

ESTUDIO DE LAS VIBRACIONES LIBRES DE ELEMENTOS ESTRUCTURALES CON SISTEMAS MASA-RESORTE ADOSADOS UTILIZANDO DIVERSAS METODOLOGIAS

Mariano Febbo*, Sergio A. Vera*

*Instituto de Mecánica Aplicada (UNS)
Universidad Nacional del Sur

Av. Alem 1,253, Bahía Blanca, 8000 Buenos Aires, Argentina

e-mail: mfebbo@uns.edu.ar,svera@criba.edu.ar, web page: <http://www.uns.edu.ar>

Key Words: Vibraciones libres, sistemas adosados elásticamente, diversas metodologías de cálculo.

Abstract. *En este trabajo se presenta una comparación entre diversos métodos de análisis para la obtención de frecuencias naturales de vibración de elementos estructurales con masas y resortes adosados. El efecto de adosar sistemas masa-resorte sobre elementos estructurales es bien conocido desde la época de Lord Rayleigh. Sin embargo, el interés no ha decaído a lo largo del tiempo debido, principalmente, a su importancia práctica dado que son muchas las situaciones en donde ocurren estas modificaciones. Las metodologías utilizadas son: masa aparente, método de los multiplicadores de Lagrange, FEM y receptancia. En el trabajo se muestran las ventajas y desventajas de cada enfoque.*

1 INTRODUCCIÓN

Conocer las frecuencias naturales de vibración de elementos estructurales cuando se le adosan sistemas masa-resorte es de gran relevancia tanto teórica como práctica. Desde el punto de vista teórico debido a la creciente necesidad de modelar este tipo de sistemas tan comunes en la vida diaria. Desde el punto de vista práctico su relevancia reside en el hecho de la aplicación de este tipo de configuración como absorbedor dinámico, lo cual ha suscitado, desde su descubrimiento en 1909 y su posterior tratamiento teórico en 1928 por Ormondroyd y Den Hartog,¹ su utilización como absorbedor de vibraciones en un sinnúmero de situaciones como por ejemplo la supresión de vibraciones en rascacielos debido a su excitación por el viento, máquinas sometidas a excitación constante, asientos de autos, etc. Entre la innumerable cantidad de trabajos que ha generado caben mencionar, para vigas a las que se adosa un sistema de un grado de libertad, los trabajos de Laura *et al*², Gurgoze³ y Dowell⁴ entre los fundamentales.

En este trabajo presentaremos diversas metodologías como el método de masa aparente, multiplicadores de Lagrange, FEM y receptancia para calcular frecuencias naturales de vibración, que, si bien arrojan similares y por supuesto correctos, presentan distintas ventajas unas respecto de otras en cuanto a la comprensión física de este tipo de sistemas y en cuanto al tiempo de cálculo que demandan.

2 METODOLOGIAS EMPLEADAS

Empezaremos describiendo cada una de las metodologías propuestas.

2.1 Masa aparente

El concepto de masa aparente ha sido ampliamente usado para analizar sistemas vibrantes acoplados.⁵ La idea consiste en poder reemplazar un sistema masa-resorte (o en general un sistema más complejo) sometido a una excitación dinámica por una masa equivalente (aparente) que dependerá de la frecuencia de la excitación (fig. 1).

De esta forma, el análisis de la estructura acoplada (sistema base más sistema adosado) se hace más simple y directo ya que el sistema acoplado es reemplazado por un sólo elemento cuyo comportamiento dinámico es conocido.

Para un sistema de un grado de libertad, la masa aparente se calcula de la siguiente forma. Si tenemos una fuerza armónica $F(t)$, que excita un sistema masa-resorte de la forma que se puede ver en la figura 1, ambos elementos pueden ser reemplazados por una masa dependiente de la frecuencia $m(\omega)$ que tiene la siguiente expresión.

$$m_a(\omega) = \frac{k}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (1)$$

donde $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ es la frecuencia natural de oscilación del sistema masa-resorte.

Consideremos el caso en que tenemos una estructura a la cual se le adosan r masas elásticamente.

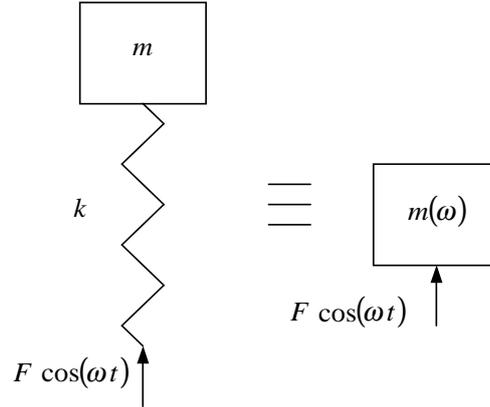


Figure 1: El sistema masa-resorte de 1 grado de libertad es reemplazado por una masa aparente que depende de la frecuencia de excitación

En este caso supondremos que el sistema estructural es una viga, pero también podría ser una placa u otro elemento estructural y el planteamiento del problema sería el mismo.

Introduciendo el valor de la *masa aparente* (ecuación 1) en la ecuación diferencial de la viga y sabiendo que la fuerza que hará sobre la misma será $F = m_a(\omega)\ddot{w}(x, t)$, entonces la ecuación nos queda de la forma

$$EI \frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} = \sum_{\nu=1}^r F_\nu \delta(x - x_\nu) \quad (2)$$

donde $F_\nu = -m_{a,\nu}\ddot{w}(x, t)$. E es el módulo de Young, I es el momento de inercia del área A , ρ la densidad del material.

Suponiendo

$$w(x, t) = \sum_{i=1}^n \bar{W}_i(x) q_i(t) \quad (3)$$

entonces la ecuación 2 resulta

$$\sum_{i=1}^n EI \bar{W}_i^{IV}(x) q_i(t) + \rho A \sum_{i=1}^n \bar{W}_i(x) \ddot{q}_i(t) = - \sum_{\nu=1}^r m_{a,\nu} \sum_{i=1}^n \bar{W}_i(x) \ddot{q}_i(t) \quad (4)$$

multiplicando por $\bar{W}_j(x)$ e integrando en todo el largo de la viga l , sabiendo que las funciones $\bar{W}_i(x)$ son ortogonales y normalizadas a $\bar{m} = \rho A$ (masa por u/long.), se tiene finalmente

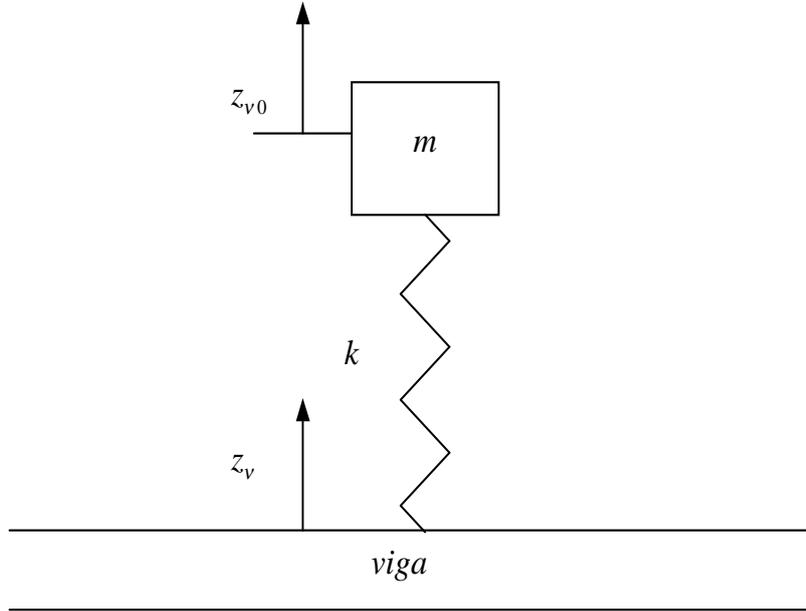


Figure 2: Variables auxiliares del problema en el planteo del *método de los multiplicadores de Lagrange* aplicado a una viga a la cual se le adosan r sistemas de un grado de libertad

$$(\omega_j^2 - \bar{\omega}_j^2)\bar{q}_j(t) - \sum_{\nu=1}^r \sum_{i=1}^n \bar{\omega}_i^2 m_{a,\nu} \bar{W}_j(x_\nu) \bar{W}_i(x_\nu) \bar{q}_i(t) = 0 \quad (5)$$

En la ecuación anterior hemos supuesto $q_i(t) = \bar{q}_i(t)e^{i\omega t}$, siendo además las ω_j las frecuencias naturales de la viga libre (que en adelante llamaremos desnuda). En forma matricial la ecuación 5 se puede poner

$$([A] - \bar{\omega}^2[B])\bar{q} = 0 \quad (6)$$

donde las matrices $[A]$, $[B]$ vienen dadas por

$$[A]_{n \times n} = \text{diag}[\omega^2]_{n \times n} \quad (7)$$

$$[B]_{n \times n} = [I]_{n \times n} + [B']_{n \times n}, \quad [B'] = \sum_{\nu=1}^r m_{a,\nu} \{\bar{W}(x_\nu)\}_{n \times 1} \{\bar{W}(x_\nu)\}_{n \times 1}^T \quad (8)$$

Para hallar las autofrecuencias del problema debemos hacer $\det([A] - \omega^2[B]) = 0$. En este caso hay que notar que, a diferencia de los casos usuales de obtención de autovalores a partir de un problema de la forma $[A] - \omega^2[B]$ donde $[A]$ y $[B]$ son matrices con coeficientes constantes, aquí el autovalor incógnita ω está dentro de la matriz $[B]$ por lo que no es posible aplicar métodos como el *QR-iterativo* o el de *Jacobi generalizado* por ejemplo y en cambio es

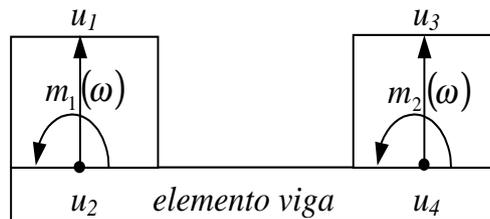


Figure 3: Elemento viga usado para la implementación del concepto de *masa aparente* en el programa de elementos finitos

conveniente resolver el problema con el *método de mitad de intervalo* (half interval method) o algún otro algoritmo de esas características,^{6,7}

2.2 Multiplicadores de Lagrange

Otro método para abordar el problema es el método de los multiplicadores de Lagrange. Este método fue aplicado con éxito por Dowell para un sistema de un grado de libertad acoplado a una viga⁴ y aquí intentaremos exponerlo brevemente.

Considerando el mismo caso anterior, es decir r masas adosadas elásticamente, planteamos la energía cinética y potencial para el sistema total (vigas-sistemas elásticos adosados). Sabiendo que

$$w(x, t) = \sum_{i=1}^n \bar{W}_i(x) q_i(t) \quad (9)$$

La energía cinética y potencial total es

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n M_i \dot{q}_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^r m_\nu \dot{z}_\nu^2 \quad (10)$$

$$V = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \omega_i^2 q_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^r k_\nu (z_\nu - z_{0\nu})^2 \quad (11)$$

Donde las variables $z_\nu, z_{\nu 0}$ son introducidas como variables auxiliares del problema (figura 2)

Aplicando las ecuaciones de Lagrange con restricciones, que se introducen a las ecuaciones a través de los multiplicadores de Lagrange λ_ν , resulta

$$\begin{aligned} \ddot{q}_k + \omega_k^2 q_k &= \sum_{\nu=1}^r \lambda_\nu \overline{W}_k(x_\nu) & k = 1, \dots, n; \quad \nu = 1, \dots, r \\ m_\nu \ddot{z}_\nu + k_\nu(z_\nu - z_{0\nu}) &= 0 & \nu = 1, \dots, r \\ k_\nu(z_\nu - z_{0\nu}) &= \lambda_\nu \end{aligned} \quad (12)$$

Asumiendo movimiento armónico simple en las variables $q_k = \overline{q}_k e^{i\omega t}$, $z_\nu = \overline{z}_\nu e^{i\omega t}$ y $z_{0\nu} = \overline{z}_{0\nu} e^{i\omega t}$, se despejan las q_k , z_ν , $z_{0\nu}$ en función de las λ_ν y se reemplazan en las ecuaciones que representan las restricciones

$$f_\nu = \sum_{i=1}^n \overline{W}_i(x_\nu) q_i(t) - z_{0i} = 0 \quad (13)$$

de forma que nos queda finalmente, escribiendo las ecuaciones en forma matricial.

$$[B]\{\lambda\} = 0 \quad (14)$$

donde $\{\lambda\}_{r \times 1}$, es el vector de los r multiplicadores de Lagrange y la matriz $[B]_{r \times r}$ viene dada por

$$B_{ij} = \sum_{k=1}^n \frac{\phi_k(x_i) \phi_k(x_j)}{M_k(\omega_k^2 - \omega^2)} - \frac{1}{m_{a,i} \omega^2} \delta_{ij} \quad i, j = 1 \dots r \quad (15)$$

donde δ_{ij} es la delta de Kronecker, $m_{a,i}$ es la i -ésima masa aparente calculada en la sección anterior y M_k está definido como

$$M_k = \rho A \int_0^l \phi_i(x) \phi_j(x) dx \quad (16)$$

Para obtener las frecuencias finalmente hacemos $\det[B] = 0$. Notemos que si el número de masas adosadas r es menor al número de modos n asumidos en la expansión de la función desplazamiento $w(x, t)$ resulta que en este caso debemos resolver un determinante de orden $r < n$ con las ventajas que ello implica.

2.3 Método de los elementos finitos (FEM)

En esta sección no se pretende hacer una revisión del método de elementos finitos, ya que la misma se puede encontrar en cualquier texto dedicado al tema,⁸ sino que la intención es mostrar una de las formas en que se pueden aplicar los conceptos anteriormente mencionados en la técnica de elementos finitos para resolver el problema.

Consideremos nuevamente el sistema viga al cual se le agregan r masas adosadas elásticamente. Si discretizamos el dominio de la viga en una determinada cantidad de elementos, como sucede

de manera usual en FEM, la forma de ubicar los sistemas elásticos se hará de manera de poder utilizar el concepto de *masa aparente*.⁶

Supongamos que el elemento i de la viga sea de la forma que se muestra en la figura 3. Luego, la matriz de masa $[M]_e$ y la matriz de rigidez $[K]_e$ vienen dadas por, en virtud de las definiciones de *masa aparente* dadas en la sección 2.1

$$M_e = \begin{pmatrix} M_{e11} + m_{a,1} & M_{e12} & M_{e13} & M_{e14} \\ M_{e21} & M_{e22} & M_{e23} & M_{e24} \\ M_{e31} & M_{e32} & M_{e33} + m_{a,2} & M_{e34} \\ M_{e41} & M_{e42} & M_{e43} & M_{e44} \end{pmatrix}$$

$$K_e = \begin{pmatrix} K_{e11} & K_{e12} & K_{e13} & K_{e14} \\ K_{e21} & K_{e22} & K_{e23} & K_{e24} \\ K_{e31} & K_{e32} & K_{e33} & K_{e34} \\ K_{e41} & K_{e42} & K_{e43} & K_{e44} \end{pmatrix}$$

En donde los coeficientes M_{eij} y K_{eij} son los coeficientes usuales en las matrices de masa y rigidez de un elemento viga libre y $m_{a,1}$ y $m_{a,2}$ son las masas aparentes de los sistemas masa-resorte que se ven en la figura 3, que se adosan a los nodos 1 y 3 en este caso.

Las frecuencias naturales $\bar{\omega}_j$ son determinadas a partir de las siguientes ecuaciones, como resulta de aplicar el método convencional de los elementos finitos

$$[M]\{\ddot{q}\} + [K]\{q\} = 0 \quad (17)$$

donde las matrices $[M]$ y $[K]$ son las matrices de masa y rigidez globales de toda la viga obtenida de ensamblar las matrices de cada elemento $[M_e]$ y $[K_e]$ e imponiendo las condiciones de borde que correspondan y $\{\ddot{q}\}$ y $\{q\}$ son los vectores aceleración y desplazamiento de los nodos.

Como fue mencionado anteriormente, el autovalor incógnita está metido dentro de la matriz $[M]$ es por eso que se deben emplear método no convencionales de obtención de autovalores como el de *mitad de intervalo* para resolver el problema.

2.4 Método de receptancia

Si tenemos un sistema masa-resorte, la expresión de la *masa aparente* está dada por la ecuación 1. Ahora bien, la receptancia de este sistema, por definición, resulta ser

$$\alpha = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{k\omega^2} \quad (18)$$

donde $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ es la frecuencia natural del sistema masa-resorte de la figura 1. Recordemos que la receptancia está definida como la razón entre el desplazamiento en un cierto punto de un sistema con la fuerza ejercida en ese mismo punto sobre él (receptancia directa),⁹ es decir

$$\alpha = \frac{x}{F} \quad (19)$$

Por otro lado, la receptancia de una viga α_{xh} que es excitada con una fuerza armónica $F e^{i\omega t}$ está dada por

$$\alpha_{xh} = \alpha_{hx} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\phi_i(x)\phi_i(h)}{M_i(\omega_i^2 - \omega^2)} \quad (20)$$

y representa el desplazamiento de la viga en cualquier sección x de la misma si una fuerza armónica lateral de la forma $F e^{i\omega t}$ es aplicada a la viga en el punto $x = h$,

$$w(x) = \alpha_{xh} F e^{i\omega t} \quad (21)$$

Si bien la definición de receptancia contempla la suma de los infinitos modos involucrados, en adelante tomaremos los n primeros de forma de poder realizar los cálculos.

Para poder obtener las frecuencias debemos acoplar ambas receptancias la del sistema masa-resorte y la de la viga, lo cual se realiza mediante el siguiente teorema.

Si B y C son dos subsistemas, en nuestro caso B (viga), y C (sistema masa-resorte) de un sistema oscilante A y existe una sola coordenada que los une q_l coordenada común a ambos sistemas, entonces la receptancia α_{ll} de A en q_l viene dada por la ecuación

$$\frac{1}{\alpha_{ll}} = \frac{1}{\beta_{ll}} + \frac{1}{\gamma_{ll}} \quad (22)$$

La ecuación de frecuencias queda en este caso

$$\frac{1}{\alpha_{ll}} = 0 \Rightarrow \gamma_{ll} + \beta_{ll} = 0 \quad (23)$$

Volviendo al problema de las r masas adosadas, debemos agregar a la viga no uno sino múltiples sistemas de un grado de libertad. Para ello debemos generalizar el teorema anterior para el caso en que tengamos r sistemas elásticos adosados. Entonces, si dos subsistemas están unidos por r coordenadas la ecuación de frecuencias se convierte en

$$\begin{vmatrix} \beta_{11} + \gamma_{11} & \beta_{12} + \gamma_{12} & \dots & \beta_{1r} + \gamma_{1r} \\ \beta_{21} + \gamma_{21} & \beta_{22} + \gamma_{22} & \dots & \beta_{2r} + \gamma_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_{r1} + \gamma_{r1} & \beta_{r2} + \gamma_{r2} & \dots & \beta_{rr} + \gamma_{rr} \end{vmatrix} = 0$$

Por lo tanto sabiendo que

$$\beta_{ij} = \sum_{k=1}^n \frac{\phi_k(x_i)\phi_k(x_j)}{M_k(\omega_k^2 - \omega^2)} \quad i, j = 1 \dots r \quad (24)$$

y

$$\gamma_{ij} = \delta_{ij} \frac{\omega^2 - \omega_i^2}{k_i \omega^2} \quad i, j = 1 \dots r \quad (25)$$

donde ω_i son las frecuencias naturales de los r sistemas adosados y M_k definido anteriormente, obtenemos la ecuación de frecuencias como la habíamos obtenido a través del método los multiplicadores de Lagrange. La ventaja sobre el mismo es que, además de conservar sus características respecto del tiempo y algoritmo de cálculo, esta metodología permite calcular casi en forma automática, es decir sin necesidad de plantear las ecuaciones de movimiento, la ecuación de frecuencias, sabiendo la receptancia de cada uno de los sistemas involucrados.

3 EJEMPLOS NUMÉRICOS

En esta sección utilizaremos los distintos métodos propuestos anteriormente para que se puedan visualizar y corroborar los resultados que se anticiparon anteriormente. Para ello proponemos el siguiente problema.

Calcular, con las distintas metodologías propuestas, las cinco primeras frecuencias naturales de vibración en los siguientes casos.

- viga con 3 sistemas de 1 grado de libertad adosados.
- viga con 10 sistemas de 1 grado de libertad adosados.

Comparar el tiempo estimativo de cálculo entre los distintos métodos.
Establecer conclusiones a partir de los resultados obtenidos.

3.0.1 Resultados obtenidos

En la tabla 1 se muestran las primeras 5 frecuencias naturales obtenidas por los distintos métodos descritos anteriormente para el caso en que 3 sistemas de 1 grado de libertad estén montados sobre una viga cantilever cuyos parámetros de diseño fueron, $k_{m,1} = 3k_b$, $m_{m,1} = 0.2m_b$; $k_{m,2} = 4.5k_b$, $m_{m,2} = 0.5m_b$; $k_{m,3} = 6k_b$, $m_{m,3} = 1.0m_b$, $l = 1\text{m}$, $kb = EI/l^3 = 6.34761 \times 10^4 \text{N/m}$, $m_b = 15.3875 \text{kg}$. Estos valores han sido propuestos de forma de poder compararlos con los obtenidos anteriormente por Wu y Chou.⁶

Los valores que se presentan en la tabla 1 fueron obtenidos de la siguiente forma.

Tanto para el método de *masa aparente* como el de *elementos finitos*, en la tabla 1 se representaron los mismos valores que los obtenidos en el trabajo de Wu y Chou⁶ en donde el método ANCM allí presentado es equivalente al de *masa aparente* y el FEM corresponde al de elementos finitos. Para el método de los multiplicadores de Lagrange y receptancia, que dan lugar, por su formulación, a idénticos resultados, se utilizó el programa Maple¹⁰ y su rutina *fsolve*. Posteriormente los mismos cálculos fueron realizados con Matlab¹¹ empleando la rutina *fzero*, arrojando los mismos resultados que Maple. El tiempo empleado que puede verse en la última columna de la tabla 1 fue computado a partir del programa Matlab ya que resultó ser considerablemente más rápido que el programa Maple en este caso.

Para la viga con 10 sistemas masa-resorte adosados, cuyos valores de diseño se muestran en la tabla 3, los valores numéricos para las 5 primeras frecuencias naturales de vibración pueden verse en la tabla 4.

También en el caso del método de *masa aparente* y de *elementos finitos* los resultados mostrados corresponden a los de la tabla 4 del trabajo de Wu y Chou.

Para el caso de los *multiplicadores de Lagrange* y también para el método de *receptancia*, los programas utilizados fueron, como en el caso anterior, Maple y Matlab. Ambos mostraron dificultades a la hora de calcular las frecuencias de vibración debido a que el determinante ecuación resultante que debía resolverse era de orden 10. Tener un orden tan grande en el determinante implica en este caso que los coeficientes en el polinomio que se obtiene a partir del determinante, tengan un valor excesivamente grande y manejar números tan grandes se vuelve intratable desde un punto de vista numérico para estos programas. Es por eso que los resultados que pueden verse en la tabla 4, además de que el tiempo empleado para obtenerlos fue muy superior al de los otros métodos allí mostrados, carecen de precisión y son poco confiables.

Table 1: Primeras cinco frecuencias naturales de vibración de una viga cantilever a la cual se le adosan 3 sistemas masa-resorte ($k_{m,1} = 3k_b$, $m_{m,1} = 0.2m_b$; $k_{m,2} = 4.5k_b$, $m_{m,2} = 0.5m_b$; $k_{m,3} = 6k_b$, $m_{m,3} = 1.0m_b$, $l = 1m$, $k_b = EI/l^3 = 6.34761 \times 10^4 N/m$, $m_b = 15.3875$ kg)

Posición de las masas			Métodos	Frecuencias naturales (rad/s)					tiempo (s)
x_1	x_2	x_3		$\bar{\omega}_1$	$\bar{\omega}_2$	$\bar{\omega}_3$	$\bar{\omega}_4$	$\bar{\omega}_5$	
0.1	0.4	0.8	Masa aparente	102.7175	188.7607	248.5116	349.1476	1427.9722	5.05 s
			Mult. de Lagrange	102.7961	188.7437	248.6614	349.1241	1427.9611	0.85 s
			FEM	102.7987	188.7388	248.6632	349.1174	1428.0327	19.18 s
			Receptancia	102.7961	188.7437	248.6614	349.1241	1427.9611	0.85 s

Table 2: Ubicaciones y valores de los 10 sistemas masa-resorte adosados a la viga

Sistema montado	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Ubicación $x_i^* = x_i/l$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	10
Valor de $k_i^* = k_i/k_b$	3	4.8	3	4.5	4	5.5	5	6	4.5	2.6
Valor de $m_i^* = m_i/m_b$	0.2	0.6	0.2	0.5	0.3	0.8	0.65	1	0.5	1
Frecuencia ω_i	248.7521	181.6628	248.7521	192.6825	234.5257	168.4059	178.1350	157.3246	192.6825	327.4973

4 CONCLUSIONES

En este trabajo se presentaron diversas metodologías de cálculo para obtener frecuencias de vibración de sistemas estructurales a los cuales se le adosan sistemas masa-resorte al mismo tiempo en que se mostraron ejemplos calculados para señalar las ventajas y desventajas de unas y otras.

Table 3: Primeras cinco frecuencias naturales de vibración de una viga cantilever a la cual se le adosan 10, cuyos valores se encuentran en la tabla 3

Métodos	Frecuencias naturales (rad/s)					tiempo (s)
	$\bar{\omega}_1$	$\bar{\omega}_2$	$\bar{\omega}_3$	$\bar{\omega}_4$	$\bar{\omega}_5$	
Masa aparente	77.4453	162.8975	172.2979	181.0118	183.0263	8.98 s
Mult. de Lagrange	78.3193	151.8605	169.4538	181.6628	196.8592	130 s
FEM	77.4452	162.8876	172.2835	181.0045	183.0103	22.08 s
Receptancia	78.3193	151.8605	169.4538	181.6628	196.8592	130 s

A partir de los ejemplos mostrados se puede concluir que para sistemas en los cuales el número de masas adosadas r es menor al número de modos empleados en la función desplazamiento del sistema estructural (en nuestro caso n), esto es $r < n$ es más conveniente utilizar la metodología de *multiplicadores de Lagrange* o *receptancia* (ambas equivalentes) ya que la ecuación de autofrecuencias resultante conduce a un determinante de orden r , a diferencia del *método de masa aparente* que conduce a un determinante de orden n o el de elementos finitos ya que es, en general, más complejo de implementar. Ahora bien si se quieren implementar los cálculos a partir de programas comerciales como en nuestro caso Maple o Matlab, no es conveniente que el número de masas adosadas supere las 5 ($r < 5$), aún si ($r < n$) para $r \geq 5$ ya que como vimos el tiempo empleado aumenta considerablemente y es mejor implementar códigos propios.

Si el número de masas r es mayor que n , el *método de masa aparente* es el más conveniente ya que en este caso el orden del determinante es n . De los resultados mostrados en las tablas puede verse que y los códigos que contemplan este tipo de problemas como el ya mencionado *método de mitad de intervalo*, resulta más rápidos y precisos.

5 AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido posible gracias al aporte del Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET), de la Agencia Nacional de Promoción Científica y Técnica (PICT 13-13033) y de la Secretaría de Ciencia y Tecnología de la Universidad Nacional del Sur a través del Departamento de Física (PGI 24/F032. Director: C. A. Rossit). Los autores también agradecen los valiosos comentarios y críticas constructivas del Profesor P. A. A. Laura.

REFERENCES

- [1] J. Ormondroyd and J. P. Den Hartog. Theory of the dynamic absorber. *Trans. of the Amer. Soc. of Mech. Eng.*, **50**, 7 (1928).
- [2] P. A. A. Laura, E. A. Susemihl, J. L. Pombo, L. E. Luisoni, and R. Gelos. On the dynamic behaviour of structural elements carrying elastically mounted concentrated masses. *Applied Acoustics*, **10**, 121–145 (1977).
- [3] M. Gurgoze. On the eigenfrequencies of a cantilever beam with attached tip and a spring-

- mass system. *Journal of Sound and Vibration*, **190**, 149–162 (1996).
- [4] E. H. Dowell. On some general properties of combined dynamical systems. *Journal of Applied Mechanics*, **46**, 206–209 (1979).
- [5] C.M. Harris and C.E. Crede. *Handbook of Shock and Vibration Book Co.* Mc Graw Hill, (1976).
- [6] J. S. Wu and H. M. Chou. Free vibration analysis of a cantilever beam carrying any number of elastically mounted point masses with the analytical and numerical combined method. *Journal of Sound and Vibration*, **213**, 317–332 (1998).
- [7] J.D. Faires and R.L. Burden. *Numerical Methods*. PWS Publishing, (1993).
- [8] O.C. Zienkiewicz and R.L. Taylor. *The finite element method*, volume II. McGraw Hill, (1991).
- [9] R.E.D Bishop and D.C. Johnson. *The mechanics of vibration*. Cambridge University Press, (1960).
- [10] MAPLE VII. *Waterloo Maple, Inc.* (2001).
- [11] Matlab VI. *The MathWorks, Inc.* (2000).
- [12] A.W. Leissa. *Vibration of Plates*. Acoustical Society of America, (1993).
- [13] ALGOR. *ALGOR, Inc.* (2000).