

MODELADO DE UN AMORTIGUADOR GRANULAR

Martín Sánchez^{a,b} y Luis A. Pagnaloni^b

^a*Departamento de Ingeniería Mecánica, Facultad Regional La Plata, Universidad Tecnológica Nacional, 60 esq. 124 S/N, 1900 La Plata, Argentina. sanchez.martin@frlp.utn.edu.ar, <http://www.frlp.utn.edu.ar>*

^b*Instituto de Física de Líquidos y Sistemas Biológicos (CONICET La Plata, UNLP), 59 No 789, 1900 La Plata, Argentina. luis@iflysib.unlp.edu.ar, <http://www.iflysib.unlp.edu.ar>*

Palabras Clave: Materiales Granulares, Amortiguación, Vibraciones Mecánicas.

Resumen. El presente trabajo estudia el comportamiento de un amortiguador de vibraciones mecánicas formado por partículas disipativas. A través de simulaciones mediante el método de elementos discretos se estudia la eficiencia de un amortiguador compuesto por un receptáculo prismático que contiene partículas esféricas que interactúan mediante fuerzas disipativas (colisiones inelásticas y fricción). El amortiguador está acoplado a un sistema primario sometido a vibraciones forzadas con excitación armónica. Se estudia la respuesta del sistema en función del tamaño del recinto de contención y del número de partículas. Se analizan varias configuraciones manteniendo constantes las características principales (forma, propiedades materiales, etc.) de manera de determinar el efecto de la geometría del receptáculo.

1. INTRODUCCIÓN

En la actualidad, la mayoría de los sistemas mecánicos, tales como maquinarias rotantes, estructuras aeronáuticas o aeroespaciales y estructuras civiles en general, logran la amortiguación necesaria a través de dispositivos compuestos de materiales visco-elásticos o fluidos viscosos.

En general, los materiales visco-elásticos y los fluidos viscosos son muy eficaces, desde el punto de vista de la amortiguación, en medios a temperatura ambiente o moderadas (menores de 250 °C), pero el rendimiento de estos es pobre en bajas y altas temperaturas. Más aun, estos materiales se degradan poco a poco con el tiempo y pierden su efectividad.

El amortiguador granular es un elemento que aumenta el amortiguamiento estructural mediante la inserción de partículas disipativas en un recinto adjunto a la estructura vibrante (Panossian, 1992). Las partículas absorben la energía cinética de la estructura y la convierten en calor a través de las colisiones inelásticas y la fricción entre las mismas partículas y entre las partículas y las paredes del recinto.

Se ha demostrado que el amortiguador de partículas es eficaz en un amplio rango de frecuencias (Panossian, 1992). Por otra parte, los amortiguadores de partículas son muy durables, rentables y fáciles de mantener. Debido a estas ventajas, este tipo de amortiguador de vibraciones mecánicas es visto hoy en día como una tecnología prometedora para el diseño de los amortiguadores de próxima generación.

Parámetros tales como el tamaño y la forma de las partículas, la distribución de tamaño, la densidad, el coeficiente de restitución, el coeficiente de fricción, la forma y la superficie del recinto, el tipo de excitación del sistema primario, la amplitud de la vibración, las frecuencias de excitación, entre otras tantas características, pueden tener importancia en la performance del amortiguamiento. Así, el tratamiento adecuado del amortiguador de partículas en una estructura determinada requiere de un cuidadoso análisis y diseño.

En los amortiguadores granulares se utiliza un gran número de pequeñas partículas, y por lo tanto el comportamiento del mismo se relaciona directamente con los movimientos cooperativos de las mismas dentro de la cavidad. Los modelos teóricos derivados de sistemas de una sola partícula (Duncan et al., 2005) no son aplicables para predecir la performance de sistemas multi-partículas. Desde hace más de 15 años, la simulación dinámica de partículas se ha utilizado como una potente herramienta para investigar el comportamiento de este tipo de sistemas granulares. Se ha utilizado esta técnica de simulación para estudiar el comportamiento de amortiguación de sistemas horizontales sometido a excitación armónica (Saeki, 2001), en el cual la gravedad no es tan importante como en un sistema vertical. Por otro lado, inspirados por la simulación numérica y los resultados experimentales, Fang y Tang (Fang y Tang, 2006) desarrollaron un modelo analítico que puede predecir cuantitativamente la performance de un amortiguador de partículas.

El presente trabajo analiza el comportamiento de un amortiguador de partículas disipativas formado por un recinto prismático adjunto a un sistema primario vertical vibrante de un grado de libertad sometido a excitación armónica. Con dicho sistema se describe la performance de la amortiguación en función de la altura de la cavidad de contención manteniendo constante el material de las partículas disipativas, la relación de masas entre las partículas y el sistema primario y la amplitud de la excitación armónica. Con el fin de obtener resultados generales se varía el número de partículas en el recinto y la frecuencia de excitación.

2. MÉTODO DE ELEMENTOS DISCRETOS

El Método de Elementos Discretos (DEM - por sus siglas en inglés) consiste en un esquema numérico que permite calcular rotaciones y deslizamientos finitos de cuerpos rígidos avanzando a intervalos cortos de tiempo δt siempre que se conozcan las fuerzas y torques a los que dichos cuerpos están sometidos. Cundall y Strack (Cundall y Strack, 1979) originaron el concepto del DEM y lo aplicaron para modelar el comportamiento de partículas del suelo bajo condiciones de cargas dinámicas.

Las actualizaciones de posiciones y velocidades (de traslación y rotación) se han implementado usando el algoritmo de Verlet con velocidades (Allen y Tildesley, 1989). Se ha utilizado además una representación de cuaterniones (Goldstein, 2002), libre de singularidad numérica, para el cálculo de las orientaciones de las partículas.

Si se consideran partículas esféricas blandas, cuando dos partículas chocan, la pequeña penetración producida genera una fuerza repulsiva en la dirección normal y una fuerza de fricción en la dirección tangencial. Las fuerzas de interacción entre dos cuerpos al colisionar pueden calcularse a partir de relaciones empíricas de fuerza-desplazamiento basadas en la mecánica de contacto. En este contexto, existen varios trabajos en los cuales se estudian las interacciones generadas por las partículas, específicamente se ha tomado para el análisis del amortiguador granular las interacciones presentadas por Schäfer *et al.* (Schäfer *et al.*, 1996).

Si R_i y R_j son los radios de las partículas que colisionan en un instante de tiempo determinado, $\alpha = R_i + R_j - d_{ij}$ será el desplazamiento normal o penetración entre las esferas; donde d_{ij} es la distancia entre los centros de las esferas. En estas condiciones, la fuerza de interacción en la dirección normal F_n es basada en el modelo de Hertz (Schäfer *et al.*, 1996)

$$F_n = -k_n \alpha^{3/2} - \gamma_n v_n \sqrt{\alpha}. \quad (1)$$

donde k_n es la rigidez normal, γ_n el coeficiente de amortiguamiento normal visco-elástico de contacto y v_n la velocidad normal relativa entre las dos esferas que colisionan.

Por otro lado, en la dirección tangencial, la fuerza de fricción F_s entre las dos esferas en contacto ha sido modelada según la ley de fricción de Coulomb (Schäfer *et al.*, 1996). Se ha utilizado un modelo simplificado en el cual la fuerza de fricción toma el valor mínimo entre la fuerza de amortiguamiento de corte y la fricción dinámica.

$$F_s = -\min(|\gamma_s v_s \sqrt{\alpha}|, |\mu_d F_n|) \operatorname{sign}(v_s). \quad (2)$$

donde γ_s es el coeficiente de amortiguamiento de corte, v_s la velocidad tangencial relativa entre las dos esferas que entran en contacto y μ_d el coeficiente de fricción dinámica. La función signo indica que la fuerza de fricción siempre se opone a la dirección de la velocidad relativa tangencial.

3. MODELO DE SIMULACIÓN

El modelo de un grado de libertad mostrado en la Fig. 1 ha sido simulado sometido a un movimiento de base armónico. Los parámetros de simulación han sido adimensionados de modo que la unidad de masa corresponde a la masa M , del sistema primario, la unidad de longitud es la magnitud U de excitación de la base y el tiempo unitario es $\sqrt{U/g}$, siendo g la aceleración de la gravedad. El sistema primario (sin considerar las partículas en el recinto) consta de masa M , rigidez $K = 5,35Mg/U$ y amortiguamiento estructural viscoso $C = 0,27M\sqrt{g/U}$. Bajo estas condiciones, la frecuencia natural no amortiguada del sistema primario es $f_0 = 0,37\sqrt{g/U}$.

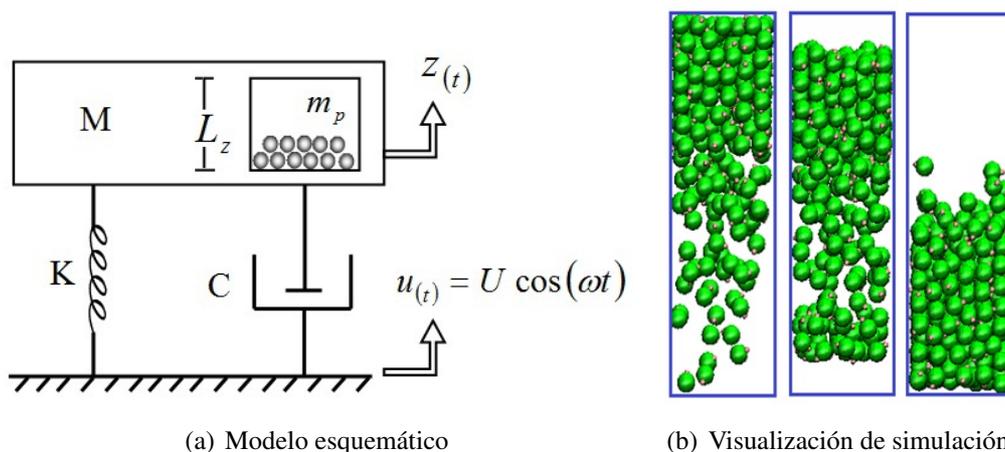


Figura 1: Modelo del amortiguador granular.

La ecuación diferencial para el sistema total (primario más amortiguador granular) es:

$$M\ddot{z}(t) + C\dot{z}(t) + Kz(t) = C\dot{u}(t) + Ku(t) + F_{granular}; \quad u(t) = U\cos(\omega t). \quad (3)$$

donde $F_{granular}$ es la fuerza ejercida por las partículas sobre las paredes del recinto en la dirección vertical y $u(t)$ es el desplazamiento de la base impuesto como excitación externa. En cada paso de tiempo δt de la simulación, $F_{granular}$ es calculada a partir de las interacciones de contacto entre el recipiente y las partículas en su interior. Si bien las partículas ejercen fuerzas en todas las direcciones al contactar las paredes del recinto, sólo la contribución en la dirección vertical es insertada en el sistema de un grado de libertad considerado por la ecuación (3).

Con el fin de analizar la performance del amortiguador de partículas disipativas en función de las características del recinto de contención se han modelado varios receptáculos variando la altura L_z de los mismos ($L_z = 10.4U; 13.4U; 17U; 19U; 22U; 24U; 26U; 30U; 33.4U; 53U; 66U$ y $110U$). Para cada uno de los recintos analizados se ha estudiado la influencia del número N de partículas del amortiguador granular. Las partículas se han modelado esféricas con una dispersión de alrededor de 8% en los radios. La comparación entre los diferentes modelos se ha realizado manteniendo constante la relación de masas (cociente entre la masa total m_p de las partículas y la masa M del sistema primario) y la amplitud U del movimiento de la base en todos los casos estudiados. La Tabla 1 muestra las características materiales de las partículas y los parámetros de la simulación que se han mantenido constantes en este trabajo y la Tabla 2 muestra las características que fueron variadas al cambiar N .

Con el fin de lograr una condición inicial del sistema invariante y representativa para cada una de las simulaciones se han depositado las partículas en el fondo de los diferentes recintos de contención antes de aplicar la excitación de la base a la frecuencia deseada f . Se han estudiado valores de frecuencias en el rango $[0.011\sqrt{g/U} - 0.678\sqrt{g/U}]$. Luego de un transitorio inicial, el movimiento entra en un estado estacionario. Este estado estacionario puede mostrar comportamiento tanto periódico como caótico, dependiendo de la frecuencia de excitación, tamaño del recinto, etc. En todos los casos se ha utilizado para el análisis el 10% final del tiempo de las simulaciones, lo que ha resultado suficiente para garantizar, bajo las características descriptas, que el sistema alcance el estado estacionario.

Propiedad	Valor
Masa del sistema primario M	1.0
Amplitud de excitación U	1.0
Aceleración de la gravedad g	1.0
Rigidez del resorte del sistema primario K	$5,35Mg/U$
Amortiguamiento estructural viscoso C	$0,27M\sqrt{g/U}$
Modulo de Young E	$21,0Mg/U^2$
Densidad ρ	$3,95 \times 10^{-5}M/U^3$
Coefficiente de Poisson ν	0.33
Rigidez normal de contacto k_n	$\frac{4}{3}E^*\sqrt{R^*}$
Coefficiente de fricción dinámica μ_d	0.3
Amortiguamiento normal de contacto γ_n	$0,0013M\sqrt{g/U}$
Amortiguamiento tangencial de contacto γ_s	$0,0038M\sqrt{g/U}$
Tiempo de integración δt	$4,43 \times 10^{-5}\sqrt{U/g}$
Tiempo total de simulación	$354,18\sqrt{U/g}$
Tamaño de la base del recinto	$20U \times 20U$

Tabla 1: Características materiales y parámetros de la simulación mantenidos constantes en este trabajo. Donde E^* es el modulo de elasticidad efectivo ($E^* = E/[2(1 - \nu^2)]$) y R^* es el radio efectivo de contacto ($1/R^* = 1/R_i + 1/R_j$) entre las partículas i y j .

	250 partículas	500 partículas	1000 partículas
Radio $[U]$	1.21 - 1.31	0.96 - 1.04	0.76 - 0.82
Masa total de las partículas $m_p [M]$	0.083	0.0827	0.0823
Altura de la capa granular en reposo $[U]$	10.24	10.34	9.986

Tabla 2: Diferentes configuraciones estudiadas variando el número de partículas usadas en el recinto y sus tamaños. Note que la relación de masas con el sistema primario se mantiene prácticamente constante.

4. RESULTADOS

En la Fig. 2(a) se muestra un ejemplo de la respuesta en frecuencia del sistema ($N = 500$) para la amplitud del movimiento Z_{\max} en el estado estacionario. Como referencia, se han incluido las curvas de respuesta teóricas correspondientes al sistema primario (sin las partículas del recinto) y al sistema primario con una masa corregida correspondiente a adicionar la masa de las partículas como si estuviesen solidarias a la masa primaria en todo momento (esto es, $M + m_p$). Se puede observar que la respuesta del sistema es similar a la del sistema primario con masa corregida si el recinto es pequeño (aproximadamente de la altura de la capa de partículas). Esto se debe a que las partículas están la mayor parte del tiempo en contacto con las paredes del recinto y pueden considerarse casi solidarias a la estructura primaria. En la Fig. 2(b) se observa el movimiento de la capa de granos entre el piso y techo del recinto para la caja de $L_z = 10,4U$ y $f/f_0 = 0,95$ donde puede apreciarse que las partículas se despegan de estos en intervalos muy cortos de tiempo. Por otro lado, para recintos mucho más grandes que la capa de partículas, el sistema presenta una respuesta similar a la del sistema primario (sin la adición de la masa m_p). Como se puede ver en la Fig. 2(c), esto es debido a que las partículas están despegadas del piso y techo del recinto la mayor parte del tiempo.

La Fig. 2(a) muestra claramente que la amortiguación debida a las partículas es mínima para recintos muy grandes o muy pequeños. En el último caso, sólo se produce una corrección

en la masa efectiva del sistema. Sin embargo, para recintos de tamaño intermedio se aprecia una considerable reducción de la amplitud de oscilación, especialmente en zonas cercanas a la frecuencia de resonancia del sistema primario (ver cuadrados azules en la Fig. 2(a)). Por otro lado, la frecuencia de resonancia resulta ser intermedia entre la del sistema primario (M) y la del sistema con masa corregida ($M + m_p$). Se puede observar, de acuerdo a la Fig. 2(d), que para recintos intermedios y para frecuencias f en las proximidades de la resonancia, el movimiento de impacto tiende a convertirse en periódico, existiendo dos golpes por periodo de movimiento (uno contra el techo y otro contra el piso del recinto) y produciendo de esta forma la mayor reducción de la Z_{\max} encontrada.

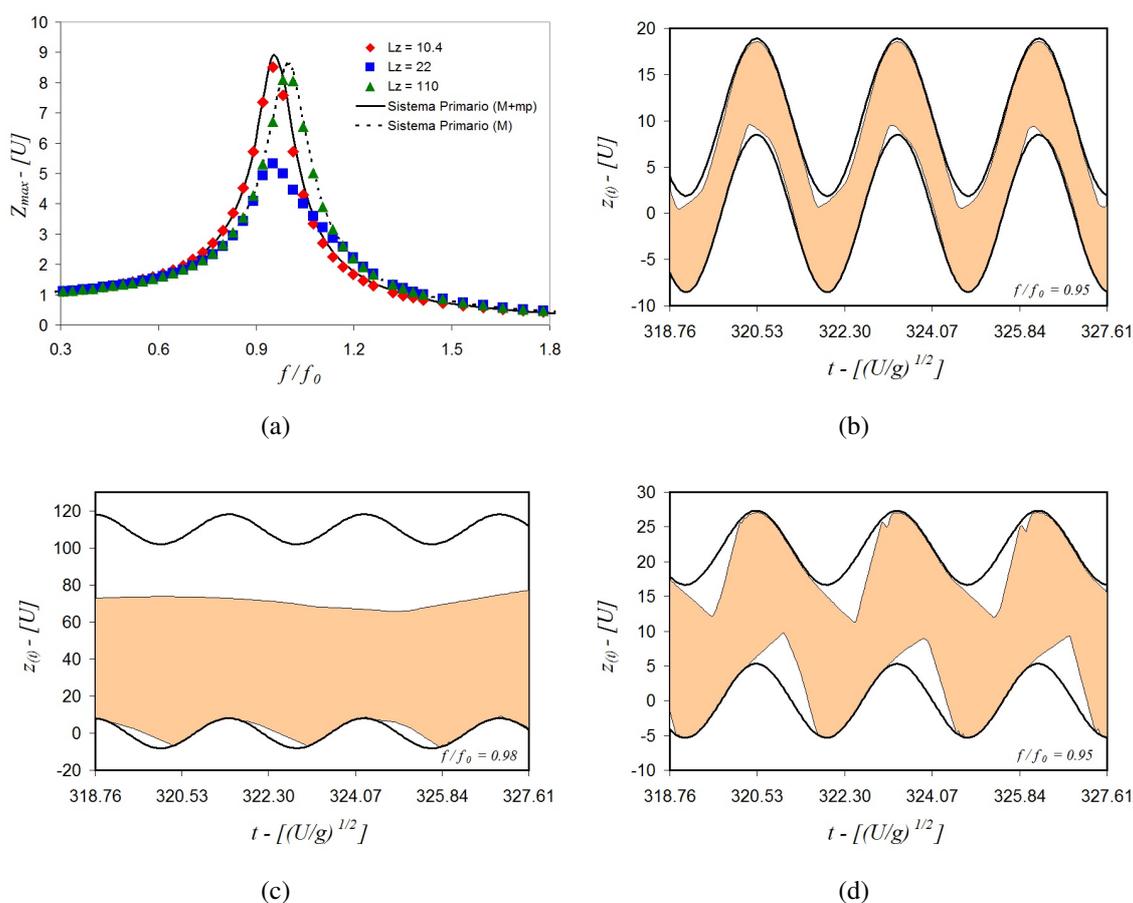


Figura 2: **(a)** Respuesta en frecuencia para máxima amplitud Z_{\max} del sistema en el estado estacionario para $N = 500$ y diferentes tamaños de caja $L_z = 10.4U$, $22U$ y $110U$. La línea de trazos corresponde al comportamiento del sistema primario (M) y la línea continua al sistema primario con masa corregida ($M + m_p$). **(b)** Movimiento del sistema con $N = 500$, $L_z = 10.4U$ y $f/f_0 = 0.95$. Las líneas continuas indican la posición del piso y techo del recinto y el área coloreada indica los límites de la capa de granos definidos como la posición de la partícula más baja y más alta en cada instante. **(c)** Movimiento del sistema con $N = 500$, $L_z = 110U$ y $f/f_0 = 0.98$. **(d)** Movimiento del sistema con $N = 500$, $L_z = 22U$ y $f/f_0 = 0.95$.

En la Fig. 3(a) se muestra la variación de la amplitud Z_{res} a la frecuencia de resonancia f_{res} como función de L_z para diferentes números de partículas N . Se puede observar que existe un valor óptimo de L_z para el cual se ha encontrado la menor amplitud de oscilación en resonancia. Más aún, el valor óptimo de la altura del recinto decrece conforme crece el número de partículas en el sistema. Asimismo, se presenta un cambio de comportamiento cerca de los valores óptimos

de L_z por el cual los sistemas con mayor número de partículas (radios menores) dejan de ser los que reducen más significativamente Z_{res} y resulta más eficiente, para grandes L_z , el uso de un menor número de partículas (radios mayores) en el recinto.

La presencia de un L_z óptimo y su dependencia con N es consistente con los resultados de Saeki *et al.* (Saeki, 2001). Estos autores se han concentrado en excitaciones horizontales de un recinto con granos. Sin embargo, cómo fuera discutido por Duncan *et al.* (Duncan *et al.*, 2005), el efecto de la gravedad es poco significativo a frecuencias cercanas a la frecuencia de resonancia. Es importante destacar que en este trabajo se ha analizado un rango de valores de L_z más amplio que el analizado por Saeki *et al.*. Los resultados presentados en la Fig. 3(a) permiten ver claramente que para recintos con L_z muy pequeña o muy grande el valor de Z_{res} es independiente del número de partículas usadas siempre que la relación de volumen y de masas entre el sistema primario y las partículas granulares se mantengan relativamente constantes.

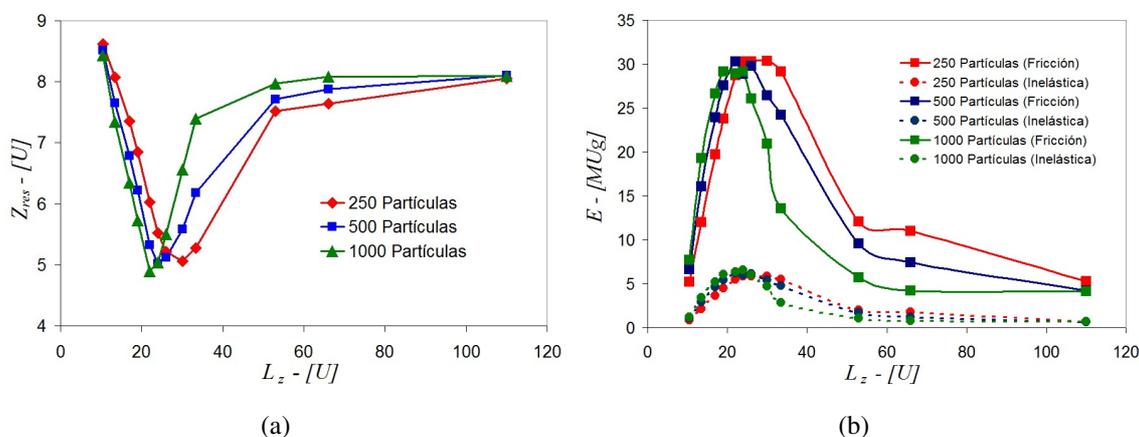


Figura 3: (a) Amplitud Z_{res} en el punto de resonancia del sistema como función del tamaño del recinto L_z para $N = 250, 500$ y 1000 . (b) Energía disipada en un ciclo debido a las colisiones inelásticas y fricción.

La energía disipada durante un ciclo de excitación a la frecuencia de resonancia se encuentra representada como función de L_z para diferentes valores de N en la Fig. 3(b). Se pueden observar aquí las mismas tendencias que en la Fig. 3(a), donde el sistema con mayor número de partículas disipa más energía para cajas con L_z menores al óptimo, pero esta disipación es menos eficiente para cajas con L_z mayores al óptimo. También se puede observar que la mayor cantidad de energía disipada es debida a la fricción de Coulomb entre las mismas partículas y entre las partículas y las paredes del recinto, teniendo menor influencia la energía de colisión inelástica en acuerdo con los resultados de Bai *et al.* (Bai *et al.*, 2009). Al igual que para la variación de Z_{res} en la Fig. 3(a), para recintos muy pequeños y muy grandes, en relación a la L_z óptima, no existe diferencias apreciables de energías disipadas cuando se modifica el número N de partículas.

Con el fin de analizar el comportamiento de una manera mas detallada en cuanto a la disipación de energía producida por el amortiguador granular, se ha representado en la Fig. 4 la variación en frecuencia de las energías de colisión inelástica y de fricción para la L_z óptima del sistema con $N = 500$. Tal como se ha comentado, la energía de disipación predominante es claramente la fricción de Coulomb en todo el rango de frecuencias.

En la Fig. 5 se puede observar el movimiento granular para distintas frecuencias en estado estacionario y para el mismo sistema presentado en la Fig. 4. En la Fig. 5(a), se puede ver clara-

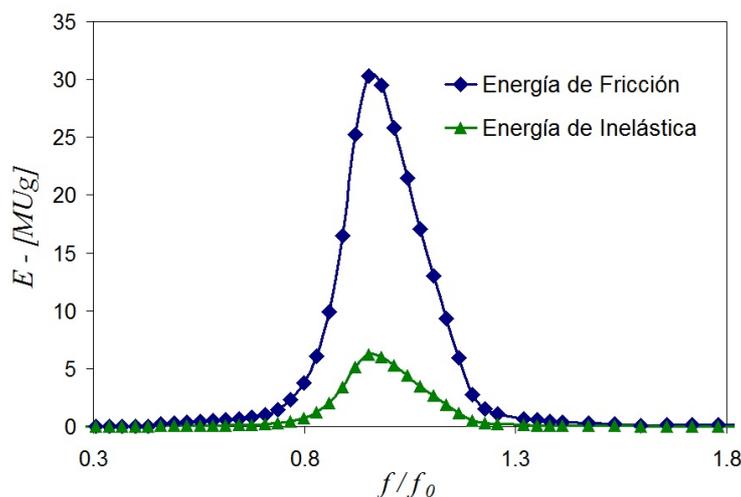


Figura 4: Variación en frecuencia de las energías de disipación para $L_z = 22U$ y $N = 500$.

mente que teniendo una frecuencia de excitación baja, con amplificación baja, la capa granular no pierde en ningún momento contacto con el recinto, lo cual genera muy bajo movimiento granular y por consiguiente baja disipación de las energías de fricción y colisión (ver Fig. 4).

Al aumentar la frecuencia de excitación, de acuerdo a la Fig. 5(b), la amplificación obtenida produce que las partículas superiores comiencen a colisionar con el techo del recinto, sin embargo, las zonas inferiores no tienen aún la aceleración necesaria para despegar en vuelo. En este momento, se puede observar que la compactación granular es baja y la energía de fricción comienza a aumentar conforme aumenta el movimiento relativo de las partículas (ver Fig. 4 para $f/f_0 = 0,64$).

La Fig. 5(c) muestra el momento para el cual la partículas inferiores tienen una aceleración tal que puede comenzar el vuelo. Se aprecia, un movimiento de impacto superior e inferior de tipo caótico. De acuerdo a la Fig. 4, la energía de colisiones inelásticas comienza a actuar en este momento.

A la frecuencia de máxima amplitud para el sistema analizado (Fig. 5(d)), se puede observar, como ya se ha mencionado, el comienzo de un movimiento de tipo periódico de impacto, con la mayor performance de amortiguación. En este caso, la capa granular se comporta como una masa compacta que se mueve como un todo de extremo a extremo del recinto.

Finalmente, las Fig. 5(e) y Fig. 5(f) son estados para frecuencia de excitación mayor a la resonancia del sistema. Básicamente se han observado comportamientos similares al de las Fig. 5(c) y Fig. 5(b) respectivamente pero con menor compactación granular lo que genera una menor performance de amortiguación.

5. CONCLUSIONES

Tal como han mostrado otros autores, el uso de partículas disipativas resulta un mecanismo viable para la amortiguación de un sistema mecánico. Los resultados presentados muestran que para obtener la mayor reducción de la amplitud de oscilación en frecuencias cercanas a la resonancia del sistema es necesario dimensionar el recinto en forma precisa o alternativamente seleccionar apropiadamente el tamaño y número de partículas a ser usadas. En particular, se ha encontrado, al igual que para un sistema vibrante horizontal, que existe un tamaño óptimo de L_z para el cual la amplitud Z_{res} encuentra el menor valor. Esta longitud óptima depende del

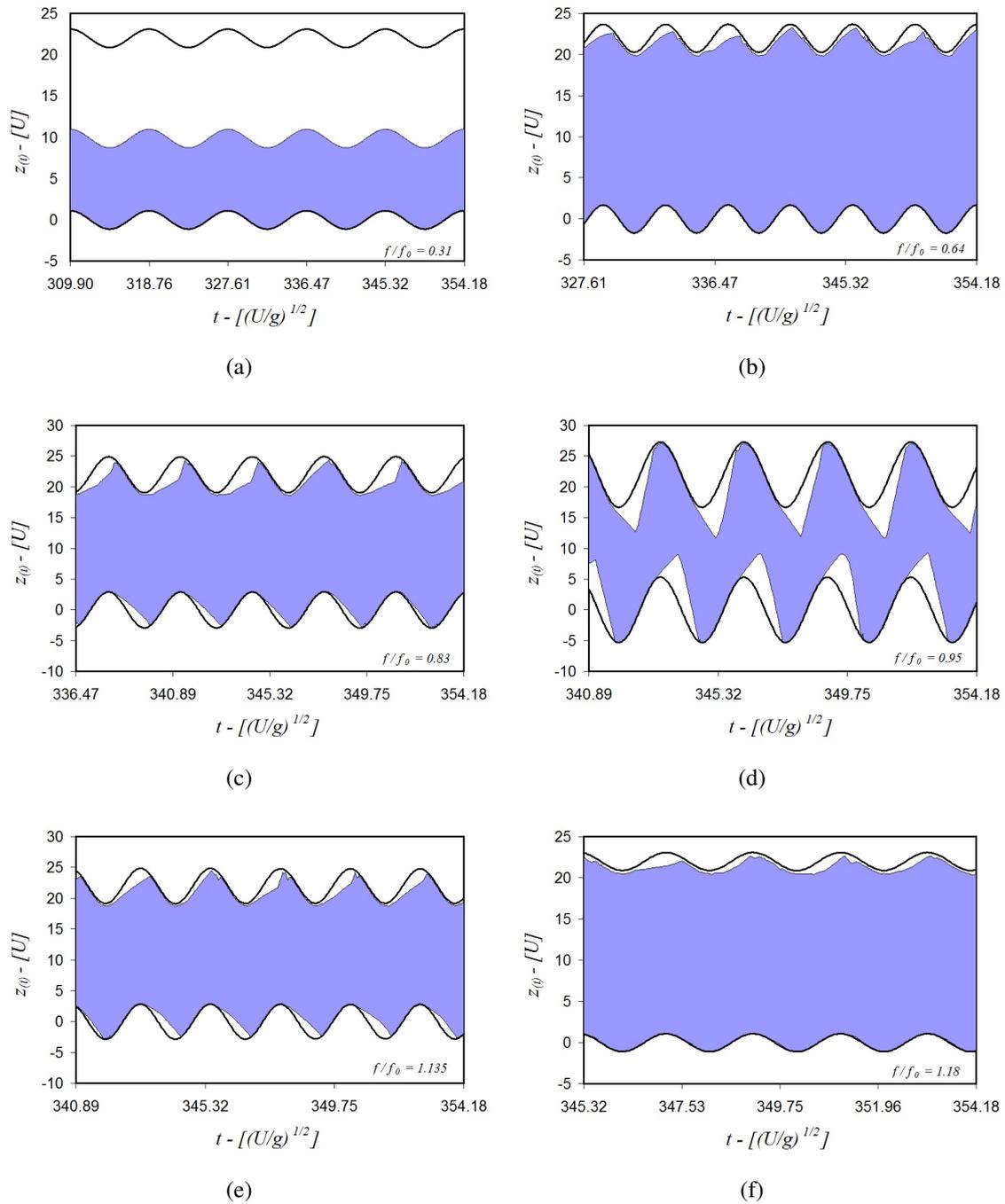


Figura 5: **(a)** Movimiento del sistema con $N = 500$, $L_z = 22U$ y $f/f_0 = 0,31$. Las líneas continuas indican la posición del piso y techo del recinto y el área coloreada indica los límites de la capa de granos definidos como la posición de la partícula más baja y más alta en cada instante. **(b)** $f/f_0 = 0,64$. **(c)** $f/f_0 = 0,83$. **(d)** $f/f_0 = 0,95$. **(e)** $f/f_0 = 1,135$. **(f)** $f/f_0 = 1,18$.

número de partículas disipativas del sistema y es debida a que el movimiento de la cama granular comienza a convertirse en periódico de impacto. Por otro lado, cuando se consideran recintos muy pequeños o muy grandes en relación a la L_z óptima, la dependencia de la performance de amortiguación con el número de partículas deja de existir debido principalmente a los pequeños o largos tiempos de vuelo. Se ha observado también que la energía disipativa predominante para el sistema estudiado es la fricción de Coulomb, sin importar el número de partículas ni el tamaño del recinto.

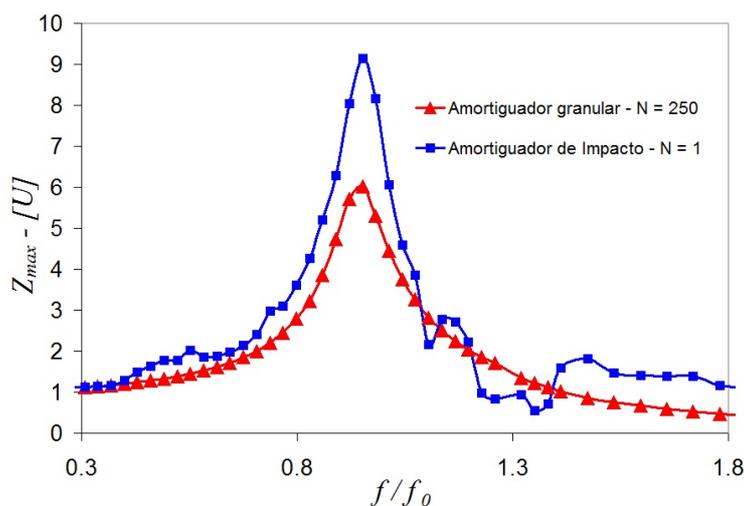


Figura 6: Respuesta en frecuencia para $N = 1$ y 250 con $L_z = 22U$.

Por último, es importante destacar que los amortiguadores de impacto (constituidos por una única partícula) son muy usados en la industria y han sido ampliamente estudiados en la literatura (Blazejczyk Okolewska, 2000; Duncan et al., 2005; Braun et al., 2002). Sin embargo, paradójicamente, el sistema constituido por una sola partícula presenta un comportamiento más complejo que el sistema granular estudiado en este trabajo. Como ejemplo se muestra en la Fig. 6 la respuesta en frecuencia de un sistema de una partícula de iguales propiedades a las estudiadas más arriba, con la misma relación de masas, y se compara con el correspondiente sistema granular de $N = 250$. El sistema de una partícula presenta una curva más compleja, con máximos secundarios. Basándose en esta figura, es claro que en un dispositivo donde la frecuencia de excitación pueda variar por diferentes motivos, caso muy usual en la práctica, la alta no linealidad de la respuesta del sistema puede comprometer seriamente la eficacia de la amortiguación en comparación con la respuesta del sistema con una cama granular.

AGRADECIMIENTOS

L.A.P. agradece el apoyo de la ANPCyT y del CONICET.

REFERENCIAS

- Allen M.P. y Tildesley D.J. *Computer Simulation of Liquids*. Oxford Science Publications, 1989.
- Bai X., Keer L., Wang Q., y Snurr R. Investigation of particle damping mechanism via particle dynamics simulations. *Granular Matter*, 11:417–429, 2009.
- Blazejczyk Okolewska B. Analysis of an impact damper of vibration. *Chaos, Solitons and Fractals*, 12:1983–1988, 2000.

- Braun S., Ewins D., y Rao S.S. *Encyclopedia of vibration*. Academic Press, 2002.
- Cundall P.A. y Strack O.D.L. A discrete numerical model for granular assemblies. *Geotechnique*, 29:47–65, 1979.
- Duncan M., Wassgren C., y Krousgrill C. The damping performance of a single particle impact damper. *Journal of Sound and Vibration*, 286:123–144, 2005.
- Fang X. y Tang J. Granular damping in forced vibration: qualitative and quantitative analyses. *Journal of Vibration and Acoustics*, 128:489–500, 2006.
- Goldstein H. *Classical Mechanics (3rd Edition)*. Addison Wesley, 2002.
- Panossian H.V. Structural damping enhancement via non-obstructive particle damping technique. *Journal of Vibration and Acoustics*, 114:101–105, 1992.
- Saeki M. Impact damping with granular materials in a horizontally vibrating system. *Journal of Sound and Vibration*, 251:153–161, 2001.
- Schäfer J., Dippel S., y Wolf D.E. Force schemes in simulations of granular materials. *Journal de Physique I*, 6:5–20, 1996.