

INFLUENCE OF PROXIMITY BETWEEN MODES IN THE REDUCTION OF VIBRATIONS IN STRUCTURES THROUGH ABSORBERS

Diego R. Torres, Carlos Magluta, Ney Roitman

*Programa de Engenharia Civil, COPPE – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Centro de
Tecnologia, Bloco I-216, Ilha do Fundão, CEP: 21941-972, Rio de Janeiro - Brasil.
diegotorres@poli.ufrj.br*

Keywords: absorbers; tuned mass damper; vibration control; quadratic eigenvalue.

Abstract. The reductions of vibrations in structures through the addition of passive systems such as absorbers, custom named TMD (Tuned Mass Damper), have been studied by several authors in recent decades. However it has been more stimulated to study the efficiency of these devices by a model that represents the structure by a one degree of freedom mechanical system. This hypothesis is generally valid, since the natural frequency of the mode to be controlled is sufficiently spaced from the adjacent natural frequencies of the structure. Insofar as the degree of structural complexity increases, this assumption becomes less realistic.

The aim of this paper is to investigate the behavior of a structure added by one or more absorbers which has as a dynamical characteristic closely spaced natural frequencies. It was implemented in Fortran a modal analysis program considering non-proportional damping using the IRAM (Implicit restarted Arnoldi Method) to solve the quadratic eigenvalue problem. Analyses were conducted on an aluminum plate modeled by finite element varying the length / width ratio in order to evaluate the interference of modes in the calibration of the absorbers. These tests show that the interaction between the modes produced by absorbers and adjacent modes affect the efficiency of absorption.

1 INTRODUÇÃO

Os sistemas de absorção com múltiplos absorsores de vibração têm sido amplamente pesquisados como medida prática para a redução dos níveis de vibrações em estruturas civis. Vários tipos de carregamento assim como vários modelos têm sido propostos considerando diferentes configurações (tais como absorsores interligados e não-interligados) e diferentes tipos de amortecimento (viscoso, histerético, de Coulomb, etc.). A maioria dos trabalhos realizados sobre este tema considera a estrutura representada por um sistema massa-mola-amortecedor de 1 GL (um grau de liberdade). Esse tipo de modelagem tem como base a constatação obtida por alguns autores (Warburton e Ayorinde, 1980; Abe e Igusa, 1995) de que para a situação em que as frequências naturais da estrutura estão bem espaçadas a modelagem da estrutura representada por 1 GL é suficiente para representar o comportamento do sistema estrutural adicionado de sistemas absorsores.

Entretanto, à medida que o grau de complexidade da estrutura em interesse aumenta, os modos vão se tornando mais próximos (Ayorinde e Warburton, 1980). Por conseqüência esta premissa passa a se tornar falsa, fazendo-se necessário atacar o problema de forma numérica considerando a estrutura como um todo, exigindo-se maiores recursos computacionais, uma vez que se trata da solução de um problema de autovalor complexo com matrizes com dimensão duas vezes maior do que a dimensão da modelagem convencional. Com o crescente avanço da capacidade de processamento e de memória dos computadores portáteis esta metodologia tem se tornado viável. Magluta (1993), para contornar a limitação de memória frente à época, recorreu à técnica “QZ” implementada por Moler e Stewart (1973) associada a uma estratégia de sub-estruturação, em que são definidos nós internos, referentes à malha da estrutura e nós externos onde estão os apoios e os nós da estrutura que se conectam aos absorsores. Assim sendo, mediante uma transformação de coordenadas os nós internos são sintetizados permitindo que a dimensão total do problema seja bem reduzida, facilitando assim o cálculo das frequências naturais e modos de vibração.

Apesar de esta técnica apresentar boas respostas para os deslocamentos e acelerações, ela possui limitações quanto à avaliação dos esforços solicitantes. Na hipótese da existência de cargas axiais atuando simultaneamente aos absorsores, por exemplo, ambos como agentes de controle passivo, este método torna-se deficiente. Um caso prático seria a implementação de absorsores em risers flexíveis ou em estruturas protendidas. Assim sendo, torna-se necessário o desenvolvimento de uma ferramenta numérica para a estimativa do problema de autovalor mais eficiente.

O objetivo deste trabalho consiste no estudo da interação entre os modos para uma estrutura adicionada de um ou mais absorsores calibrados para trabalharem numa faixa em que se encontra um modo específico da estrutura. Para tanto foi desenvolvido um sistema baseado numa formulação numérica que utiliza para a resolução do problema de autovalor complexo as rotinas implementadas em linguagem Fortran por Ainsworth Jr. (2009) baseadas no Método de Arnoldi com Reinício Implícito. O estudo é conduzido numa laje variando-se a relação largura/comprimento avaliando-se o efeito da proximidade entre os modos.

2 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

O modelo numérico utilizado nesta formulação é constituído da estrutura dividida em elementos finitos e dos absorsores que da mesma maneira, também podem ser modelados por elementos discretos. A Figura 1 ilustra de forma simplificada a metodologia empregada nesta formulação para a situação em que uma estrutura é adicionada de três sistemas absorsores quaisquer.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\mathbf{K} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M} \end{bmatrix}_{2n \times 2n}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{M} \\ \mathbf{M} & \mathbf{0} \end{bmatrix}_{2n \times 2n} \quad (8)$$

$$\text{e } \mathbf{Q}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{F}(t) \\ 0 \end{bmatrix}_{2n \times 1}.$$

A eq. (7) corresponde à equação diferencial de movimento de um sistema mecânico escrito no espaço de estados. A partir desta equação, fazendo $\mathbf{Q}(t) = 0$ e $\mathbf{Y} = \psi e^{\lambda t}$, recai-se no seguinte problema de autovalor generalizado:

$$\mathbf{A} \psi = \lambda \mathbf{B} \psi \quad (9)$$

onde, $\psi = \begin{Bmatrix} \phi \\ \lambda \phi \end{Bmatrix}_{2n \times 1}$, sendo equivalente ao problema de autovalor da eq. (3) linearizado.

A solução do problema expresso em (9) produz n auto-vetores ψ e seus respectivos complexos conjugados $\bar{\psi}$, associados a n autovalores λ e seus respectivos complexos conjugados $\bar{\lambda}$. Portanto, esta técnica apesar de bastante direta apresenta a desvantagem de dobrar a dimensão do problema, o que incorre num maior custo computacional. Em geral, o cômputo dos primeiros modos de vibração da estrutura é suficiente para exprimir o comportamento estrutural e, portanto, a estratégia a ser adotada para a solução numérica deste problema consiste na projeção deste problema para um subespaço com dimensão muito menor que a original.

Devido ao fato dos autovalores e auto-vetores serem complexos, a utilização de rotinas convencionais na análise de estruturas baseadas na técnica de Iteração por Subespaço (Bathe, 1982) não é aplicável. Entretanto este problema de autovalor ainda assim pode ser projetado para um subespaço conhecido como Subespaço de Krylov (Saad, 1992). Utilizando o IRAM ("Implicit Restarted Arnoldi Method" - Método de Arnoldi com Reinício Implícito), Ainsworth Jr. (2009) implementou este método através de uma série de rotinas em Fortran que serão utilizadas neste trabalho.

A solução da eq. (9) permite a construção de uma base modal $\Psi = \{ \psi_1 \cdots \psi_m \mid \bar{\psi}_1 \cdots \bar{\psi}_m \}$, sendo que $m \ll n$, na qual o problema definido pela eq. (7) pode ser projetado. Sendo assim, a resposta deste sistema é obtida pela superposição das respostas dos $2m$ modos, ou seja:

$$\mathbf{Y} \approx \psi_1 \alpha_1(t) + \bar{\psi}_1 \bar{\alpha}_1(t) + \dots + \psi_m \alpha_m(t) + \bar{\psi}_m \bar{\alpha}_m(t) \quad (10)$$

onde, $\alpha_r(t)$ corresponde à coordenada generalizada do r -ésimo modo.

Os auto-vetores podem ser orto-normalizados em relação à matriz \mathbf{B} . Como consequência direta disso, tem-se que:

$$\psi_r^T \mathbf{A} \psi_r = \lambda_r$$

$$\psi_r^T \mathbf{B} \psi_r = 1 \quad (11)$$

tal como, $\psi_r^T (\cdot) \psi_l = 0$, se $r \neq l$.

Logo, pré-multiplicando por ψ_r^T e utilizando a eq. (10), a r -ésima equação do sistema da

eq. (7) fica:

$$\dot{\alpha}(t)_r - \lambda_r \cdot \alpha(t)_r = \phi_r^T \cdot \mathbf{F}(t) \quad (12)$$

Se no caso o sistema se encontra submetido por uma força harmônica no grau de liberdade “a”, a projeção desta força na r -ésima equação (12) é dada por $\phi_r^a F_0 e^{i\omega t}$ e o deslocamento da coordenada generalizada associada pode ser expresso por $\alpha_r(t) = \alpha_{0r} e^{i\omega t}$. Desse modo, tem-se que:

$$i\omega\alpha_{0r} e^{i\omega t} - \lambda_r \cdot \alpha_{0r} e^{i\omega t} = \phi_r^a F_0 e^{i\omega t} \quad (13)$$

Eliminando $e^{i\omega t}$ a eq. (13) pode ser re-escrita como:

$$\alpha_{0r} = (i\omega - \lambda_r)^{-1} \phi_r^a F_0 \quad (14)$$

A partir da eq. (10), é possível demonstrar que o deslocamento em um ponto “b” é dado por:

$$X_b = \sum_{r=1}^m (\phi_r^b \alpha_{0r} + \bar{\phi}_r^b \bar{\alpha}_{0r}) \quad (15)$$

Como,

$$X_b = H_{ba}(\omega) \cdot F_0 \quad (16)$$

portanto, a FRF (“Função de Resposta em Frequência”) que correlaciona o deslocamento em um ponto “b” a uma força em um ponto “a” da estrutura, é dada por:

$$H_{ba}(\omega) = \sum_{r=1}^m \left(\frac{\phi_r^a \phi_r^b}{i\omega - \lambda_r} + \frac{\bar{\phi}_r^a \bar{\phi}_r^b}{i\omega - \bar{\lambda}_r} \right) \quad (17)$$

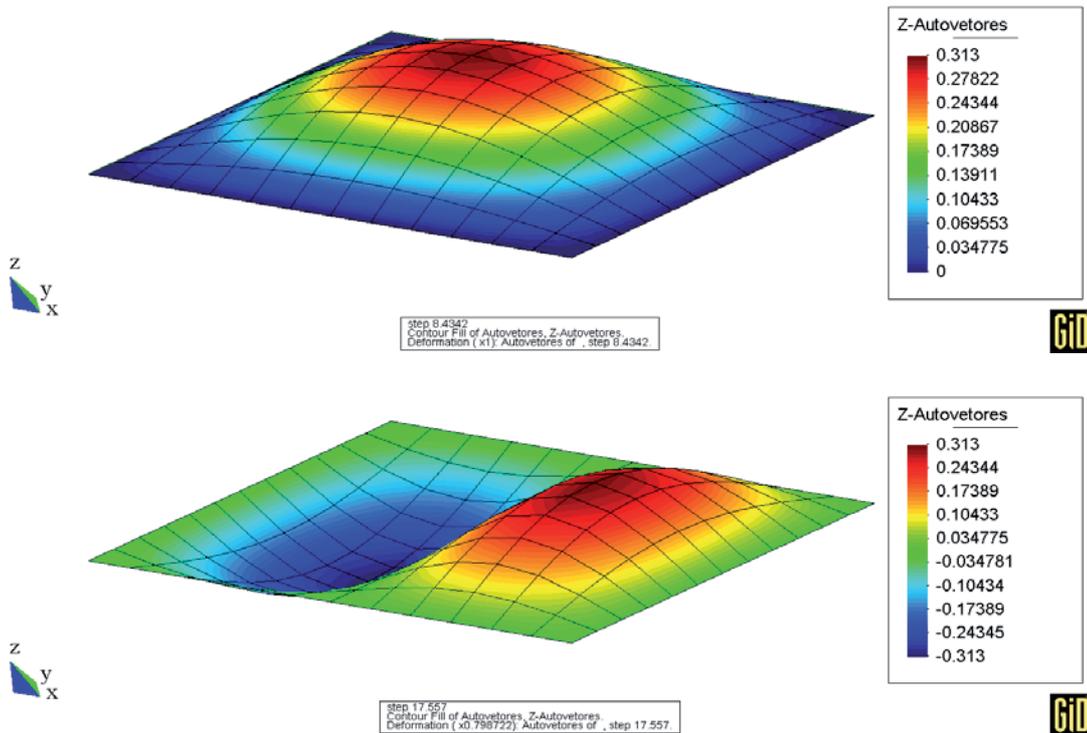
3 APLICAÇÃO

Para esta análise foi considerada inicialmente uma placa de alumínio retangular de dimensões 2.0 m x 1.5 m com 5 mm de espessura e apoiada nos seus quatro bordos. De fato uma placa apresentando estas características foi montada no LADEPIS (Laboratório de Dinâmica e Processamento de Imagens e Sinais, da COPPE) e uma vista geral desta estrutura é mostrada na [Figura 2](#).



Figura 2 – Vista geral da estrutura de ensaio da placa de alumínio do LADEPIS.

Essa estrutura foi modelada por elementos finitos utilizando 144 elementos de casca *serendipity* de oito nós, sendo sua malha gerada pelo programa GID. As Figura 3 (a-c) ilustram os três primeiros modos obtidos, sendo estes normalizados em relação à massa modal que neste caso é estimada em 10.2 kg para todos os modos, valor equivalente a um quarto da massa total, tal como prevê a teoria clássica (Clough e Penzien, 1996).



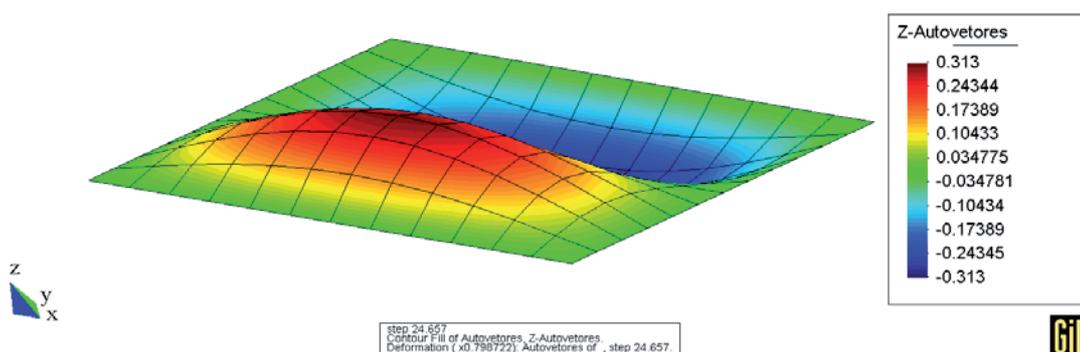


Figura 3 – Modos de vibração da placa (a) 1º modo; (b) 2º modo; (c) 3º modo.

Para que todos os modos de interesse sejam detectados na FRF é necessário que o ponto escolhido para análise possua as suas coordenadas modais não-nulas. Sendo assim, para que se leve em consideração na análise os três primeiros modos de vibração da placa foi escolhido como ponto de referência um ponto localizado a um quarto do vão livre nas duas direções da placa, i. é, localizado a 0.5 e 0.375 metros de um dos vértices da placa. Desse modo, para as análises que se seguirão a FRF da estrutura será sempre relacionada a este ponto P1.

Arbitrando em 1.0 % a taxa de amortecimento para o primeiro modo de vibração e adotando por hipótese o amortecimento de Rayleigh (Clough e Penzien, 1996) tomando como hipótese amortecimento proporcional à massa, tem-se definida a FRF da estrutura original.

Foram realizadas as seguintes análises: T1 - foi adicionado à estrutura um absorvedor de 0.25 kg num ponto P1 (vide Figura 4) sendo o mesmo calibrado de modo a minimizar as respostas do segundo modo; T2 - foram instalados quatro absorvedores espalhados uniformemente na estrutura, localizados nos pontos P1-4 (vide Figura 4), totalizando a mesma massa de 0.25 kg, e também calibrados de tal forma a minimizar as respostas do segundo modo. O arranjo da instalação desses absorvedores na placa está apresentado pelo desenho esquemático da Figura 4.

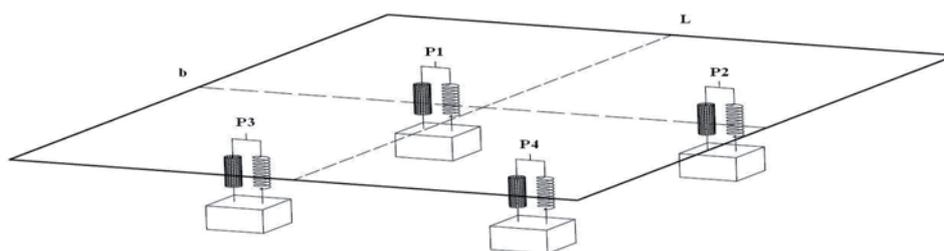


Figura 4 – Arranjo da distribuição dos absorvedores na placa.

Observando a Figura 4 e analisando as Figura 3 (a-c) se pode constatar que os módulos das coordenadas modais da estrutura nas posições escolhidas para a instalação dos absorvedores, P1-4, são iguais para a estrutura original em cada um dos três modos analisados. Estes pontos para análise foram escolhidos para permitir que se houver interferência entre os modos esta fique clara nas análises que serão apresentadas.

As calibrações ótimas dos absorvedores podem ser estimadas pelas expressões de Den Hartog (1940) e Jangid (1999) para T1 e T2, respectivamente. A Figura 5 ilustra as respostas obtidas pela formulação numérica. Ressalta-se que as massas dos sistemas absorvedores em T2 apresentam seus valores decrescentes de P1 para P4.

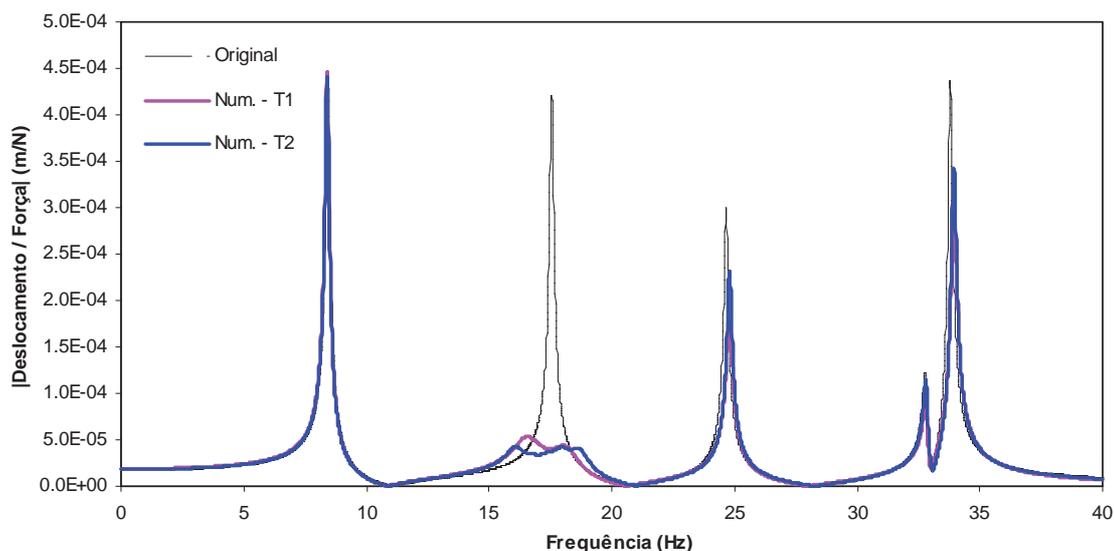


Figura 5 – FRF's da placa 2 x 1.5 para T1 e T2.

Observa-se pela [Figura 5](#) que, conforme era esperado, a proximidade dos modos afeta as respostas a FRF da estrutura como um todo. Comparando as respostas numéricas obtidas para T1 e T2, é possível constatar que a FRF da estrutura na faixa da frequência do 2º modo, é ligeiramente afetada pela interação com os demais modos da estrutura. Esses gráficos mostram também que a instalação de sistemas de absorção calibrados para reduzir as vibrações associadas ao 2º modo da estrutura acaba também por afetar os demais modos.

Considerando agora que as dimensões desta placa sejam modificadas para 2.0 m x 1.8 m, a relação entre comprimento e largura da placa fica 10/9 ao invés de 4/3 e por conseqüência, conforme prevê a Teoria de Placas ([Timoshenko e Woionowsky-Krieger, 1959](#)), a frequência do terceiro modo da estrutura se aproxima ainda mais da frequência natural do segundo modo. Isso pode ser ilustrado na [Figura 6](#), onde se tem a FRF da placa de alumínio para ambas as situações. O amortecimento utilizado para a placa 2 m x 1.8 m é equivalente (isto é, possui os mesmos coeficientes) ao arbitrado inicialmente para a placa 2 m x 1.5 m.

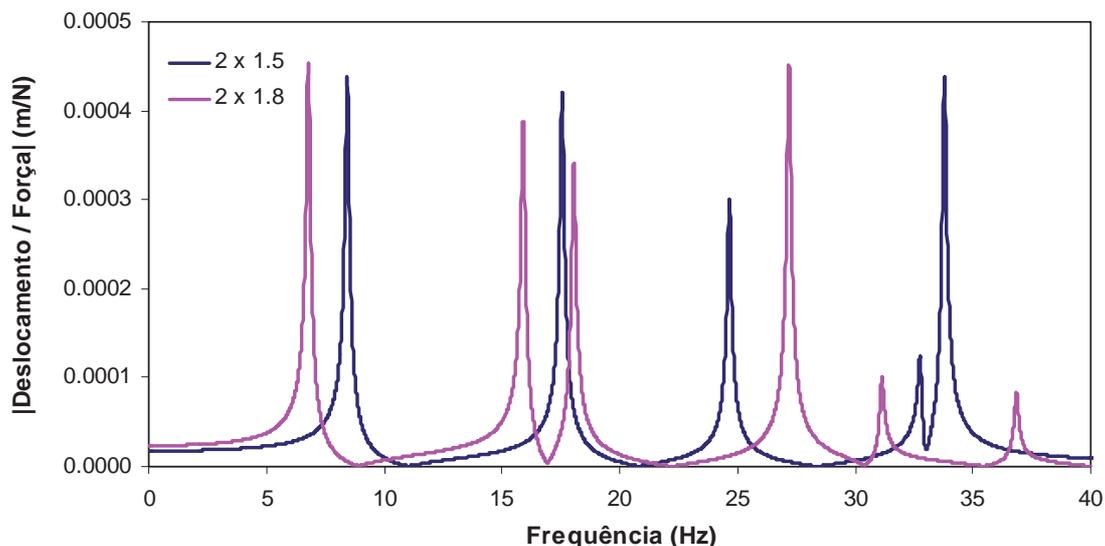


Figura 6 – FRF da placa variando-se a relação largura/comprimento (b/L).

Procedendo-se da mesma maneira tal como foi feito para a placa 2 m x 1.5 m, ou seja, realizando as análises T1 e T2 e calibrando os absorsores aplicando a mesma metodologia empregada anteriormente, obtêm-se as respostas da estrutura em termos de sua FRF, ilustradas na Figura 7. Como a massa modal da placa 2 m x 1.8 m é estimada em 12.2 kg, para a manutenção da relação de massa em $\mu \cong 0.025$, a massa total dos sistemas de absorção foi ajustada para 0.3 kg.

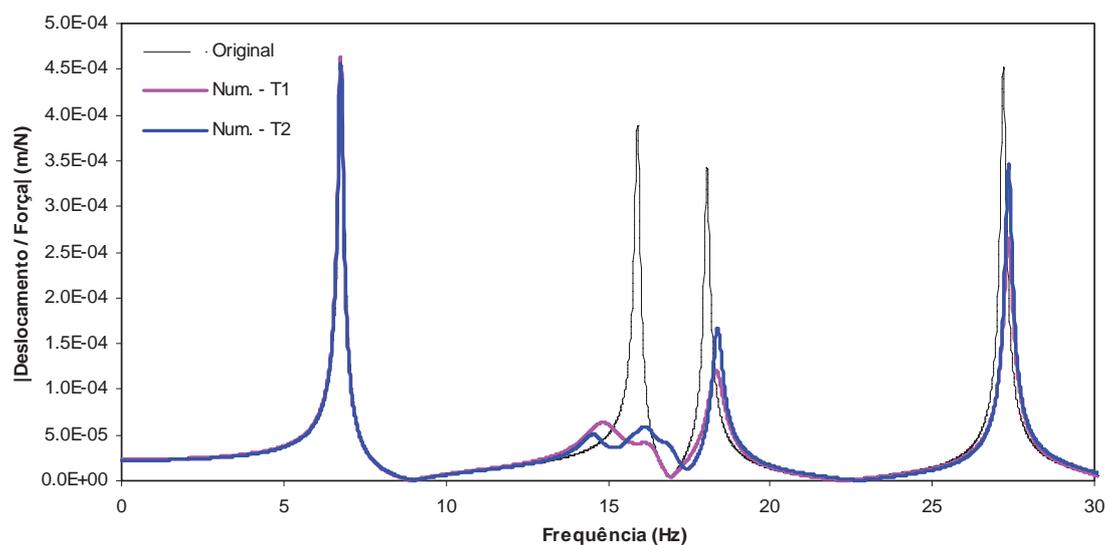


Figura 7 – FRF da placa 2 x 1.8 para T1 e T2, $\mu \cong 0.025$.

Observando as respostas obtidas para T1 e T2 na placa de 2.0 m x 1.8 m ilustradas na Figura 7, é possível constatar a forte interação entre o 2° e o 3° modo da estrutura. Comparando essas respostas com as respostas obtidas para a placa 2.0 m x 1.5 m ilustradas na Figura 5, fica claro que quanto mais próxima a frequência natural do 3° modo for da do 2° modo, maior é a redução provocada pelos sistemas absorsores sobre o 3° modo. Adicionalmente também é possível observar que o 4° modo sofre efeitos dos absorsores. Além disso, a Figura 7 mostra que a redução das amplitudes no 3° e 4° modo são maiores para a situação T1. Uma possível explicação para isso seria o fato da calibração do absorsor em T1 possuir uma taxa de amortecimento (na faixa dos 7.0%) bem maior que a obtida na calibração dos quatro absorsores em T2 (na faixa dos 3.0%).

O comportamento apresentado anteriormente segue o mesmo padrão para outras relações de massa. A Figura 8 mostra as respostas obtidas seguindo a mesma metodologia para T1 e T2 utilizando na relação de massa $\mu \cong 0.082$, cuja massa equivale à da placa adicionada de um conjunto de sistemas totalizando 1.0 kg.

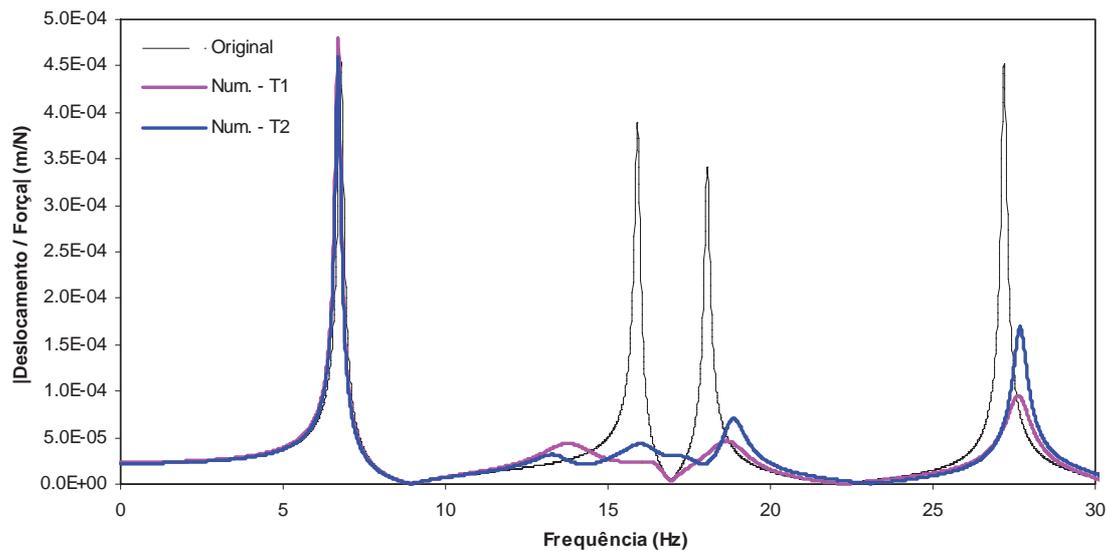


Figura 8 – FRF da placa 2 x 1.8 para T1 e T2, $\mu \cong 0.082$.

Correlacionado os gráficos da Figura 7 e Figura 8, pode-se observar que a adoção de maiores massas ocasiona em maiores níveis de redução não só para o 2º modo como para os modos adjacentes (3º e 4º) também. Além disso, também é possível observar para a situação T2 uma tendência de formação de um patamar na faixa que compreende o 2º e o 3º modos. Uma possível explicação para isto seria o fato de que à medida que a relação de massa aumenta maior é a largura da banda de frequência na qual os absorvedores atuam e, conseqüentemente, maior é a interação entre os modos na faixa compreendida entre o 2º e o 3º modos. Desta forma, pode-se concluir que o projeto para este tipo de situação deve ser realizado através de uma análise global na qual todos os modos de vibração sejam levados em consideração e que os sistemas sejam otimizados para atuar em uma faixa de frequência que pode conter alguns modos de vibração.

4 CONCLUSÕES E COMENTÁRIO FINAIS

Com o objetivo de investigar o comportamento de sistemas em estruturas que possuam frequências naturais pouco espaçadas, foi realizado um estudo de uma laje adicionada de múltiplos absorvedores. Neste estudo foi também variada a relação entre largura e comprimento da laje a fim de verificar as mudanças de comportamento. Constatou-se que a instalação de sistemas absorvedores calibrados para trabalharem numa faixa associada a um modo específico da estrutura acabam também por interagirem com os modos adjacentes, reduzindo as amplitudes associadas a estes modos. Logo, a adoção de um modelo de análise no qual da estrutura é representada como um sistema principal de 1 GL neste caso não é capaz de reproduzir adequadamente o comportamento do sistema estrutural adicionado de um ou mais absorvedores. Como conseqüência, concluiu-se que o projeto de sistemas de absorção acoplados à estrutura neste caso deve ser conduzido por meio de uma metodologia baseada numa formulação numérica tal qual a desenvolvida neste trabalho que contemple a análise global da estrutura e que a otimização das respostas seja feita para uma faixa de frequência que pode conter vários modos de vibração, os quais são excitados pelos carregamentos atuantes. Isto se deve ao fato de que, para estas estruturas, os sistemas de absorção acabam por atuarem em vários modos simultaneamente, sendo, portanto, necessário que o projeto seja realizado levando em consideração esta característica.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Abe, M., Igusa, T., “Tuned mass dampers for structures with closely spaced natural frequencies”. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 24: 247–261, 1995.
- Ainsworth Jr., G., O., *Implementação em Paralelo do Método de Arnoldi/Lanczos com Reinício Implícito*. Tese de D. Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 2009.
- Ayorinde, E. O., Warburton, G. B., “Minimizing structural vibrations with absorbers”. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 8:219–236, 1980.
- Bathe, K., *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*, 1st ed., USA, Prentice-Hall Inc., 1982.
- Clough, R. W., Penzien J., *Dynamics of Structures*. McGraw-Hill, New York, USA, 1996.
- Den Hartog, J. P., *Mechanical Vibrations*. 2nd ed., McGraw-Hill Co., New York, 1940.
- Jangid, R. S., “Optimum multiple tuned mass dampers for base-excited undamped system”. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 28, 9: 1041–1049, 1999.
- Magluta, C., *Sistemas Dinâmicos Passivos para Absorção de Vibrações Estruturais*. Tese de D. Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 1993.
- Meirovitch, L., *Analytical Methods in Vibrations*. Prentice Hall, 1967.
- Moler, C. B., Stewart, G., W., “An Algorithm for Generalized Matrix Eigenvalue Problems”, *SIAM Journal of Numerical Analysis*, 10: 241-256, 1973.
- Saad, Y., *Numerical Methods for Large Eigenvalue Problems*. 1st ed., John Wiley & Sons Inc., New York, NY, 1992.
- Timoshenko, S., Woionowsky-Krieger, S., *Theory of Plates and Shells*. 2nd ed., New York, McGraw-Hill, 1959.
- Warburton, G. B., Ayorinde, E. O., “Optimum absorbers parameters for simple systems”. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 8:197–217, 1980.