados por pórticos planos acoplados a meios contínuos heterogêneos bi-dimensionais através do desenvolvimento de um programa computacional. O meio contínuo é modelado via Método dos Elementos de Contorno (MEC), enquanto que a estrutura de pórtico é modelada via Método dos Elementos Finitos (MEF).

Primeiramente foi desenvolvido o código via MEC para análise elástica do meio contínuo. Sabe-se que o solo pode ser formado por mais de um material em camadas ou ainda na forma de inclusões, como na presença de detritos de rochas ou concentrações de solos, sem necessariamente formar camadas. É necessária assim uma formulação que permita a generalização para a modelagem numérica desse tipo de problema, o que neste trabalho é resolvido adotando-se a mesma metodologia apresentada em Silva (2009), que permite a avaliação de solos com múltiplas inclusões e linhas de carga em quaisquer direções. O método consiste em eliminar os termos relativos às forças de interface no MEC, restando apenas deslocamentos incógnitos. Isso se dá com a montagem das matrizes  $\mathbf{H}$  e  $\mathbf{G}$  de cada inclusão utilizando-se todos os pontos fonte do problema, corrigindo-as pela razão entre os módulos de elasticidade transversal  $G$  de cada sub-região.

Para a estrutura de pórtico acoplada adota-se o Método dos Elementos Finitos, por ser mais adequado à análise de meios reticulados. Utiliza-se o software AcadFrame, que adota a formulação posicional apresentada por Coda (2003) no qual os graus de liberdade do problema passam a ser as posições nodais da estrutura. Considera-se a estrutura com comportamento não linear geométrico através de uma formulação cinematicamente exata. Essa consideração, por sua vez, é de extrema importância, principalmente para edificações de grandes alturas e estruturas esbeltas em geral, onde os efeitos da não linearidade são mais significativos.

O acoplamento é realizado somando-se uma matriz de rigidez do solo, condensada nos nós acoplados, à matriz hessiana da estrutura reticulada em cada iteração da análise não linear. Soma-se também ao vetor de forças internas do MEF as forças de contato advindas do MEC. Dessa maneira, a estratégia pode ser comparada à imposição de condições de vínculo do solo sobre a edificação, porém considerando as configurações físicas, geométricas e de carregamento do solo.

## 2 MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

O método dos elementos de contorno pode ser aplicado como solução numérica em análise de meios contínuos que tendem para o infinito, como no caso da análise de solos em interação solo-estrutura. Esse tipo de problema de engenharia envolve uma série de fatores que tornam a análise complexa, despertando o interesse de diversos pesquisadores no assunto. Podem ocorrer diversos casos diferenciados entre solos homogêneos e heterogêneos, estratificados ou não, solos com presença de rochas, inclusões diversas ou escavações, etc. Dessa forma, torna-se valiosa a busca por um processo de análise que seja generalizado e permita o estudo dos mais diferentes tipos de problemas envolvendo meios contínuos com mais de um material.

A idéia básica do método consiste em se determinar a equação de equilíbrio integral a partir da equação diferencial de equilíbrio de forças de um meio contínuo qualquer. Essa equação é então transformada em um sistema algébrico, fazendo-se a discretização no contorno do meio sólido através de elementos de contorno, ligados por sua vez nos nós do contorno. Utilizando-se de pontos fonte, faz-se uma integração numérica de todos os elementos, montando assim um sistema de matrizes **H** e **G**.

Na solução via MEC, porém, a equação integral a ser resolvida pode vir a apresentar singularidade matemática do tipo  $1/r$ , aonde  $r$  é a distância entre o ponto fonte e o ponto de integração. Para esse tipo de problema deve ser aplicada uma técnica de subtração da singularidade tornando possível a integração numérica dos elementos singulares, sem prejuízo do método numérico.

A integral singular da matriz **H** pode ser evitada com o uso do princípio de movimento de corpo rígido. As somas dos termos pares e dos termos ímpares da matriz devem ser nulas para domínios finitos e iguais à unidade para domínios infinitos. Logo ao somar os termos fora da diagonal principal, é possível obter o valor do termo livre da equação.

A matriz **G** por sua vez necessita da técnica de subtração para os termos da diagonal. Para tanto, escreve-se uma expansão em série de Taylor sobre o ponto fonte singular em coordenadas adimensionais imaginando um elemento reto fictício com origem no ponto fonte. Apenas o primeiro termo da série deve ser subtraído do núcleo singular, sobrando assim uma integral regular que deve ser resolvida numericamente e outra integral que deve ser resolvida analiticamente.

Maiores detalhes sobre a técnica de subtração de singularidade para o elemento curvo podem ser encontradas em Coda (2000) e Kzam (2009).

### 2.1 O Elemento Curvo

A discretização da superfície através do MEC é na verdade uma aproximação de sua geometria por meio de funções matemáticas onde apenas alguns pontos possuem coordenadas cartesianas conhecidas. A partir destes pontos denominados nós do contorno, podem ser considerados os elementos que terão suas funções incógnitas (deslocamentos e forças) aproximadas também por uma função matemática com valores nodais. Esse é o princípio básico da discretização via MEC.

Diversos autores já publicaram trabalhos em que são utilizados elementos constantes e lineares para a discretização do contorno. O uso de elementos de maior ordem costuma ser evitado pelas dificuldades em se desenvolver as equações integrais analíticas para que se obtenha a solução do problema. No entanto, a implementação computacional para elementos de alta ordem se torna mais fácil de ser elaborada com o uso dos polinômios de Lagrange e de métodos de integração numérica, como o método de Gauss, por meio do uso de elemento isoparamétrico.

De fato, a escolha do tipo de função aproximadora pode ter grande influência na convergência dos resultados obtidos, a depender do tipo de problema que se está analisando. Elementos com aproximação quadrática, cúbica ou de maior ordem são preferíveis para descrever, por exemplo, geometrias curvas e funções de alta ordem. O uso de elementos lineares ou constantes exige uma maior discretização das superfícies curvilíneas para que se possa aproximá-las corretamente, como se fossem formadas por diversos trechos lineares. A Figura 1 ilustra essa situação.

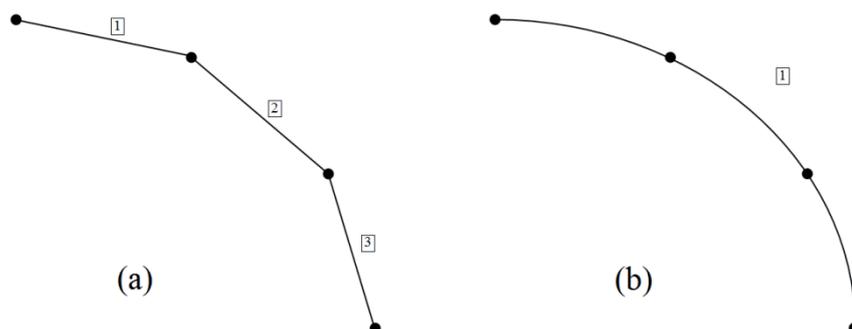


Figura 1: Diferentes discretizações do contorno utilizando (a) 3 elementos retos e (b) 1 elemento curvo

Neste trabalho, foi implementado o elemento de contorno curvo com aproximação qualquer da geometria e das variáveis para análise do solo via MEC, baseado no trabalho de Kzam (2009). Para isso, utilizam-se os polinômios de Lagrange na determinação das funções de forma do elemento. É importante comentar ainda que o software AcadFrame, utilizado na modelagem da estrutura de pórtico, também utiliza estes polinômios, dispondo de elementos finitos curvos com qualquer ordem de aproximação.

### 2.1.1 Polinômios de Lagrange

Para um elemento  $j$  de ordem qualquer existem  $n$  funções de forma, cada uma relativa a determinado nó do elemento, cuja aproximação é dada pelos valores assumidos pelas funções em cada nó. Assim, a função de forma  $\phi_n$  terá valor unitário em  $n$  e nulo nos demais nós do elemento. Cada equação das funções de forma do elemento de  $n$  nós será, portanto um polinômio de grau  $n-1$ . As funções de forma podem ser de qualquer tipo, desde que respeitem estas condições.

Podemos escrever todas as  $k$  funções de forma de um elemento com ordem qualquer através dos polinômios de Lagrange, dado pelo produtório que segue:

$$\phi_k = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n \left( \frac{\xi - \xi_i}{\xi_k - \xi_i} \right) \quad (1)$$

As coordenadas  $\xi$  assumem valores entre  $-1$  e  $+1$  no espaço adimensional. Basta então definir a ordem desejada para a aproximação de geometria e de variáveis e calcular as coordenadas adimensionais de cada nó, através da mudança do sistema de coordenadas geométrico para o sistema adimensional. Com os valores de  $\xi_n$ , é possível determinar em seguida todas as funções de forma do elemento. Com as funções de forma definidas, pode-se calcular qualquer ponto sobre o elemento desde que conhecida sua coordenada  $\xi$ .

Após esse procedimento, é possível realizar a integração numérica dos elementos através dos pontos e pesos de Gauss distribuídos ao longo do elemento isoparamétrico. Estes valores podem ser obtidos com o uso de uma rotina IMSL (Fortran), dando como entrada apenas o número de pontos de integração desejado. Logo, torna-se simples a implementação de elementos de contorno curvos, com qualquer número de nós (ver Figura 2).

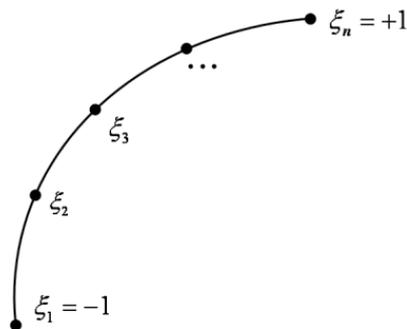


Figura 2 – Elemento curvo com coordenadas adimensionais

## 2.2 Problemas Heterogêneos via MEC

Os meios heterogêneos podem se apresentar de duas maneiras distintas: na forma de camadas e zonas, ou como inclusões. No primeiro caso, os diferentes domínios possuem apenas uma parte de suas fronteiras em comum, sendo as demais superfícies independentes. Logo, o contorno externo do corpo é formado por faces de materiais distintos. Já no caso das inclusões, um domínio encontra-se totalmente contido dentro do outro, tendo sua superfície de fronteira inteiramente comum aos dois domínios. A Figura 3 demonstra os dois casos para problemas bidimensionais.

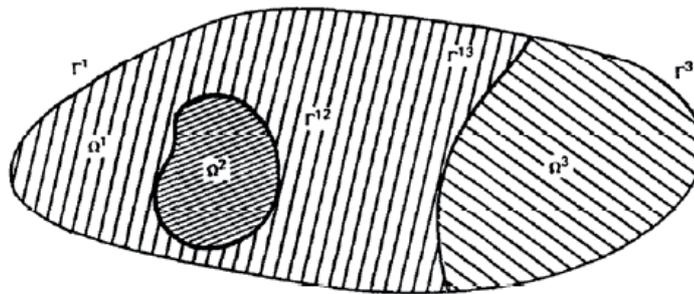


Figura 3 – Meios heterogêneos

Os dois tipos de situação são bastante comuns em problemas de engenharia. Podemos citar exemplos de problemas geotécnicos, onde há uma enorme variedade de tipos de solos estratificados que podem também apresentar algum tipo de material imerso em seus meios. Diferentes tipos de solos em camadas sobrepostas, por exemplo, constituem um problema específico. Muitos trabalhos já desenvolvidos na área geotécnica tratam o solo como sendo constituído por camadas de diferentes propriedades (Ribeiro, 2009). Estes solos podem apresentar ainda heterogeneidade na forma de inclusões. É o caso da presença de material rochoso imerso em uma camada de solo, ou mesmo concentração de determinado material, sem necessariamente formar camadas.

Percebe-se, portanto, a importância de um método generalizado para análise de meios heterogêneos, face à enorme diversidade de problemas desse tipo.

A formulação clássica do método dos elementos de contorno foi desenvolvida a partir do estudo de domínios considerados homogêneos, ou seja, constituídos por apenas um material cujas características físicas são únicas ao longo de todo o corpo. Existe, contudo, uma formulação já consagrada para resolver problemas heterogêneos. É a chamada técnica da sub-região, descrita em Brebbia e Dominguez (1992). A técnica prevê o estudo em separado de cada sub-região para em seguida ser utilizada as condições de equilíbrio e compatibilidade geométrica (ou cinemática) na interface.

Tomemos como exemplo um problema envolvendo dois domínios de características físicas diferentes, em contato por uma interface comum às duas sub-regiões (Figura 4).

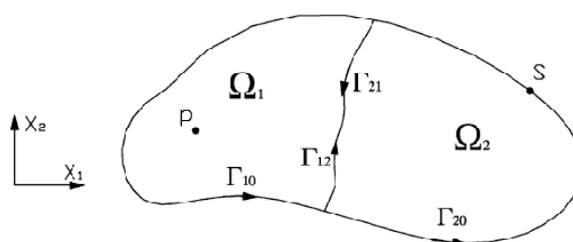


Figura 4 – Domínio plano constituído por duas sub-regiões  $\Omega_1$  e  $\Omega_2$ .

Montam-se os sistemas de equações de cada domínio  $\Omega$  considerando-os como problemas isolados. Em seguida, aplicam-se as condições de compatibilidade de deslocamentos  $u$  e equilíbrio de forças  $p$  na superfície  $c$  de contato entre os domínios, dadas pelas expressões:

$$\{u_c^1\} = \{u_c^2\} = \{u_c\} \quad (2)$$

$$\{p_c^1\} = -\{p_c^2\} = \{p_c\} \quad (3)$$

Com isso, é possível escrever um único sistema que representa todo o domínio em questão, incluindo as incógnitas de deslocamento e força na superfície de contato.

Apesar de ser utilizada desde 1975 com sucesso, a técnica clássica da sub-região aumenta o número de incógnitas à medida que considera todos os valores de deslocamento e de força de superfície na interface de contato. Além disso, quanto maior for o número de sub-regiões envolvidas no problema, e quanto mais diferenciada for a distribuição de cada material no meio, mais complexa será a aplicação da técnica, o que torna difícil sua implementação computacional generalizada.

Nesse sentido, torna-se útil a adoção de técnicas que permitam uma maior facilidade para a generalização e para a implementação de códigos computacionais, possibilitando a simulação do comportamento de meios heterogêneos complexos via MEC.

### 2.2.1 Técnica alternativa de Venturini para sub-regiões

Este processo alternativo à técnica clássica de sub-região foi inicialmente motivado por problemas em análise não-linear de estruturas, em que o aumento do número de linhas de interface a ser discretizado ou o aumento do tamanho do sistema algébrico a ser resolvido causava a deterioração dos resultados (Venturini, 1992).

Venturini propôs então, para o estudo de problemas heterogêneos via método dos elementos de contorno, que o equilíbrio de forças e a compatibilização de deslocamentos nas interfaces comuns fossem realizados antes da montagem das equações. Dessa forma, eliminam-se as aproximações de força de superfície no contato, e torna-se possível escrever equações para o domínio heterogêneo como um todo, evitando assim a separação física do problema.

Para o entendimento da técnica, considere o mesmo problema da Figura 4 onde podem ser escritas duas equações integrais, uma para cada domínio, na seguinte forma

$$c_{ij}^1 u_j^1 = - \int_{\Gamma_{10}} u_j^1 p_{ij}^{*1} d\Gamma - \int_{\Gamma_{12}} u_j^1 p_{ij}^{*1} d\Gamma + \int_{\Gamma_{10}} p_j^1 u_{ij}^{*1} d\Gamma + \int_{\Gamma_{12}} p_j^1 u_{ij}^{*1} d\Gamma \quad (4)$$

$$c_{ij}^2 u_j^2 = - \int_{\Gamma_{20}} u_j^2 p_{ij}^{*2} d\Gamma - \int_{\Gamma_{21}} u_j^2 p_{ij}^{*2} d\Gamma + \int_{\Gamma_{20}} p_j^2 u_{ij}^{*2} d\Gamma + \int_{\Gamma_{21}} p_j^2 u_{ij}^{*2} d\Gamma \quad (5)$$

sendo  $u^*$  e  $p^*$  as soluções fundamentais respectivamente em deslocamento e força, e os índices 1 e 2 relativos a cada sub-região  $\Omega$ .

Admitindo que o valor do coeficiente de Poisson seja o mesmo para todos os materiais envolvidos na análise, nota-se que o termo constante da solução fundamental de *Kelvin* em força  $p^*$  será o mesmo para todos os domínios, pois este não depende do módulo de elasticidade transversal  $G$ . No caso da solução fundamental em deslocamento  $u^*$ , já o termo constante apresenta diferença quando escrito para cada sub-região, pois este sim depende do módulo  $G$  de cada material.

Se multiplicarmos a equação integral da sub-região  $k$  pela relação entre o módulo  $G_k$  e o módulo  $G_l$ , sendo o índice  $l$  referente à sub-região dita padrão, e lembrando das relações de compatibilidade e equilíbrio (equações 2 e 3), torna-se possível relacionar as equações escritas para cada domínio de maneira a escrever uma em função da outra. A relação entre a solução fundamental de cada domínio pode ser expressa por

$$u_{ij}^{*1} = \frac{G_2}{G_1} u_{ij}^{*2} \quad (6)$$

Assim, considera-se a superposição de efeitos de tal forma a obter um único sistema de equações válido para todo o corpo em estudo. De forma genérica, a equação resultante para  $ns$  domínios fica na forma

$$c_{ij}^k u_j^k = - \sum_{m=1}^{ns} \frac{G_m}{G_k} \int_{\Gamma_m} u_j^m p_{ij}^{*m} d\Gamma + \int_{\Gamma} p_j u_{ij}^* d\Gamma \quad (7)$$

onde  $\Gamma$  é o contorno externo formado por  $\Gamma_{10} + \Gamma_{20}$  no caso da Figura 4.

Para o procedimento algébrico de montagem do sistema de equações, define-se primeiramente o domínio dito padrão cujo módulo de elasticidade transversal será  $G_l$ . Para cada sub-região é então montado um sistema de equações utilizando-se todos os pontos fonte do problema. Estas matrizes são multiplicadas pela relação entre o módulo de elasticidade transversal da sub-região correspondente e o módulo padrão e então superpostas para formar o sistema de equações de todo o domínio em estudo.

O termo livre  $c_{ij}^k$  pode ser calculado utilizando o princípio do movimento de corpo rígido somando na linha da matriz  $\mathbf{H}$  os termos das colunas pares e ímpares.

Observando novamente a solução fundamental de *Kelvin* para problemas elásticos bidimensionais fica fácil perceber que os termos da matriz  $\mathbf{G}$  relativos aos nós da interface entre sub-regiões se anulam pelo equilíbrio de forças sendo, portanto retirado do sistema as incógnitas de força de superfície. Os termos da matriz  $\mathbf{H}$  referentes aos nós da interface são corrigidos de maneira que se introduz no sistema de equações de compatibilidade.

Caso se deseje aplicar forças de superfície nas interfaces dos corpos, basta que os trechos da matriz  $\mathbf{G}$  correspondentes sejam previamente armazenados na memória para serem, neste caso, reativados.

Para ilustrar o método citado, considere o problema de um domínio constituído por três sub-regiões com diferentes módulos de elasticidade e mesmo coeficiente de Poisson. Cada sub-região  $i$  é fechada por um contorno  $\Gamma_i$ . Para o melhor entendimento, o problema será dividido conforme a Figura 5.

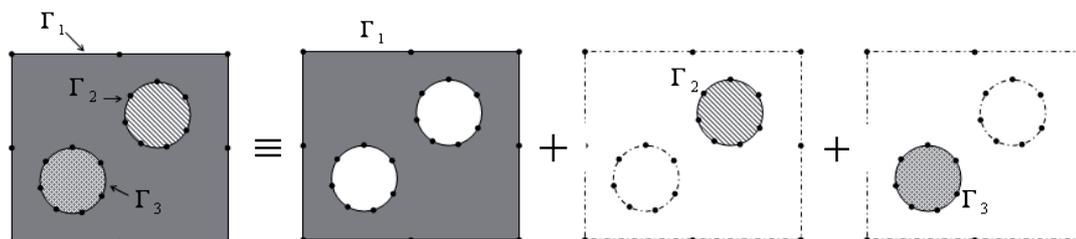


Figura 5 – Exemplo ilustrativo constituído por três sub-regiões.

Ao montar as matrizes  $\mathbf{H}$  e  $\mathbf{G}$  de cada sub-região em separado, devem ser utilizados todos os pontos fontes do problema original, fazendo com que as matrizes das sub-regiões 2 e 3 possuam maior número de linhas do que de colunas. Os sistemas ficam então escritos da seguinte forma, respectivamente para os domínios 1, 2 e 3

$$\begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{13} \\ H_{21} & H_{22} & H_{23} \\ H_{31} & H_{32} & H_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix}^1 = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{Bmatrix} \quad (8)$$

$$\begin{Bmatrix} H'_{12} \\ H'_{22} \\ H'_{32} \end{Bmatrix} \cdot [U_2]^2 = \begin{Bmatrix} G'_{12} \\ G'_{22} \\ G'_{32} \end{Bmatrix} \cdot [P_2]^2 \Rightarrow \frac{G_2}{G_1} \begin{Bmatrix} H'_{12} \\ H'_{22} \\ H'_{32} \end{Bmatrix} \cdot [U_2]^1 = \begin{Bmatrix} -G_{12} \\ -G_{22} \\ -G_{32} \end{Bmatrix} \cdot [P_2]^1 \quad (9)$$

$$\begin{Bmatrix} H''_{13} \\ H''_{23} \\ H''_{33} \end{Bmatrix} \cdot [U_3]^2 = \begin{Bmatrix} G''_{13} \\ G''_{23} \\ G''_{33} \end{Bmatrix} \cdot [P_3]^2 \Rightarrow \frac{G_3}{G_1} \begin{Bmatrix} H''_{13} \\ H''_{23} \\ H''_{33} \end{Bmatrix} \cdot [U_3]^1 = \begin{Bmatrix} -G_{13} \\ -G_{23} \\ -G_{33} \end{Bmatrix} \cdot [P_3]^1 \quad (10)$$

onde os índices superiores 1, 2 e 3 indicam cada superfície  $\Gamma$  correspondente.

De fato, é possível escrever os sistemas (9) e (10) em função dos deslocamentos e forças do domínio 1, utilizando para isso as relações de compatibilidade e equilíbrio, e atentando para a solução fundamental do problema. A superposição é válida permitindo, portanto que as matrizes sejam somadas para que seja escrito um único sistema de equação para o problema original que inclui todas as sub-regiões juntas. Observa-se que os termos da matriz  $\mathbf{G}$  relativos às forças nos contornos  $\Gamma_2$  e  $\Gamma_3$  se anulam, restando apenas incógnitas de força no contorno externo. Nas superfícies de contato restam apenas incógnitas de deslocamento.

$$\begin{bmatrix} H_{11} & (H_{12} + \bar{H}'_{12}) & (H_{13} + \bar{H}''_{13}) \\ H_{21} & (H_{22} + \bar{H}'_{22}) & (H_{23} + \bar{H}''_{23}) \\ H_{31} & (H_{32} + \bar{H}'_{32}) & (H_{33} + \bar{H}''_{33}) \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} G_{11} \\ G_{21} \\ G_{31} \end{Bmatrix} \cdot [P_1] \quad (11)$$

A partir deste exemplo simples, fica fácil a compreensão da estratégia para a automatização do processo via programação computacional, por maior que seja o número de sub-regiões. Para problemas em que os diferentes domínios encontram-se em forma de camadas ou zonas, o procedimento é o mesmo, sendo que desta vez, apenas os termos da

matriz  $\mathbf{G}$  nas linhas de contato se anulam, ou seja, ainda restam somente incógnitas de deslocamento na superfície de contato.

A estratégia é, portanto, genérica e pelo sistema (11) fica claro o funcionamento da técnica alternativa descrita pela equação (7).

No caso dos pontos internos ao domínio, pelo fato da estratégia algébrica multiplicar o sistema matricial original pela razão entre os módulos de elasticidade transversal, é necessário corrigir os valores calculados para deslocamentos internos multiplicando-os pela relação inversa entre os módulos.

Para o cálculo de tensões internas o procedimento é semelhante ao anteriormente citado. Utilizando a lei de Hooke é possível chegar à equação integral de tensão, que tem a mesma forma da equação do contorno.

$$\sigma_{ij}^k = -\sum_{m=1}^{ns} \frac{G_m}{G_k} \int_{\Gamma_k} u_k^m S_{ijk}^{*m} d\Gamma + \int_{\Gamma} p_k D_{ijk}^* d\Gamma \quad (12)$$

### 2.3 Linhas De Carga

Em diversos problemas de engenharia pode haver a necessidade de se modelar um carregamento atuando no domínio interno do MEC na forma de uma linha de carga. É o caso de simulação de estacas cravadas no solo onde os elementos finitos de barra que simulam as estacas atuam como linhas carregadas internas ao domínio do solo (Venturini, 1988).

Para que seja possível esse tipo de análise, é necessária a implementação das linhas de carga no sistema algébrico, inserindo elementos de linha de carga (semelhantes a elementos de contorno) internos ao domínio. Estes elementos não formam contornos fechados e devem estar inteiramente contidos no corpo.

Os nós dos elementos de linha de carga não constituem necessariamente incógnitas do problema, e por isso geram somente termos na matriz  $\mathbf{G}$  do sistema de equações, representando assim o carregamento aplicado sobre os elementos internos (Coda, 2000). Os valores de forças distribuídas sobre as linhas de carga devem ser todos conhecidos, não cabendo nenhuma restrição a deslocamentos para nós internos. A singularidade presente na equação integral recebe o mesmo tratamento realizado nas integrais do contorno.

A matriz  $\mathbf{H}$ , por sua vez, deverá ter as mesmas dimensões da matriz  $\mathbf{G}$ . Os nós internos podem gerar linhas na matriz ao integrar o contorno externo, como parte do problema. Logo, o sistema pode calcular deslocamentos de pontos internos juntamente com pontos do contorno. Os nós do contorno não integram os deslocamentos dos elementos da linha de carga, já que estes não são aproximados. Os termos correspondentes são então nulos na matriz  $\mathbf{H}$ . O sistema algébrico deverá ser, portanto montado como mostra a equação (13).

$$\begin{bmatrix} H_{ee} & 0 \\ H_{ie} & I \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} U_e \\ U_i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{ee} & G_{ei} \\ G_{ie} & G_{ii} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} P_e \\ P_i \end{Bmatrix} \quad (13)$$

onde a letra  $e$  indica os termos do contorno externo e a letra  $i$  os termos relativos ao “contorno” interno (linhas de carga).  $I$  é a matriz identidade.

A generalização para aproximações de ordem qualquer também pode ser aplicada a estes elementos internos, permitindo inserir linhas de carga curvas. Além disso, podem ser representadas funções de carregamentos parabólicas, etc. Outra vantagem do processo utilizado é a possibilidade de inserir linhas de carga em qualquer direção dentro do domínio, o que viabiliza a análise de estacas inclinadas.

Em meios heterogêneos, é possível ainda que as linhas de carga passem através de diferentes domínios, simulando casos de estacas cravadas ultrapassando várias camadas de solo. Para isso, é necessário primeiramente que sejam estabelecidas as sub-regiões as quais fazem parte cada linha de carga. Em seguida, durante a montagem das matrizes  $\mathbf{H}$  e  $\mathbf{G}$  de cada sub-região, realiza-se a integral dos elementos de linha de carga contidos naquele domínio para montagem da matriz  $\mathbf{G}$ . A superposição ainda será válida e o sistema final ao ser somado inclui, portanto todas as linhas de carga internas, bem como as relações de equilíbrio e compatibilidade entre os diferentes domínios.

### 3 O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

O Método dos Elementos Finitos é o método numérico mais utilizado em análise de estruturas nos dias de hoje. Isso se deve principalmente pela sua versatilidade e vasta aplicação em diferentes tipos de análise.

Neste trabalho utiliza-se o software AcadFrame para a modelagem da estrutura de pórtico plano que será acoplada ao MEC. O software AcadFrame é baseado no MEF adotando uma formulação dita posicional, e foi desenvolvido no Departamento de Engenharia de Estruturas da Universidade de São Paulo (USP) em São Carlos pelos professores Dr. Humberto Breves Coda e Dr. Rodrigo Ribeiro Paccola. O programa permite análise de estruturas reticuladas planas considerando o comportamento não linear geométrico das barras com cinemática exata.

A descrição da formulação posicional do MEF pode ser encontrada nos trabalhos de Bonet (2000), Coda (2003) e em Coda & Greco (2004). Esta formulação consiste em se admitir que as variáveis principais do problema sejam as posições nodais da estrutura, diferente da formulação convencional onde se consideram os deslocamentos incógnitos. Considera-se um eixo referencial fixo (lagrangeano) e fora do corpo em estudo. Assim, é necessário o mapeamento das posições iniciais e finais (ou correntes) do sólido estrutural, sempre em relação a este referencial. A formulação não linear geométrica adotada é classificada então como lagrangeana total.

Para resolver o problema mecânico, basicamente escreve-se o funcional de energia do sistema em função das posições nodais. Ao aplicar-se o princípio da mínima energia total, sabendo que o equilíbrio estável ocorre na situação de mínima energia, chega-se a um sistema algébrico formado por uma matriz hessiana, que é dada pela segunda derivada da energia de deformação, e um vetor de desbalanceamento de forças do sistema mecânico. O sistema algébrico formado é não linear e pode ser resolvido por meio do método iterativo de Newton-Raphson.

O cálculo das deformações resulta diretamente do conceito de posição proposto, usando o sistema de coordenadas fixo no espaço adimensional. A cinemática de Reissner é empregada, ou seja, as seções transversais planas permanecem planas após a deformação da estrutura, porém não necessariamente perpendiculares a chamada linha neutra.

Tal qual no desenvolvimento do MEC, os polinômios de Lagrange são adotados como função aproximadora no MEF, tanto para a geometria do elemento quanto para as variáveis do problema. Assim, elementos finitos curvos e de alta ordem podem ser aplicados. Isso é importante para o acoplamento numérico, uma vez que os elementos finitos poderão ter a mesma ordem de aproximação dos elementos de contorno no MEC.

Foram necessárias apenas algumas alterações no código original do software AcadFrame para a implementação do acoplamento numérico entre os métodos, tal qual será comentado no

próximo item. Caso seja do interesse do leitor, maiores detalhes sobre a formulação do MEF utilizada no desenvolvimento do software AcadFrame podem ser encontrados nas referências.

#### 4 A COMBINAÇÃO ENTRE OS MÉTODOS NUMÉRICOS

Para o acoplamento entre os diferentes métodos numéricos se faz necessário que sejam distinguidos os elementos que estão acoplados dos que não estão. Assim, podemos escrever o sistema algébrico do MEC na seguinte forma

$$\begin{bmatrix} H_{cc} & H_{cl} \\ H_{lc} & H_{ll} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_c^B \\ U_l^B \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{cc} & G_{cl} \\ G_{lc} & G_{ll} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_c^B \\ P_l^B \end{Bmatrix} \quad (14)$$

sendo o índice  $c$  relativo aos nós acoplados e o índice  $l$  aos nós livres ou não acoplados. O índice superior  $B$  indica que os deslocamentos  $U$  e as forças de superfície  $P$  são relativos ao MEC (boundary).

Para o MEF monta-se o sistema com a mesma idéia, ficando, portanto na forma

$$\begin{bmatrix} K_{cc} & K_{cm} \\ K_{mc} & K_{mm} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_c^F \\ U_m^F \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_c^F \\ F_m^F \end{Bmatrix} \quad (15)$$

onde novamente o índice  $c$  indica termos dos nós acoplados e o índice  $m$  indica termos dos nós livres da malha do MEF. Aqui, o índice superior  $F$  indica que os deslocamentos  $U$  e as forças concentradas  $F$  são relativas ao MEF (finite).

Partindo do sistema em (14) pode-se escrever o deslocamento na superfície livre  $U_l$  em função dos demais termos. Organizando os termos, obtêm-se a seguinte expressão

$$\bar{H}_{cc} U_c^B = \bar{G}_{cc} P_c^B + T \quad (16)$$

tal que

$$\bar{H}_{cc} = [H_{cc} - H_{cl} H_{ll}^{-1} H_{lc}] \quad (16.a)$$

$$\bar{G}_{cc} = [G_{cc} - H_{cl} H_{ll}^{-1} G_{lc}] \quad (16.b)$$

$$T = [G_{cl} - H_{cl} H_{ll}^{-1} G_{ll}] P_l^B \quad (16.c)$$

Ao multiplicarem-se ambos os lados da equação (16) por uma matriz  $Q_c$ , originada da integração das funções de forma dos elementos finitos acoplados, não alteramos seu resultado. A função da matriz  $Q_c$  é concentrar as forças de superfície  $P$  nos nós, tornado-as assim carregamentos nodais  $F$ . Logo, pode-se transformar os valores de força de superfície no contorno em carregamentos nodais equivalentes para serem aplicados diretamente ao MEF.

Logo, aplicando  $Q_c$  sobre a equação (16) do MEC, resulta

$$\bar{K}_{cc} U_c^B = F_c^B + \bar{P}_c \quad (17)$$

onde agora

$$\bar{K}_{cc} = Q_c \bar{G}_{cc}^{-1} \bar{H}_{cc} \quad (17.a)$$

$$\bar{P}_c = Q_c \bar{G}_{cc}^{-1} T \quad (17.b)$$

$$F_c^B = Q_c P_c^B \quad (17.c)$$

Da equação (17) é possível escrever a força nos nós do elemento de contorno em função de todos os outros termos.

Voltando ao sistema do MEF na equação (15) e aplicando as condições de compatibilidade e de equilíbrio de forças na interface comum aos métodos numéricos, o seguinte sistema algébrico será obtido

$$\begin{bmatrix} (K_{cc} + \bar{K}_{cc}) & K_{cm} \\ K_{mc} & K_{mm} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_c^F \\ U_m^F \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{P}_c \\ F_m^F \end{Bmatrix} \quad (18)$$

Este sistema resultante é, portanto, o sistema que representa a estrutura de pórtico acoplada ao solo. A matriz  $\bar{K}_{cc}$  pode ser então entendida como uma matriz de rigidez do solo condensada nos nós acoplados e que insere no MEF as condições advindas do MEC. O vetor  $\bar{P}_c$  inclui as condições de carregamento na interface oriundas do MEC e será na verdade somado ao vetor  $F_c^F$  a cada iteração do método de Newton-Raphson.

Pelo fato de neste trabalho o solo ser considerado elástico linear, sua matriz não se altera durante o processo iterativo, sendo assim calculada somente uma vez, na primeira iteração do programa NLG.

Após cada iteração no processo de solução é preciso que os vetores de forças internas do elemento finito sejam “corrigidos”, somando-se a este os valores dos carregamentos nodais oriundos da reação do solo sobre a estrutura. Estes valores podem ser calculados através do produto da matriz de rigidez do solo pelo vetor deslocamento dos nós na interface.

A consideração de solos heterogêneos pode ser feita pela metodologia descrita no item 2.2.1, pois os procedimentos apresentados são aplicados antes da montagem do sistema algébrico final no MEC. Dessa maneira, ao serem condensadas as matrizes **H** e **G**, todo o domínio heterogêneo estará sendo considerado.

O uso de linhas de carga enriquece ainda mais a análise, pois permite a simulação de estacas em qualquer direção. Como a formulação permite que as linhas de carga atravessem diferentes materiais, os elementos finitos poderão da mesma forma, fazê-lo.

## 5 EXEMPLOS DE VALIDAÇÃO E APLICAÇÃO

### 5.1 Barra homogênea tracionada

Este primeiro exemplo comprova a eficiência do acoplamento numérico. Consiste de uma barra homogênea submetida à tração uniforme. A análise é feita modelando metade do comprimento da barra através do MEC e a outra metade através do MEF. Para testar a técnica alternativa implementada no MEC, são consideradas três sub-regiões com mesmo módulo de elasticidade no meio contínuo ( $E_1 = E_2 = E_3 = 10.000 \text{ kN/cm}^2$ ) acopladas a duas barras do MEF, de acordo com a Figura 6 a seguir. Para esse problema, é adotado coeficiente de Poisson  $\nu = 0$ . A barra transversal do MEF é extremamente rígida possibilitando o resultado atingido ser comparado ao valor analítico.

Na malha do MEC foram utilizados 22 nós no contorno e 12 elementos quadráticos, enquanto que no MEF utilizou-se 5 nós e 2 elementos quadráticos. Aplicaram-se nós duplos nos vértices da malha do MEC para considerar a descontinuidade de forças de superfície.

A solução analítica para o deslocamento máximo na direção horizontal deste problema é baseada na resistência dos materiais e é dada pela expressão

$$u_{m\acute{a}x.} = \frac{NL}{EA} = \frac{10 \times 4}{10.000 \times 1} = 0,004 \text{ cm} \quad (19)$$

Na seção mais ao meio do vão o deslocamento horizontal é igual à metade desse valor, ou seja,  $u_{(x=2,0)} = 0,002 \text{ cm}$ .

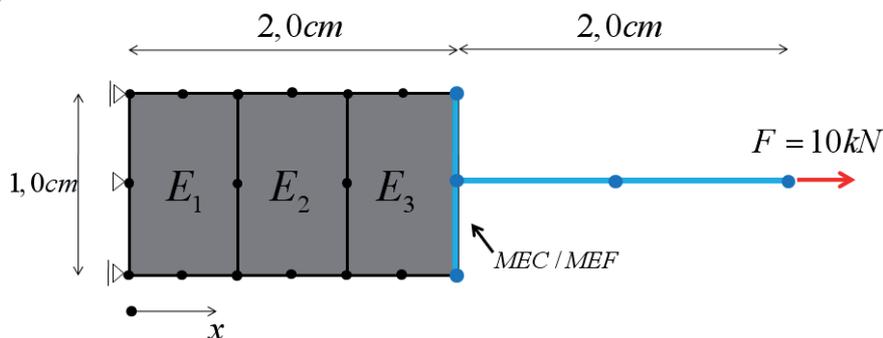


Figura 6 – Modelo MEC/MEF para barra tracionada

Apresentam-se os resultados de deslocamento horizontal obtidos com o uso do programa desenvolvido. Os valores de deslocamento obtidos são pequenos e por esse motivo a solução é idêntica à resposta analítica, comprovando o adequado funcionamento do programa.

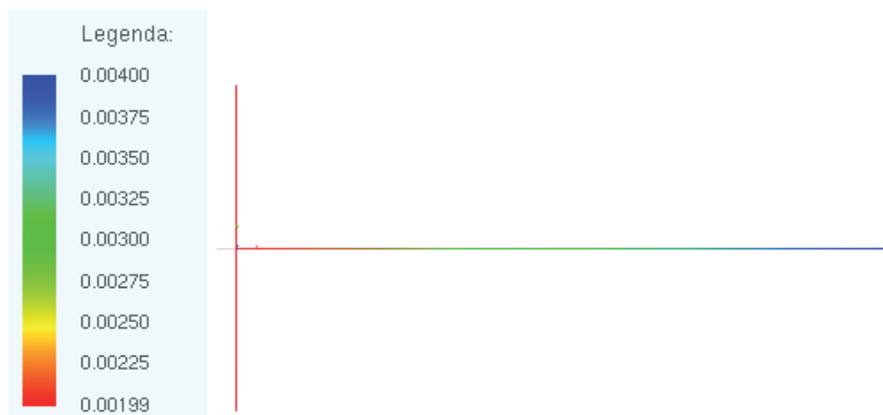


Figura 7 – Deslocamento horizontal na malha do MEF

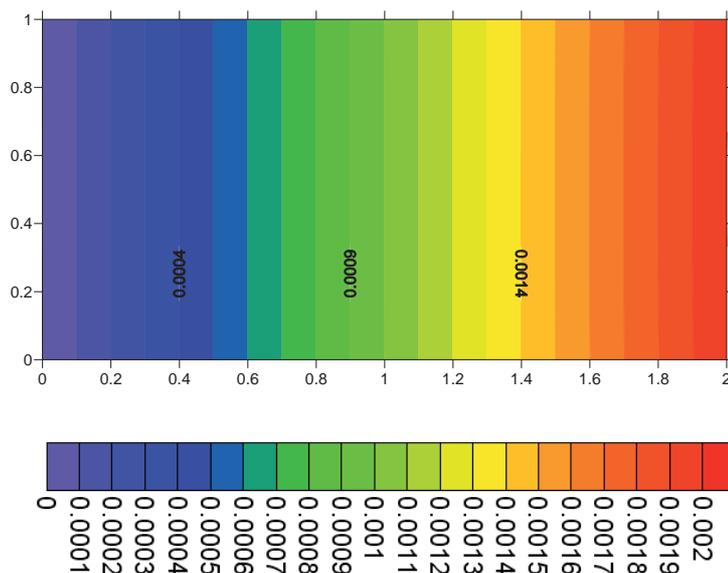


Figura 8 – Deslocamento horizontal na malha do MEC

## 5.2 Estaca inclinada atravessando solo heterogêneo

Neste exemplo, serão calculados os deslocamentos da combinação de cargas vertical, horizontal e de momento aplicados na extremidade superior de uma estaca inclinada inserida em um solo heterogêneo, além de averiguar as tensões ocasionadas no solo (Figura 9).

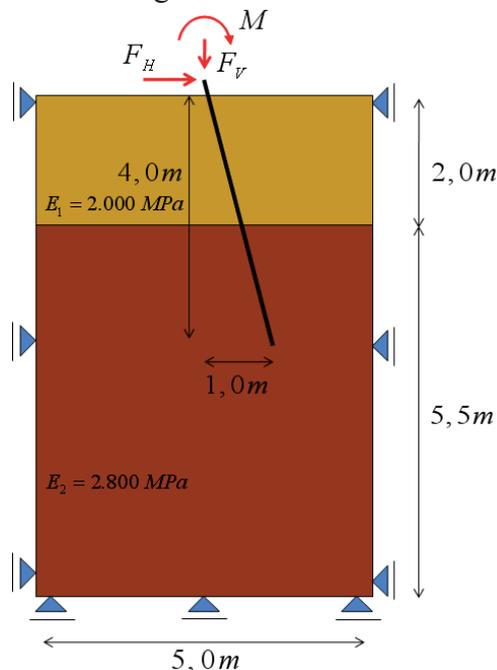


Figura 9 – Problema da Estaca inclinada

Para a estaca admite-se seção transversal de área  $A = 900 \text{ cm}^2$ . Adota-se o Estado Plano de Deformação e o coeficiente de Poisson da estaca e de ambas camadas no solo é  $\nu = 0,2$ . Os valores de carregamento admitidos são:  $F_H = 100 \text{ kN}$ ,  $F_V = 300 \text{ kN}$  e  $M = 50 \text{ kNm}$ .

Foi utilizada uma malha com 168 elementos quadráticos no contorno do solo e 42 elementos quadráticos ao longo da estaca. Os valores obtidos são comparados com os resultados utilizando-se a ferramenta Ansys.

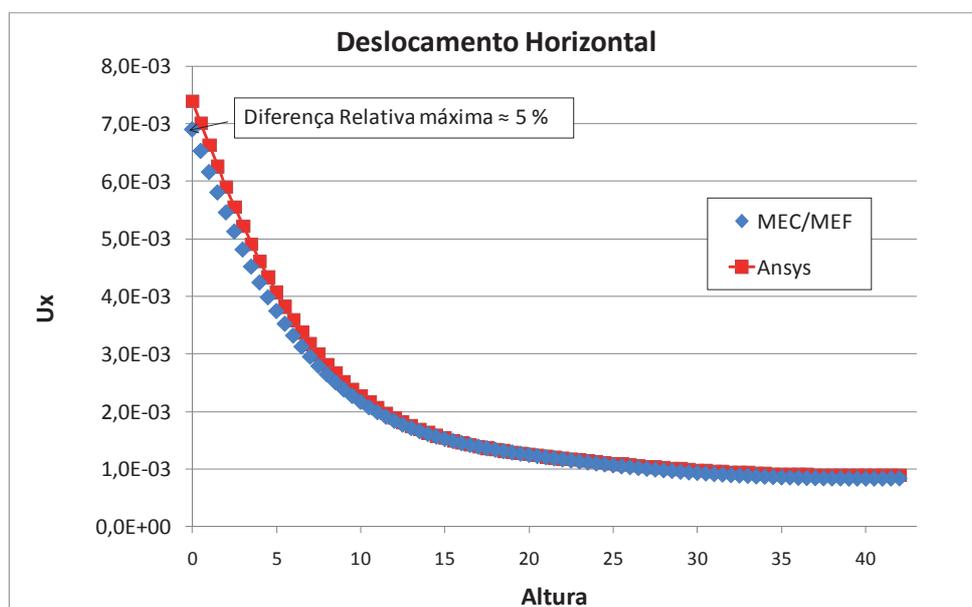


Gráfico 1 – Deslocamento horizontal resultante

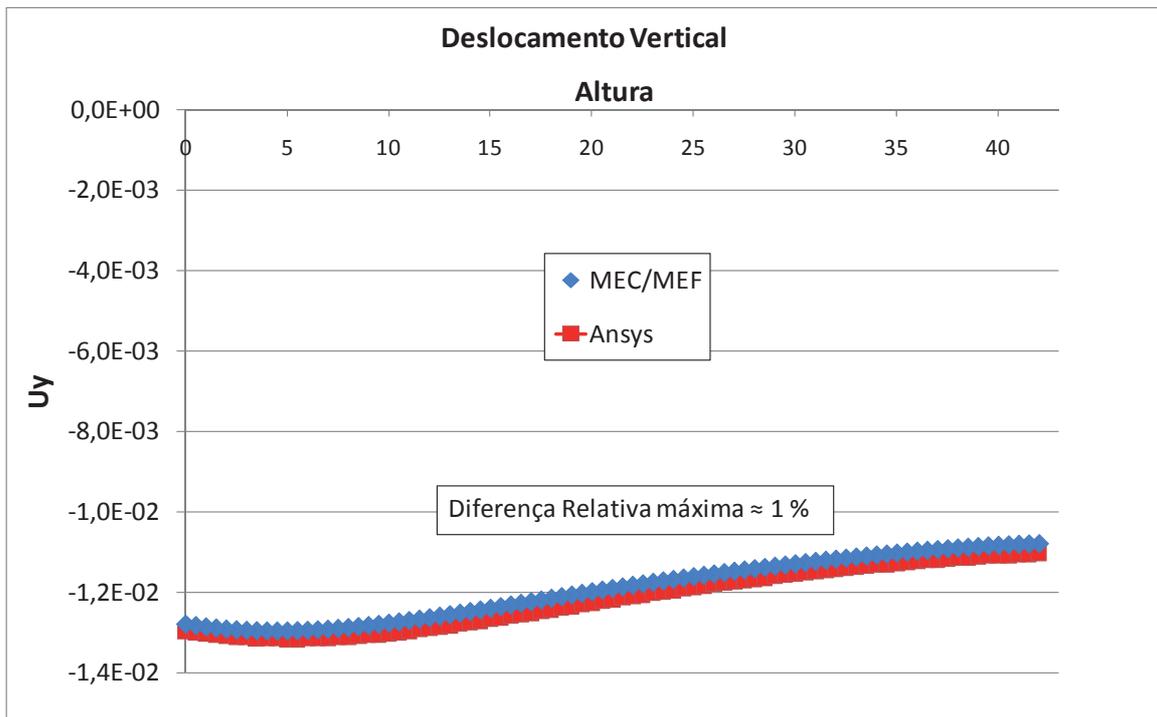


Gráfico 2 – Deslocamento vertical resultante

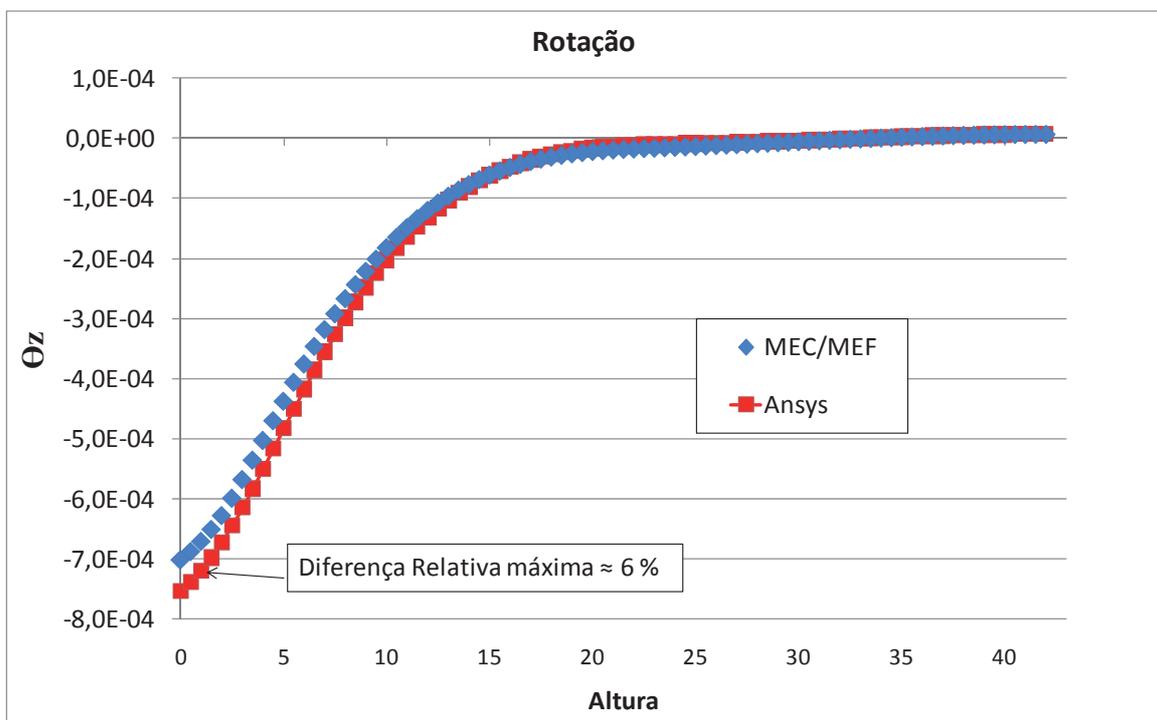


Gráfico 3 – Rotação ao longo da estaca resultante

Os resultados de forma geral se mostram bastante satisfatórios, com diferenças relativas mínimas em relação aos valores de referência. Após o processamento da estrutura, pode-se calcular as tensões ocorridas no solo através de uma rede de pontos internos inseridas no meio contínuo no programa do MEC (Figura 10).

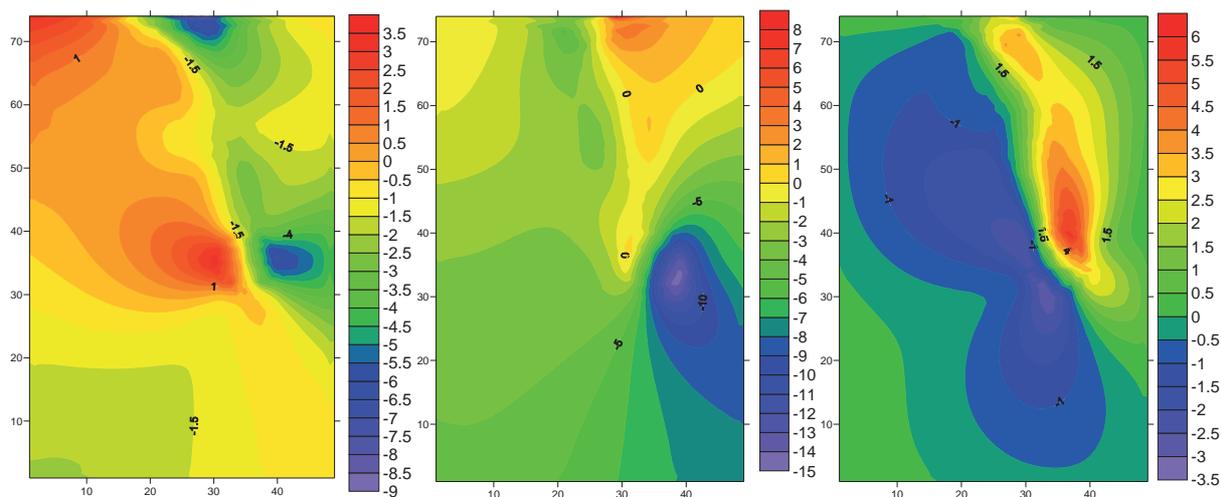


Figura 10 – Distribuição das tensões  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  e  $T_{xy}$  (respectivamente) ao longo do solo

### 5.3 Barra engastada em solo heterogêneo

Seja uma estrutura de barra esbelta engastada em um solo heterogêneo, conforme mostra a Figura 11. Neste exemplo demonstra-se outra aplicação do programa desenvolvido, para um problema onde agora a não linearidade geométrica da estrutura também terá forte influência no resultado final, devido à elevada esbelteza da barra.

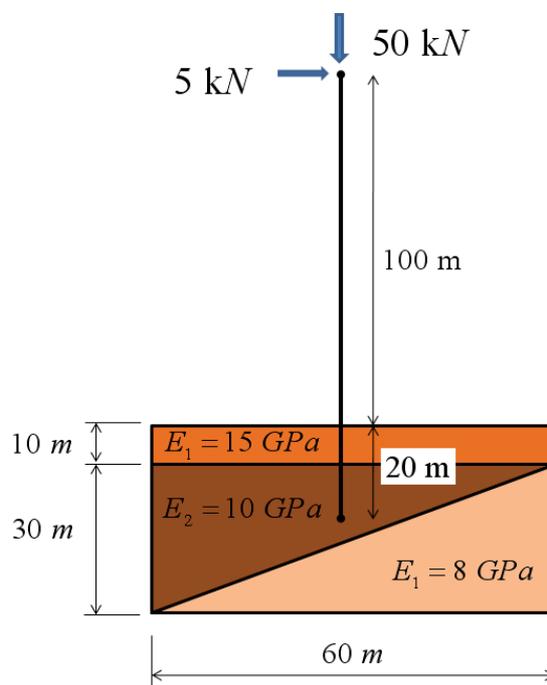


Figura 11 – Barra engastada em material heterogêneo

O solo é formado por três diferentes materiais, sendo a camada mais inferior a de material menos rígido. As condições de contorno do solo são restrição ao deslocamento horizontal nas faces laterais e restrição ao deslocamento vertical na face mais inferior. Adota-se o Estado Plano de Deformação.

Para a barra é considerada uma seção transversal de área  $A = 0,1166 \text{ cm}^2$ , momento de inércia  $I = 0,0183 \text{ m}^4$  e o módulo de elasticidade do material é  $E = 210 \text{ GPa}$ .

Os resultados obtidos com a utilização do programa desenvolvido serão comparados com valores obtidos para uma análise linear com apoios fixos nos nós da barra que se encontram internos ao solo. Pretende-se assim demonstrar as diferenças ocasionadas entre dois extremos: a análise considerando comportamento linear e fundação rígida e outra considerando a não linearidade geométrica da barra em conjunto com a interação solo-estrutura.

Os resultados obtidos para deslocamentos horizontais e para momento fletor ao longo da estrutura são apresentados respectivamente nas Figuras 12 e 13 a seguir.

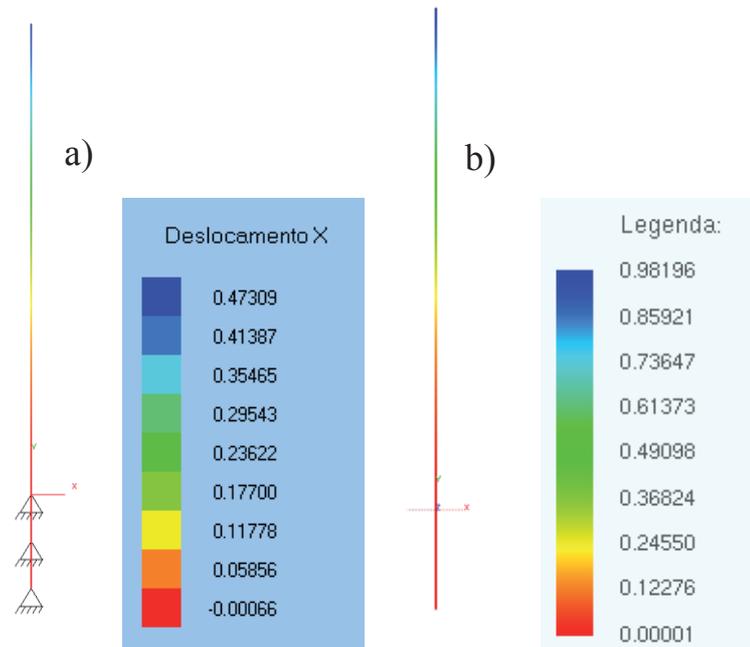


Figura 12 – Deslocamento horizontal para (a) análise linear e (b) este trabalho

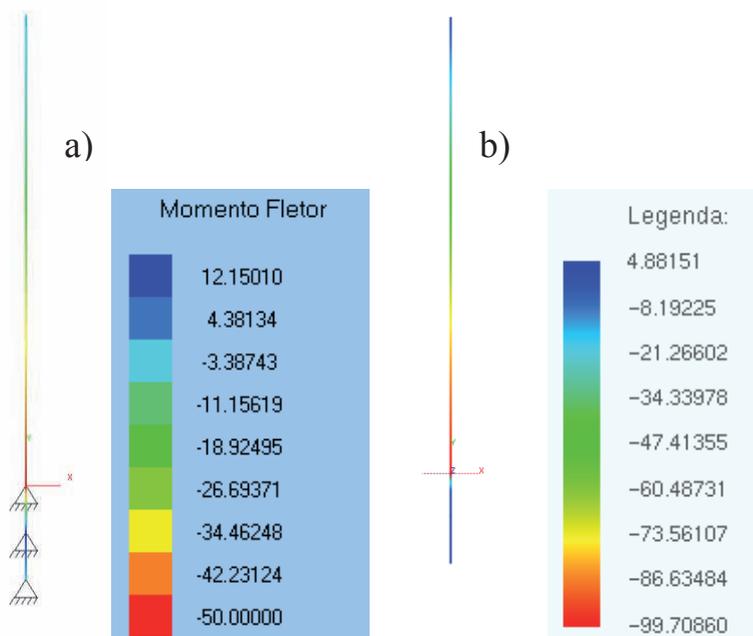


Figura 13 – Momentos fletores para (a) análise linear e (b) este trabalho

Observando o deslocamento horizontal e a distribuição do momento fletor ao longo da estrutura percebe-se a importância da consideração da NLG e da interação solo-estrutura para este problema. Nos resultados deste trabalho, o valor para o momento fletor máximo na base da estrutura e o deslocamento horizontal no topo chegam a ser o dobro do resultado obtido na análise linear com apoios fixos. Este fato precisa ser levado em conta no dimensionamento estrutural, caso contrário deverá ocorrer problemas estruturais graves e que podem comprometer a segurança de pessoas.

## 6 CONCLUSÕES

O acoplamento entre os métodos numéricos se mostrou bastante eficiente na análise de problemas envolvendo os diferentes meios. A estratégia algébrica adotada para o acoplamento permite que a matriz de rigidez condensada do solo seja aplicada ao sistema algébrico do MEF a cada iteração no processo de Newton-Raphson. Assim, o solo atua como condição de contorno para a estrutura de pórtico já considerando suas diversas características.

Com a utilização da formulação alternativa no MEC, é possível considerar o solo como sendo formado por diversos materiais com diferentes módulos de elasticidade e configurações geométricas diversas. A formulação alternativa adotada também reduz o tamanho do sistema por não aproximar força de superfície no contato. As linhas de carga, por sua vez, permitem que sejam simulados elementos internos em qualquer direção, como no caso de estacas inclinadas. Da forma como foi elaborada, a estratégia permite inclusive que estas estacas ultrapassem diversas camadas de solo.

Tanto na formulação do MEC quanto na do MEF, o uso dos polinômios de Lagrange de ordem qualquer permitiu a generalização de ambos os códigos para o uso de elementos curvos isoparamétricos. É possível que superfícies curvilíneas e funções de alta ordem sejam assim melhor representadas. O uso desses elementos pode assim melhorar a qualidade das repostas em ambos os programas.

É importante ressaltar ainda que as alterações inseridas no sistema algébrico do MEF pelo acoplamento numérico consideram quaisquer configurações definidas preliminarmente no MEC. É possível assim, por exemplo, avaliar qual a influência que uma carga atuante no meio contínuo afastada da estrutura de pórtico terá sobre o comportamento desta última. Para isso basta que sejam definidas tais forças de superfície atuando no modelo do MEC, antes que sejam condensadas as matrizes.

O primeiro exemplo apresentado, apesar de simples, comprova a eficiência da formulação do MEC e do acoplamento numérico. Pode-se também alterar os valores de módulo de elasticidade dos materiais envolvidos para análise de barras constituídas por mais de um material. Os dois outros exemplos apresentados demonstram aplicações práticas na engenharia, em problemas que envolvem meios contínuos heterogêneos. No segundo exemplo, as máximas diferenças percentuais relativas são insignificantes do ponto de vista de engenharia, além de serem esperadas devido à diferente natureza dos processos numéricos comparados (lembrando que no Ansys todo o domínio e a estrutura são modelados via MEF). No terceiro exemplo fica claro que a consideração da não linearidade geométrica para as estruturas de pórtico também pode ser importante a depender da esbelteza da estrutura.

Os recursos da ferramenta desenvolvida podem ainda ser aplicados a problemas de acoplamento entre peças mecânicas ou em análise de materiais compostos, como na ancoragem de armaduras (dobradas ou não) do concreto armado.

**REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS**

- Bonet, J. et al. Finite element analysis of air supported membrane structures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 190: 579-595, 2000.
- Brebbia, C.A. e Dominguez, J. *Boundary elements: an Introductory course*. Computational Mechanics Publications, London, 1992.
- Coda, H.B. *Contribuição à Análise Dinâmica Transiente de Meios Contínuos pelo Método dos Elementos de Contorno*. São Carlos. Tese (Livre Docência), Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 2000.
- Coda, H.B. An exact FEM geometric non-linear analysis of frames based on position description. In: XVIII Congresso Brasileiro De Engenharia Mecânica, São Paulo, 2003.
- Coda, H.B. e Greco, M. A simple FEM formulation for large deflection 2D frame analysis based on position description. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 193: 3541-3557, 2004.
- Kzam, A.K.L. *Formulação Dual em Mecânica da Fratura Utilizando Elementos de Contorno Curvos de Ordem Qualquer*. Dissertação (Mestrado), Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 2009.
- Leite, L. G. S. *Desenvolvimento de modelos numéricos para análise de problemas de interação de domínios bidimensionais*. Tese (doutorado), Escola de Engenharia de São Carlos – Universidade de São Paulo, 2007.
- Ribeiro, D. B. *Estudo e aplicação de um elemento de contorno infinito na análise da interação solo-estrutura via combinação MEC/MEF*. Tese (doutorado), Escola de Engenharia de São Carlos – Universidade de São Paulo, 2009.
- Silva, W. Q. Uma estratégia para o tratamento de múltiplas inclusões generalizadas e de linhas de carga via método dos elementos de contorno com aproximação qualquer. In: XXXI Iberian-Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering, Búzios/RJ. Anais, 2009.
- Venturini, W. S. Alternative formulations of the boundary element method for potential and elastic zoned problems. *Engineering analysis, Great Britain*, 9: 203-207, 1992.
- Venturini, W.S. *Um estudo sobre o método dos elementos de contorno e suas aplicações em problemas de engenharia*. Tese (livre docência), Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 1988.