

## ANÁLISE ESTRUTURAL DE PLACAS CIRCULARES E CASCAS ESFÉRICAS DE FUNDO DE POÇOS DE GRANDES DIMENSÕES

Isaias Vizotto<sup>a</sup>, Daniel L. Torres<sup>a</sup>, Paloma T. Cortizo<sup>b</sup> e Pedro T. França<sup>b</sup>

<sup>a</sup>UNICAMP - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo, Departamento de Estruturas, Av. Albert Einstein 951, Cidade Universitária, Barão Geraldo, 13.083-852 Campinas, SP, Brasil, vizotto@fec.unicamp.br, dltorres@fec.unicamp.br

<sup>b</sup>Figueiredo Ferraz Consultoria e Engenharia de Projeto S. A., Avenida Fagundes Filho, 141, 9º andar, São Judas, 04.304-010 São Paulo, SP, Brasil, pcortizo@ffcep.com.br, franca@figueiredoferraz-eng.com.br

**Palavras Chave:** Análise Numérica de Lajes e Cascas de Fundo de Poços de Grandes Dimensões, Poços de Grandes Dimensões, Análise Numérica de Placas e Cascas.

**Resumo.** A construção de poços de grandes dimensões (diâmetro e profundidade) tem sido utilizada em muitas áreas da engenharia, especialmente empregadas em obras de metrô, rodovias, ferrovias, geração de energia, engenharia ambiental, etc. As paredes dos poços suportam as ações dos carregamentos dos solos e pressão da água, e de acordo com a geometria circular o estado de solitação é principalmente de compressão. A estrutura de fundo (placa ou casca) vinculada no contorno da parede suporta essencialmente a subpressão da água. Em estruturas planas (placas), a estrutura freqüentemente apresenta uma alta taxa de armadura em relação ao concreto utilizado. Para estruturas em casca a espessura e a taxa de armadura diminuem significativamente devido às características de resistência relacionadas à forma tridimensional utilizada. Este trabalho apresenta a análise estrutural de placas e cascas vinculadas ao fundo de poços circulares de grandes dimensões que são construídos pelo método de escavação seqüencial considerando duas possibilidades: placas circulares (lajes) e cascas esféricas de concreto. É apresentada a comparação entre o comportamento estrutural das estruturas de fundo (placa e casca) de um poço circular com 50 m de diâmetro e 100 m de profundidade, sob a ação da subpressão uniformemente distribuída da água atuando na superfície externa, considerando a estrutura como laje (geometria plana) e como casca esférica (geometria tridimensional). As análises estruturais são realizadas por meio da teoria de elasticidade linear, numericamente pelo Método dos Elementos Finitos e pelo processo de retroanálise utilizando os deslocamentos obtidos para a estrutura.

## 1 INTRODUÇÃO

Entende-se por poços de grande diâmetro, poços que não podem ser executados com equipamentos de perfuração convencionais como perfuratrizes rotativas que usualmente são empregados para execução de pequenos poços de diâmetro não superior a 1,0 m. Os poços de grande diâmetro podem ter diâmetro de escavação da ordem de dezenas de metros.

Por estar fortemente baseado nos princípios básicos do NATM (New Austrian Tunneling Method), que são a utilização do maciço circundante à escavação como parte do sistema de suporte (o maciço não atua somente como carregamento) e a intensa instrumentação do maciço durante o processo executivo para aferir a metodologia e o sistema de suporte empregado, os poços circulares de grande diâmetro também são tratados como poços em NATM, por haver similaridades com os túneis em NATM.

Os principais elementos construtivos de um poço NATM são (na ordem da seqüência executiva): viga de borda, revestimento primário, laje de brita de fundo, poço de bombeamento provisório, laje de trabalho de fundo, laje estrutural de fundo, sistema de impermeabilização, revestimento secundário, estruturas internas (se houver). A [Figura 1](#) ilustra os diversos elementos construtivos de um poço NATM.

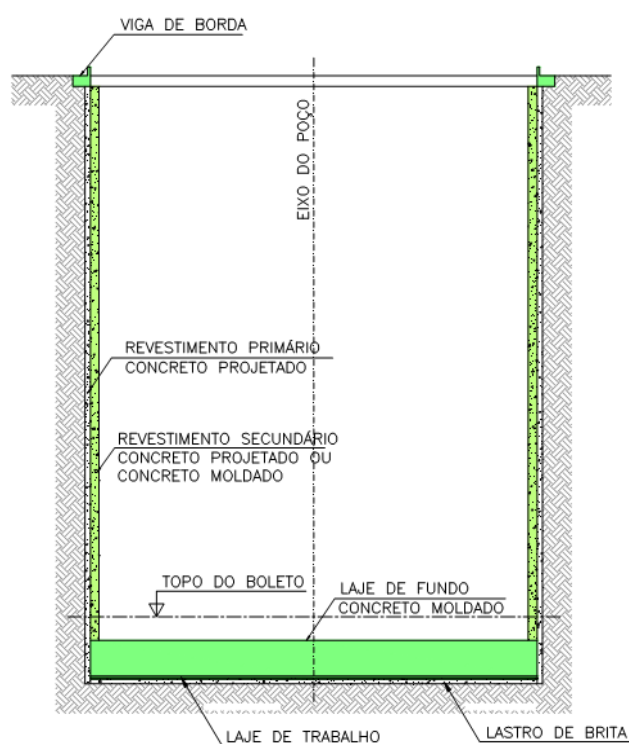


Figura 1: Principais elementos construtivos de um poço em NATM

O presente trabalho aborda o dimensionamento de uma estrutura de fundo de poço de grandes dimensões, em que o processo construtivo mais indicado é o método NATM. O poço possui 25,0 m de raio, 100,0 m de profundidade, e a estrutura

do fundo deve ser dimensionada para suportar preponderantemente a subpressão da água (Figura 2). Como estrutura de fundo do poço é possível utilizar duas alternativas: laje ou casca. É apresentado estudo comparativo do comportamento estrutural de uma laje circular e de uma casca esférica como solução para a estrutura de fundo do poço considerado.

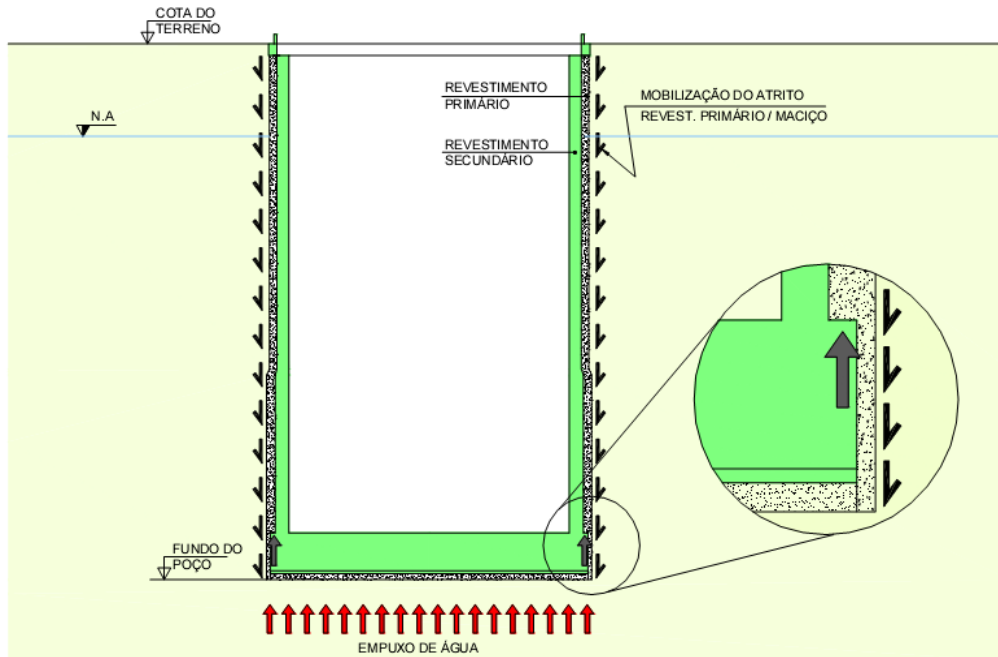


Figura 2: Exemplo de detalhe de laje de fundo de poço com subpressão da água

As análises estruturais para a verificação dos esforços atuantes na laje e na casca serão realizadas através dos seguintes métodos: analítico pela teoria clássica da elasticidade linear, análise numérica tridimensional via método dos elementos finitos, e retroanálise por meio dos deslocamentos obtidos da modelagem tridimensional.

## 2 FORMULAÇÃO PARA LAJE CIRCULAR

As expressões empregadas de acordo com a Teoria da Elasticidade podem ser encontradas em várias referências clássicas da literatura técnica, sendo que neste trabalho é utilizada a formulação apresentada em [Timoshenko e Woinowski-Kriger \(1959\)](#).

A hipótese considerada de acordo com a teoria elástica é a de Poisson-Kirchhoff, que é adequada para considerar o comportamento das placas com relação entre a espessura e o vão variando entre 1/5 e 1/100. Segundo a hipótese de Kirchhoff, os pontos pertencentes à normal ao plano médio da placa antes da deformação permanecem na normal à superfície média após a deformação devido às ações atuantes na estrutura.

A [Figura 3](#) mostra o sistema de coordenadas utilizado para a placa circular de raio  $R$  relacionado às variáveis  $(r, \theta, w)$ , sendo:

$r$ : é a variação do raio medida a partir do centro até a borda da placa;

$\theta$ : é ângulo formado por qualquer ponto  $P$  em relação ao eixo  $r$ ;  
 $w$ : é a flecha medida verticalmente a qualquer ponto da placa.

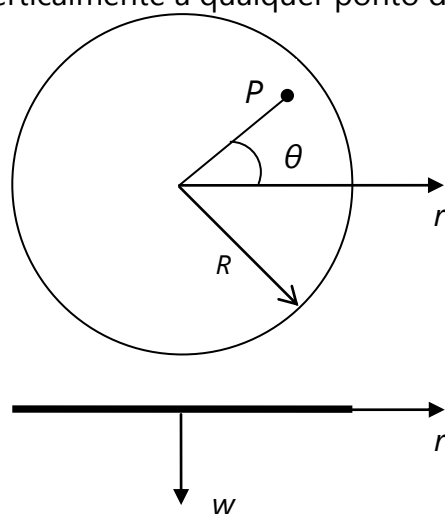


Figura 3: Sistema de coordenadas para a laje circular  $(r, \theta, w)$

A partir das relações constitutivas do material elástico linear e das tensões atuantes em um ponto da estrutura, as equações dos momentos fletores  $M_r$  (radial) e  $M_\theta$  (tangencial) nas direções  $r$  e  $\theta$  em função dos deslocamentos são representadas respectivamente pelas equações (1) e (2):

$$M_r = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{\nu}{r} \frac{dw}{dr} \right) \quad (1)$$

$$M_\theta = -D \left( \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right) \quad (2)$$

com:

$$D = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)} \quad (3)$$

sendo os parâmetros da equação (3):

$D$ : rigidez à flexão da placa;

$E$ : Módulo de Elasticidade do material;

$\nu$ : Coeficiente de Poisson do material;

$h$ : espessura da placa no ponto  $P$  considerado.

Do equilíbrio de forças em um elemento infinitesimal sob a ação de um carregamento uniformemente distribuído  $q$  obtém-se a equação (4) da elástica  $w$  da laje em função da variável  $r$ :

$$w = \frac{qr^4}{64D} + \frac{C_1}{4} r^2 + C_2 \ln(r) + C_3 \quad (4)$$

com a primeira e segunda derivadas de  $w$  em relação a  $r$  apresentadas nas equações

(5) e (6):

$$\frac{dw}{dr} = \frac{qr^3}{16D} + \frac{C_1 r}{2} + \frac{C_2}{r} \quad (5)$$

$$\frac{d^2w}{dr^2} = \frac{3qr^2}{16D} + \frac{C_1}{2} \quad (6)$$

As constantes  $C_1$ ,  $C_2$  e  $C_3$  são determinadas de acordo com as condições de contorno em função da vinculação dos problemas de placas circulares a serem resolvidos.

## 2.1 Laje apoiada nas bordas

Para a determinação do momento fletor  $M_r$  numa laje apoiada nas bordas, as condições de contorno são expressas por:

$$\begin{aligned} r = R & \quad w(R) = 0 & \quad (\text{flecha na borda da placa é nula}); \\ r = R & \quad M_r(R) = 0 & \quad (\text{momento na borda da placa é nulo}); \\ r = 0 & \quad dw/dr(0) = 0 & \quad (\text{giro do centro da placa é nulo}). \end{aligned}$$

Assim, as constantes  $C_1$ ,  $C_2$  e  $C_3$  são apresentadas em (7):

$$C_1 = -\frac{qR^2(3+\nu)}{8D(1+\nu)} \quad C_2 = 0 \quad C_3 = \frac{qR^4(5+\nu)}{64D(1+\nu)} \quad (7)$$

A equação final da elástica  $w$  é apresentada em (8):

$$w = \frac{qr^4}{64D} - \frac{qR^2 r^2(3+\nu)}{32D(1+\nu)} + \frac{qR^4(5+\nu)}{64D(1+\nu)} \quad (8)$$

E a flecha máxima ocorrerá no centro da placa ( $r = 0$ ) conforme mostrado em (9):

$$w_{\text{máx}} = \frac{qR^4(5+\nu)}{64D(1+\nu)} \quad (9)$$

Da equação final da elástica tem-se (10) e (11):

$$\frac{dw}{dr} = \frac{qr}{16D} \left[ r^2 - R^2 \frac{(3+\nu)}{(1+\nu)} \right] \quad (10)$$

$$\frac{d^2w}{dr^2} = \frac{3qr^2}{16D} - \frac{qR^2(3+\nu)}{16D(1+\nu)} \quad (11)$$

E a equação final do momento fletor  $M_r$  é apresentada em (12):

$$M_r = -\frac{3qr^2}{16} + \frac{qR^2(3+\nu)}{16(1+\nu)} - \left(\frac{\nu}{r}\right) \frac{qr}{16} \left[ r^2 - R^2 \frac{(3+\nu)}{(1+\nu)} \right] \quad (12)$$

## 2.2 Laje engastada nas bordas

Para a determinação do momento fletor  $M_r$  numa laje apoiada nas bordas, as condições de contorno são expressas por:

$$\begin{array}{lll} r = R & w(R) = 0 & \text{(flecha na borda da placa é nula);} \\ r = R & dw/dr(R) = 0 & \text{(giro na borda da placa é nulo);} \\ r = 0 & dw/dr(0) = 0 & \text{(giro do centro da placa é nulo).} \end{array}$$

Assim, as constantes  $C_1$ ,  $C_2$  e  $C_3$  são apresentadas em (13):

$$C_1 = -\frac{qR^2}{8D} \quad C_2 = 0 \quad C_3 = \frac{qR^4}{64D} \quad (13)$$

A equação final da elástica  $w$  será (14):

$$w = \frac{qr^4}{64D} - \frac{qR^2r^2}{32D} + \frac{qR^4}{64D} \quad (14)$$

E a flecha máxima ocorrerá no centro da placa ( $r = 0$ ) representada por (15):

$$w_{\text{máx}} = \frac{qR^4}{64D} \quad (15)$$

Da equação final da elástica obtém-se as equações (16) e (17):

$$\frac{dw}{dr} = \frac{qr}{16D}(r^2 - R^2) \quad (16)$$

$$\frac{d^2w}{dr^2} = \frac{q}{16D}(3r^2 - R^2) \quad (17)$$

E a equação final do momento fletor  $M_r$  será (18):

$$M_r = -\frac{q}{16}(3r^2 - R^2) - \left(\frac{\nu}{r}\right)\frac{qr}{16}(r^2 - R^2) \quad (18)$$

## 3 ANÁLISE NUMÉRICA PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Para a análise pelo Método dos Elementos Finitos foi utilizado o software [SAP2000®](#). Como o método numérico está intrinsecamente associado a uma aproximação dos resultados que podem ser decorrente do software, do tipo de elemento adotado, da discretização da malha utilizada e também devido ao processamento e modelo computacional, os resultados podem variar dependendo desses fatores.

Para a laje circular de concreto foram construídos dois modelos de malhas distintos sendo que o modelo adotado apresenta elementos quadrangulares ([Figura 4](#)) com seis graus de liberdade por ponto nodal situado nos vértices do elemento (três translações e três rotações).

Os dados e informações do modelo de laje circular são:

$$F_{ck} = 40 \text{ MPa} \quad (\text{resistência característica do concreto});$$

- $R = 25 \text{ m}$  (raio da placa);
- $h = 5 \text{ m}$  (espessura da placa);
- $E = 0,85 \cdot 5600 \cdot 40^{1/2} = 30.105 \text{ MPa}$  (Módulo de Elasticidade do concreto);
- $\nu = 0,2$  (Coeficiente de Poisson do concreto);
- $q = 1000 \text{ kN/m}^2$  (subpressão da água - uniforme na placa);
- Borda apoiada (vinculação 1);
- Borda engastada (vinculação 2).

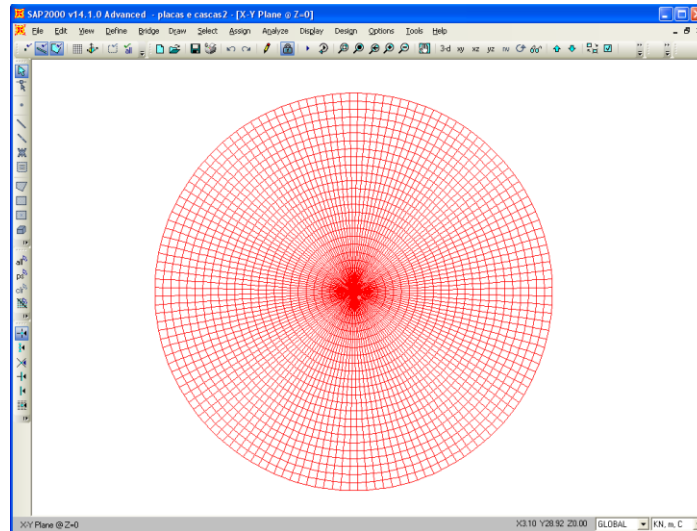


Figura 4: Placa circular modelada no SAP2000®

### 3.1 Laje apoiada na borda – momento fletor radial $M_r$

O diagrama de momento fletor  $M_r$  em uma seção transversal radial da placa circular é mostrado na Figura 5.

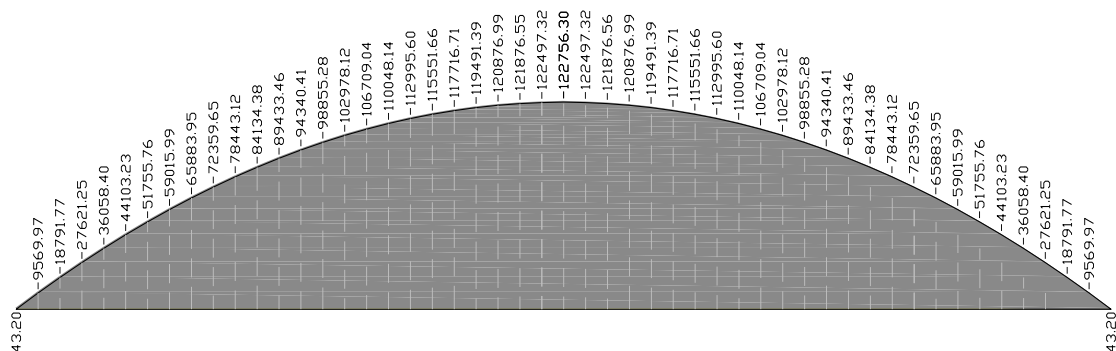


Figura 5: Momento fletor radial  $M_r$  (kN.m) – laje circular apoiada na borda

### 3.2 Laje engastada na borda – momento fletor radial $M_r$

O diagrama de momento fletor  $M_r$  em uma seção transversal radial passando pelo

centro da placa circular é mostrado na [Figura 6](#).

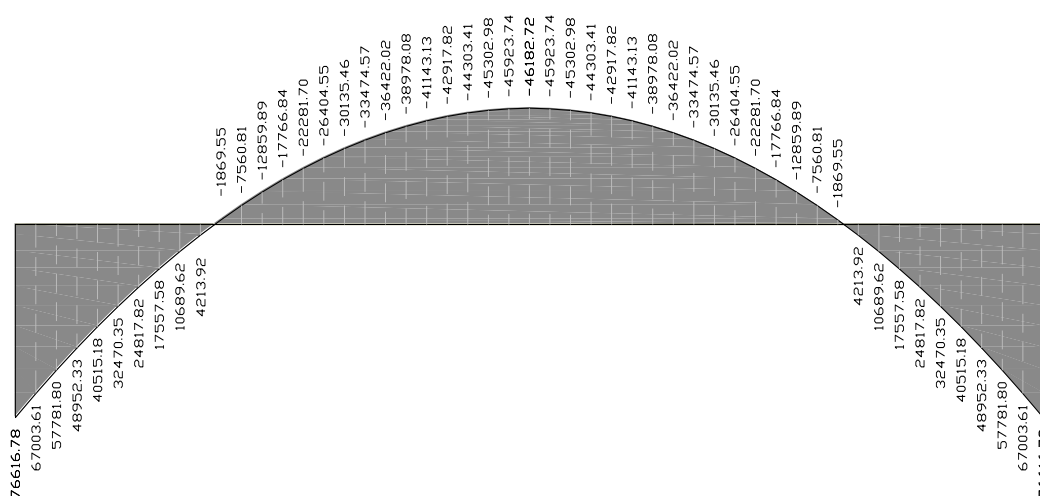


Figura 6: Momento fletor radial  $M_r$  (kN.m) – laje circular engastada na borda

#### 4 RETROANÁLISE

O processo de retroanálise foi realizado a partir dos resultados obtidos através do Método dos Elementos Finitos da análise numérica com o programa [SAP2000®](#). Com os dados iniciais provenientes da análise estrutural, que são os deslocamentos verticais e os giros em cada ponto da malha, e com as coordenadas dos pontos é possível derivar os deslocamentos e obter os momentos fletores, que por fim são comparados aos resultados obtidos da análise numérica via [SAP2000®](#).

Considerando dois pontos  $P_1$  e  $P_2$ , as equações (19) e (20) utilizadas para estimar a primeira e segundas derivadas dos deslocamentos verticais são:

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{w_2 - w_1}{r_2 - r_1} \quad (19)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} = \frac{\frac{\partial w_2}{\partial r_2} - \frac{\partial w_1}{\partial r_1}}{r_2 - r_1} \quad (20)$$

Sendo:

- $r_1$ : coordenada do ponto  $P_1$ ;
- $r_2$ : coordenada do ponto  $P_2$ ;
- $w_1$ : deslocamento vertical do ponto  $P_1$ ;
- $w_2$ : deslocamento vertical do ponto  $P_2$ .

Com isso, é possível determinar o valor aproximado do momento fletor radial  $M_r$  para cada ponto da malha por meio da expressão (1):



## 5 PLACA CIRCULAR – ANÁLISE DOS RESULTADOS

São apresentados os resultados das análises realizadas por meio do método analítico, pelo **SAP2000®** e pela retroanálise da placa circular com raio de 25,0 m, considerando-se as condições de contorno para dois casos de vinculação: inicialmente o caso da borda apoiada e posteriormente o da borda engastada.

Na **Tabela 1** são apresentados os resultados de deslocamentos verticais  $w$  através da solução analítica e numérica, considerando dois casos de vinculação: borda apoiada e borda engastada. A coluna Dif (%) apresenta a diferença percentual dos resultados entre a análise teórica e a realizada por meio do **SAP2000®**. Pela coluna Dif (%) verifica-se que os valores obtidos para os deslocamentos são muito próximos e não apresentam variações significativas.

Raio (m)	Deslocamentos Verticais (m)					
	Solução Analítica		SAP2000®			
	Apoiada	Engastada	Apoiada	Dif. (%)	Engastada	Dif. (%)
0	-0,08097	-0,01868	-0,08095	0,02%	-0,018703	0,10%
1	-0,08081	-0,01862	-0,0808	0,02%	-0,018644	0,10%
2	-0,08033	-0,01845	-0,08032	0,01%	-0,018466	0,11%
3	-0,07954	-0,01815	-0,07953	0,01%	-0,01817	0,11%
4	-0,07843	-0,01774	-0,07842	0,01%	-0,017759	0,11%
5	-0,07701	-0,01722	-0,077	0,01%	-0,017238	0,11%
6	-0,07529	-0,01659	-0,07528	0,01%	-0,016612	0,11%
7	-0,07327	-0,01587	-0,07326	0,01%	-0,015886	0,10%
8	-0,07096	-0,01505	-0,07095	0,01%	-0,01507	0,11%
9	-0,06837	-0,01416	-0,06836	0,01%	-0,01417	0,10%
10	-0,0655	-0,01318	-0,06549	0,01%	-0,013198	0,11%
11	-0,06237	-0,01215	-0,06237	0,01%	-0,012163	0,10%
12	-0,059	-0,01107	-0,05899	0,01%	-0,011078	0,10%
13	-0,05539	-0,00995	-0,05538	0,01%	-0,009956	0,10%
14	-0,05155	-0,0088	-0,05155	0,01%	-0,008812	0,10%
15	-0,04751	-0,00765	-0,04751	0,01%	-0,007661	0,10%
16	-0,04328	-0,00651	-0,04328	0,01%	-0,006519	0,09%
17	-0,03888	-0,0054	-0,03888	0,02%	-0,005405	0,09%
18	-0,03433	-0,00433	-0,03432	0,02%	-0,004338	0,10%
19	-0,02964	-0,00333	-0,02964	0,02%	-0,003337	0,10%
20	-0,02484	-0,00242	-0,02484	0,02%	-0,002424	0,10%
21	-0,01996	-0,00162	-0,01995	0,02%	-0,001621	0,10%
22	-0,015	-0,00095	-0,015	0,03%	-0,000952	0,11%
23	-0,01001	-0,00044	-0,01001	0,02%	-0,000441	0,04%
24	-0,005	-0,00011	-0,005	0,04%	-0,000115	0,13%
25	0	0	0	0,00%	0	0,00%

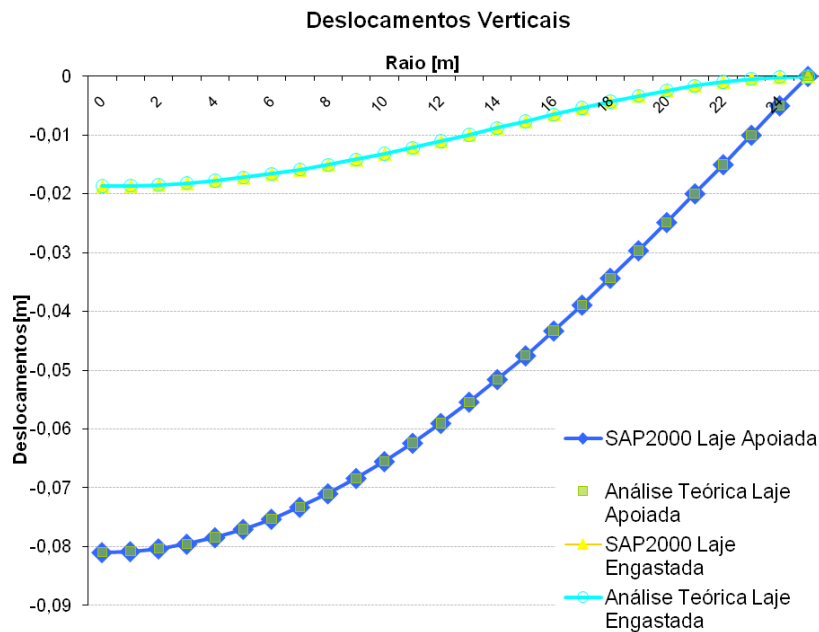
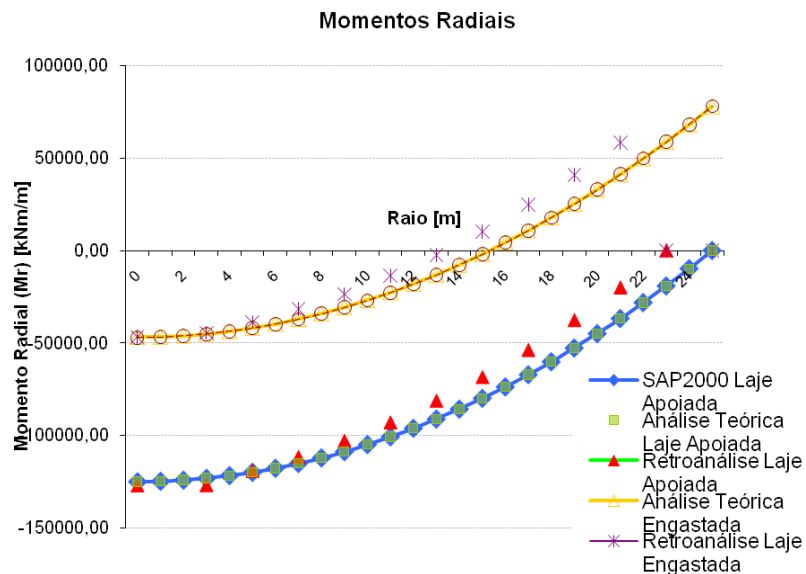
Tabela 1: Placa circular – deslocamentos verticais  $w$  (m)

Na **Tabela 2** são apresentados os valores para o momento fletor radial  $M_r$  obtidos por solução analítica, por análise numérica utilizando o software **SAP2000®** e por retroanálise, considerando também duas condições de vinculação da borda: engastada e apoiada. A coluna Dif (%) apresenta a diferença percentual dos

resultados entre a análise teórica e a realizada por meio do SAP2000®. A Figura 7 e a Figura 8 mostram os gráficos dos resultados obtidos via analítica, por elementos finitos e retroanálise.

Raio (m)	Momentos Radiais $M_r$ (kN.m/m)							
	Solução Analítica		SAP2000®				Retroanálise	
	Apoiada	Engastada	Apoiada	Dif. (%)	Engastada	Dif. (%)	Apoiada	Engastada
0	-125000	-46875	-125176,59	0,14%	-47093,27	0,47%	-127168,31	-46802,96
1	-124800	-46675	-124912,50	0,09%	-46829,18	0,33%		
2	-124200	-46075	-124279,50	0,06%	-46196,18	0,26%		
3	-123200	-45075	-123260,23	0,05%	-45176,91	0,23%	-126983,20	-44436,50
4	-121800	-43675	-121847,31	0,04%	-43763,99	0,20%		
5	-120000	-41875	-120037,63	0,03%	-41954,31	0,19%	-119197,83	-38633,95
6	-117800	-39675	-117829,90	0,03%	-39746,58	0,18%		
7	-115200	-37075	-115223,44	0,02%	-37140,13	0,18%	-111659,01	-31608,91
8	-112200	-34075	-112217,87	0,02%	-34134,56	0,17%		
9	-108800	-30675	-108812,93	0,01%	-30729,62	0,18%	-102922,96	-23610,18
10	-105000	-26875	-105008,46	0,01%	-26925,14	0,19%		
11	-100800	-22675	-100804,33	0,00%	-22721,01	0,20%	-93019,09	-13652,86
12	-96200	-18075	-96200,45	0,00%	-18117,13	0,23%		
13	-91200	-13075	-91196,75	0,00%	-13113,44	0,29%	-81271,48	-2492,66
14	-85800	-7675	-85793,19	0,01%	-7709,88	0,45%		
15	-80000	-1875	-79989,72	0,01%	-1906,41	1,68%	-68514,52	10367,06
16	-73800	4325	-73786,31	0,02%	4297,00	0,65%		
17	-67200	10925	-67182,93	0,03%	10900,38	0,23%	-53837,23	24859,70
18	-60200	17925	-60179,56	0,03%	17903,75	0,12%		
19	-52800	25325	-52776,18	0,05%	25307,13	0,07%	-37703,31	40910,59
20	-45000	33125	-44972,78	0,06%	33110,54	0,04%		
21	-36800	41325	-36769,33	0,08%	41313,98	0,03%	-20024,19	58440,83
22	-28200	49925	-28165,83	0,12%	49917,48	0,02%		
23	-19200	58925	-19162,28	0,20%	58921,04	0,01%	0,00	0,00
24	-9800	68325	-9758,65	0,42%	68324,67	0,00%		
25	-2,4E-11	78125	44,06	0,00%	78127,37	0,00%	0,00	0,00

Tabela 2: Placa circular – momentos radiais  $M_r$  (kN.m/m)

Figura 7: Placa circular - deslocamentos verticais  $w$  (m)Figura 8: Placa circular – momento fletor radial  $M_r$  (kN.m/m)

Os estudos comprovam os bons resultados para a análise numérica diante da formulação teórica para as duas condições de vinculação. A retroanálise proporcionou melhores resultados para a placa com borda apoiada que para a borda engastada, sendo que para melhorar a aproximação seria necessário uma discretização mais refinada da estrutura.

A espessura de 5,0 m necessária para a laje de fundo resistir à subpressão se mostrou de significativa importância, sendo necessário estudo de custo e viabilidade de projeto. Outra possibilidade seria optar por uma estrutura em casca esférica, onde,

haveria redução de espessura, que é abordado a seguir.

## 6 CASCA ESFÉRICA PARA ESTRUTURA DO FUNDO DO POÇO

Como alternativa à laje como estrutura do fundo do poço, há a possibilidade de construção de uma estrutura em casca esférica para resistir às ações atuantes, dentre as quais a principal é a subpressão hidrostática. A partir da flecha inicial de 6 m adotada para a casca (Figura 9) determina-se o raio da casca esférica.

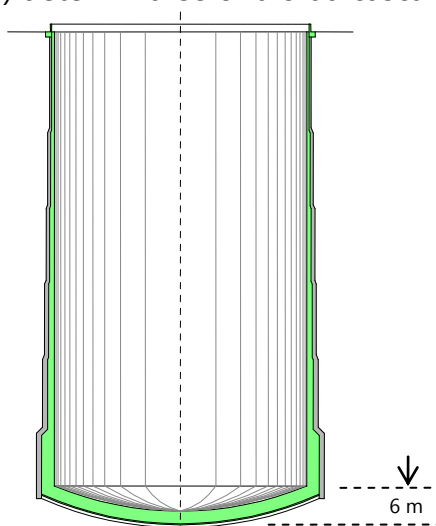


Figura 9: Desenho esquemático de poço com casca esférica como estrutura de fundo

Optou-se por uma casca de espessura de 2,0 m para compatibilizar a rigidez da cúpula com o revestimento secundário, uma vez que este último apresentou dimensão suficiente para suportar aos esforços provenientes do maciço e de água. O desenho esquemático da casca do fundo do poço é apresentado na Figura 10.

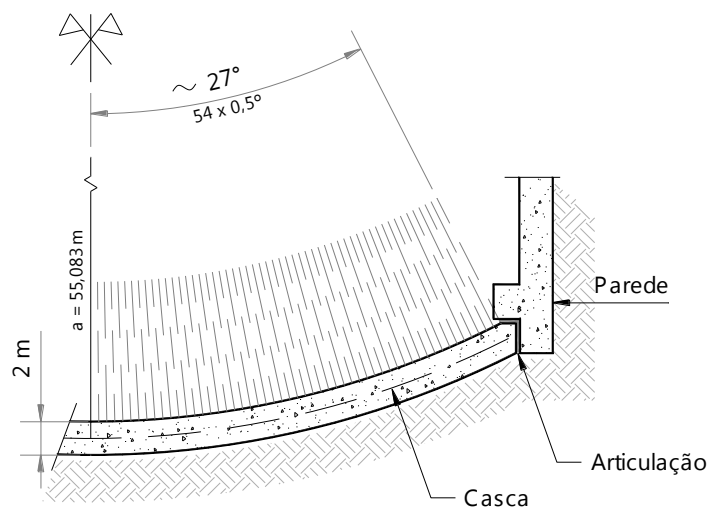


Figura 10: Desenho esquemático da casca esférica como estrutura de fundo

## 7 FORMULAÇÃO PARA CASCA ESFÉRICA

As expressões empregadas de acordo com a Teoria da Elasticidade podem ser encontradas em várias referências clássicas da literatura técnica, sendo que neste trabalho é utilizada a formulação apresentada em [Billington \(1965\)](#).

A hipótese considerada de acordo com a teoria elástica é a de Poisson-Kirchhoff, que é adequada para considerar o comportamento das placas com relação entre a espessura e o vão variando entre 1/5 e 1/100. Segundo a hipótese de Kirchhoff, os pontos pertencentes à normal ao plano médio da placa antes da deformação permanecem na normal à superfície média após a deformação devido às ações atuantes na estrutura.

A casca é submetida ao mesmo carregamento proveniente do empuxo hidrostático que equivale a uma ação de 1000 kN/m<sup>2</sup> de pressão uniformemente distribuída ao longo da superfície externa da estrutura. Com o raio determinado anteriormente, da vinculação proposta e da ação atuante, é possível desenhar um corte radial que representa a estrutura ([Figura 11](#)).

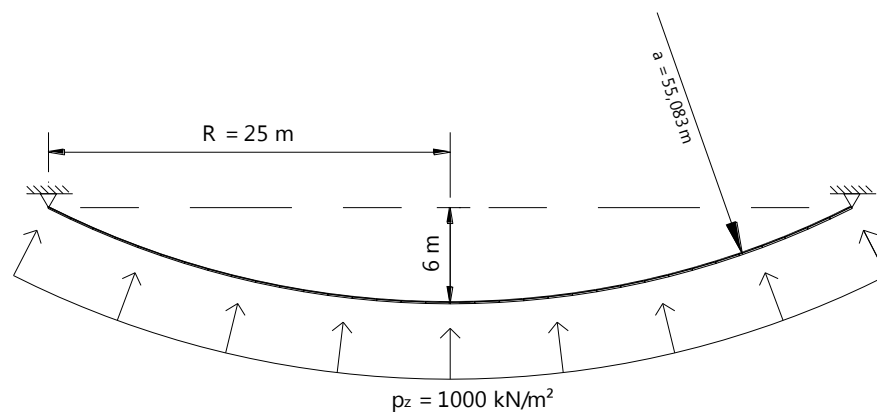


Figura 11: Desenho esquemático da subpressão hidrostática na casca esférica

### 7.1 Esforços de membrana para casca esférica

O esforço de membrana  $\bar{N}_\phi$  na direção meridional para a casca esférica sob a ação do empuxo hidrostático  $p_z$  é mostrado na [Figura 12](#).

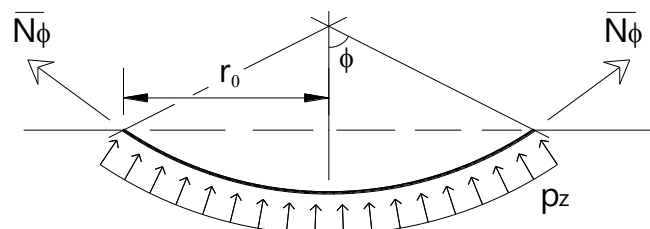


Figura 12: Esforço radial  $\bar{N}_\phi$  na casca esférica

A partir da formulação apresentada em [Billington \(1965\)](#) o esforço de membrana  $\bar{N}_\phi$  na direção meridional é expresso por (21):

$$\overline{N}_\phi = \frac{R_\phi}{2\pi r_0 \text{sen}\phi} \quad (21)$$

com  $R_\phi$  representado por (22):

$$R_\phi = p_z \cos\theta dA \quad R_\phi = 2\pi a^2 p_z \int_0^\phi \text{sen}\phi \cos\phi d\phi \quad R_\phi = \pi a^2 p_z (1 - \cos^2\phi) \quad (22)$$

sendo:

- $R_\phi$ : resultante do carregamento  $p_z$  atuante na casca;
- $p_z$ : pressão hidrostática sobre a casca;
- $a$ : raio da superfície média da casca esférica;
- $r_0$ : raio de curvatura do paralelo definido pelo ângulo  $\phi$ ;

que resulta em (23):

$$\overline{N}_\phi = -\frac{p_z a}{2} \quad (23)$$

O esforço de membrana  $\overline{N}_\theta$  na direção do paralelo para a casca esférica sob a ação do empuxo hidrostático é obtido através da equação de equilíbrio pela expressão (24):

$$\overline{N}_\theta = -p_z a - \overline{N}_\phi \quad (24)$$

## 7.2 Esforços de flexão para casca esférica

Os esforços  $N_\phi$ ,  $N_\theta$  e  $M_\phi$  para a casca esférica sob a ação do empuxo hidrostático podem ser descritos pelas equações (25) a (27) (Billington, 1965):

$$N_\phi = -\sqrt{2} \cot g(\phi_c - \bar{\phi}) \text{sen}(\phi_c) \text{sen}\left(\lambda\bar{\phi} - \frac{\pi}{4}\right) e^{-\lambda\bar{\phi}} H_c \quad (25)$$

$$N_\theta = -2\lambda \text{sen}(\phi_c) \text{sen}\left(\lambda\bar{\phi} - \frac{\pi}{2}\right) e^{-\lambda\bar{\phi}} H_c \quad (26)$$

$$M_\phi = \frac{a}{\lambda} \text{sen}\phi_c \text{sen}(\lambda\bar{\phi}) e^{-\lambda\bar{\phi}} H_c \quad (27)$$

E o deslocamento horizontal na borda  $\zeta_c$  expresso por (28):

$$\zeta_c = \frac{2a\lambda \text{sen}^2\phi_c}{Eh} H_c \quad (28)$$

Sendo  $\phi_c$  o ângulo entre o eixo de simetria vertical e a borda da casca, e  $\bar{\phi}$  o ângulo complementar medido a partir da borda da casca conforme mostrado na Figura 13.

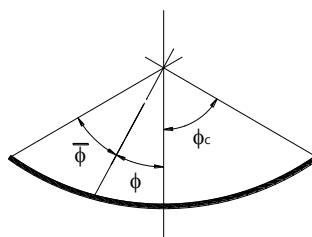


Figura 13: Coordenada  $\phi$  e parâmetros  $\phi_c$  e  $\bar{\phi}$

E a expressão de  $\lambda$  dada por (29):

$$\lambda^4 = (1-\nu^2) \left(\frac{a}{h}\right)^2 \tag{29}$$

### 7.3 Casca esférica apoiada na borda – princípio da superposição de efeitos

Considerando a casca esférica sob a ação do empuxo hidrostático apoiada no contorno, é possível utilizar o princípio da superposição de efeitos para a solução do problema original considerando o sistema fundamental e o hiperestático conforme mostrado na Figura 14. No sistema fundamental atuam somente o carregamento hidrostático na casca e os esforços de membrana, e no sistema hiperestático atua apenas o esforço horizontal relacionada à flexão, sendo que na superposição dos efeitos o deslocamento total da borda é nulo.

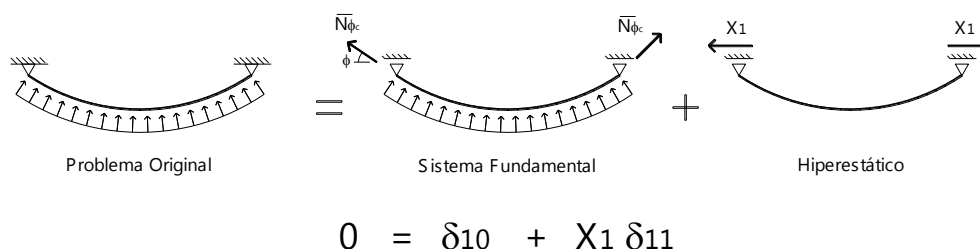


Figura 14: Esquema de solução do problema original

Segundo Billington (1965), as expressões para os deslocamentos da borda para o sistema fundamental e hiperestático da casca são representadas respectivamente por (30) e (31):

$$\delta_{10} = \frac{p_z a^2 \text{sen}\phi}{2 E h} (\nu - 1) \tag{30}$$

$$\delta_{11} = \frac{2 a \lambda \text{sen}^2 \phi_c}{E h} \tag{31}$$

## 8 CASCA ESFÉRICA – ANÁLISE DOS RESULTADOS

Para o caso da casca esférica circular apoiada na borda do fundo do poço de grandes dimensões sob a ação do empuxo hidrostático, os parâmetros a serem

considerados são:

$$E = 30.105 \text{ MPa}$$

$$\nu = 0,2$$

$$p_z = 1000 \text{ kN/m}^2$$

$$h = 2 \text{ m}$$

$$a = 55,083 \text{ m}$$

$$\phi_c = 26,99^\circ$$

### 8.1 Solução analítica para a casca esférica apoiada na borda

A solução analítica para obtenção dos esforços para a casca esférica circular é decorrente da aplicação da teoria utilizando inicialmente as equações (29) a (31), obtendo-se os valores de  $\lambda$ ,  $\delta_{10}$  e  $\delta_{11}$  conforme as equações (32) a (34):

$$\lambda^4 = (1 - \nu^2) \left( \frac{a}{h} \right)^2 \Rightarrow \lambda^4 = (1 - 0,2^2) \left( \frac{55,0833}{2} \right)^2 \Rightarrow \lambda = 6,837 \quad (32)$$

$$\delta_{10} = \frac{100 \cdot 55,083^2 \cdot \text{sen} 26,99^\circ}{2 \cdot 30105000 \cdot 2} (0,2 - 1) \quad (33)$$

$$\delta_{10} = -9,15 \times 10^{-4} \text{ m}$$

$$\delta_{11} = \frac{2 \cdot 55,083 \cdot 6,837 \cdot \text{sen}^2 26,99^\circ}{30105000 \cdot 2} \cdot 1 = 2,58 \times 10^{-6} \text{ m} \quad (34)$$

E da solução do sistema (35) obtém-se o valor da variável hiperestática  $X_1$  em (36), que é igual a  $H_c$ , para a determinação dos esforços de flexão de acordo com as equações (25) a (27) tem-se:

$$\delta_{10} + X_1 \delta_{11} = 0 \quad \Rightarrow \quad X_1 = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} \quad (35)$$

$$X_1 = \frac{9,15 \cdot 10^{-4}}{2,58 \cdot 10^{-6}} \quad \Rightarrow \quad X_1 = 354,65 \text{ kN} \quad (36)$$

Para compor os esforços totais na casca é necessário considerar os esforços de membrana e os de flexão para a superposição de efeitos, variando-se o ângulo  $\phi$  conforme os pontos considerados para a análise da estrutura. Os resultados para os esforços de membrana, de flexão e totais resultantes da superposição de efeitos são apresentados na [Tabela 3](#). A contribuição dos momentos fletores  $M_\phi$  nos esforços finais é pouco significativa diante dos esforços de membrana conforme apresentado em [Timoshenko e Woinowski-Kriger \(1959\)](#).



N	$\phi$ (°)	Solução Analítica						
		Membrana		Flexão			Totais	
		$N\phi$ (kN/m)	$N\theta$ (kN/m)	$N\phi$ (kN/m)	$N\theta$ (kN/m)	$M\phi$ (kNm/m)	$N\phi$ (kN/m)	$N\theta$ (kN/m)
1	0,0	-27541,5	-27541,5	0,00	-877,17	-40,87	-27541,50	-28418,67
2	0,5	-27541,5	-27541,5	-7675,33	-933,82	-10,59	-35216,83	-28475,32
3	1,0	-27541,5	-27541,5	-4318,43	-990,61	23,60	-31859,93	-28532,11
4	1,5	-27541,5	-27541,5	-3218,15	-1047,10	61,95	-30759,65	-28588,60
5	2,0	-27541,5	-27541,5	-2681,83	-1102,84	104,70	-30223,33	-28644,34
6	2,5	-27541,5	-27541,5	-2370,87	-1157,31	152,07	-29912,37	-28698,81
7	3,0	-27541,5	-27541,5	-2172,29	-1209,93	204,29	-29713,79	-28751,43
8	3,5	-27541,5	-27541,5	-2037,60	-1260,09	261,59	-29579,10	-28801,59
9	4,0	-27541,5	-27541,5	-1942,44	-1307,08	324,17	-29483,94	-28848,58
10	4,5	-27541,5	-27541,5	-1873,23	-1350,15	392,23	-29414,73	-28891,65
11	5,0	-27541,5	-27541,5	-1821,71	-1388,47	465,96	-29363,21	-28929,97
12	5,5	-27541,5	-27541,5	-1782,58	-1421,16	545,50	-29324,08	-28962,66
13	6,0	-27541,5	-27541,5	-1752,20	-1447,25	631,01	-29293,70	-28988,75
14	6,5	-27541,5	-27541,5	-1727,99	-1465,71	722,59	-29269,49	-29007,21
15	7,0	-27541,5	-27541,5	-1708,03	-1475,43	820,31	-29249,53	-29016,93
16	7,5	-27541,5	-27541,5	-1690,83	-1475,24	924,21	-29232,33	-29016,74
17	8,0	-27541,5	-27541,5	-1675,21	-1463,88	1034,31	-29216,71	-29005,38
18	8,5	-27541,5	-27541,5	-1660,18	-1440,02	1150,53	-29201,68	-28981,52
19	9,0	-27541,5	-27541,5	-1644,91	-1402,25	1272,80	-29186,41	-28943,75
20	9,5	-27541,5	-27541,5	-1628,66	-1349,09	1400,94	-29170,16	-28890,59
21	10,0	-27541,5	-27541,5	-1610,79	-1279,01	1534,73	-29152,29	-28820,51
22	10,5	-27541,5	-27541,5	-1590,67	-1190,38	1673,88	-29132,17	-28731,88
23	11,0	-27541,5	-27541,5	-1567,76	-1081,52	1818,02	-29109,26	-28623,02
24	11,5	-27541,5	-27541,5	-1541,52	-950,70	1966,69	-29083,02	-28492,20
25	12,0	-27541,5	-27541,5	-1511,44	-796,11	2119,33	-29052,94	-28337,61
26	12,5	-27541,5	-27541,5	-1477,01	-615,91	2275,31	-29018,51	-28157,41
27	13,0	-27541,5	-27541,5	-1437,77	-408,22	2433,87	-28979,27	-27949,72
28	13,5	-27541,5	-27541,5	-1393,23	-171,13	2594,12	-28934,73	-27712,63
29	14,0	-27541,5	-27541,5	-1342,93	97,30	2755,08	-28884,43	-27444,20
30	14,5	-27541,5	-27541,5	-1286,42	399,02	2915,62	-28827,92	-27142,48
31	15,0	-27541,5	-27541,5	-1223,23	735,96	3074,48	-28764,73	-26805,54
32	15,5	-27541,5	-27541,5	-1152,94	1110,04	3230,23	-28694,44	-26431,46
33	16,0	-27541,5	-27541,5	-1075,09	1523,14	3381,32	-28616,59	-26018,36
34	16,5	-27541,5	-27541,5	-989,27	1977,08	3526,00	-28530,77	-25564,42
35	17,0	-27541,5	-27541,5	-895,06	2473,61	3662,37	-28436,56	-25067,89
36	17,5	-27541,5	-27541,5	-792,05	3014,38	3788,36	-28333,55	-24527,12
37	18,0	-27541,5	-27541,5	-679,87	3600,90	3901,68	-28221,37	-23940,60
38	18,5	-27541,5	-27541,5	-558,13	4234,54	3999,88	-28099,63	-23306,96
39	19,0	-27541,5	-27541,5	-426,50	4916,49	4080,30	-27968,00	-22625,01
40	19,5	-27541,5	-27541,5	-284,64	5647,71	4140,08	-27826,14	-21893,79
41	20,0	-27541,5	-27541,5	-132,26	6428,93	4176,15	-27673,76	-21112,57
42	20,5	-27541,5	-27541,5	30,91	7260,56	4185,23	-27510,59	-20280,94
43	21,0	-27541,5	-27541,5	205,10	8142,73	4163,84	-27336,40	-19398,77
44	21,5	-27541,5	-27541,5	390,49	9075,17	4108,27	-27151,01	-18466,33
45	22,0	-27541,5	-27541,5	587,25	10057,21	4014,62	-26954,25	-17484,29
46	22,5	-27541,5	-27541,5	795,46	11087,70	3878,77	-26746,04	-16453,80
47	23,0	-27541,5	-27541,5	1015,18	12165,00	3696,38	-26526,32	-15376,50
48	23,5	-27541,5	-27541,5	1246,38	13286,91	3462,95	-26295,12	-14254,59
49	24,0	-27541,5	-27541,5	1488,99	14450,60	3173,77	-26052,51	-13090,90
50	24,5	-27541,5	-27541,5	1742,85	15652,56	2823,96	-25798,65	-11888,94
51	25,0	-27541,5	-27541,5	2007,75	16888,58	2408,48	-25533,75	-10652,92
52	25,5	-27541,5	-27541,5	2283,36	18153,63	1922,14	-25258,14	-9387,87
53	26,0	-27541,5	-27541,5	2569,31	19441,82	1359,64	-24972,19	-8099,68
54	26,5	-27541,5	-27541,5	2865,09	20746,35	715,58	-24676,41	-6795,15
55	27,0	-27541,5	-27541,5	3163,93	22033,15	-15,51	-24377,57	-5508,35

Tabela 3: Casca esférica circular – esforços solicitantes (solução analítica)

## 8.2 Solução numérica para a casca esférica apoiada na borda

Para a análise pelo Método dos Elementos Finitos foi utilizado o software SAP2000®. Para a casca esférica circular de concreto foi adotado o modelo discretizado com elementos quadrangulares (Figura 15) com seis graus de liberdade por ponto nodal situado nos vértices do elemento (três translações e três rotações).

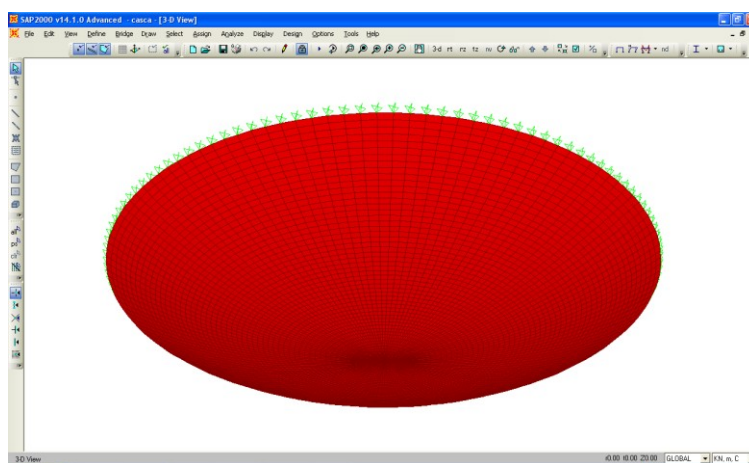


Figura 15: Casca esférica circular modelada no SAP2000®

Os esforços totais na casca variando-se o ângulo  $\phi$  conforme os pontos considerados para a análise da estrutura são apresentados na Figura 16 e Tabela 4, e Figura 17 e Tabela 5. E os esforços normais nas direções dos meridianos e dos paralelos na Figura 18 e na Figura 19. A Figura 20 apresenta os valores dos momentos fletores  $M_\phi$  devidos à flexão.

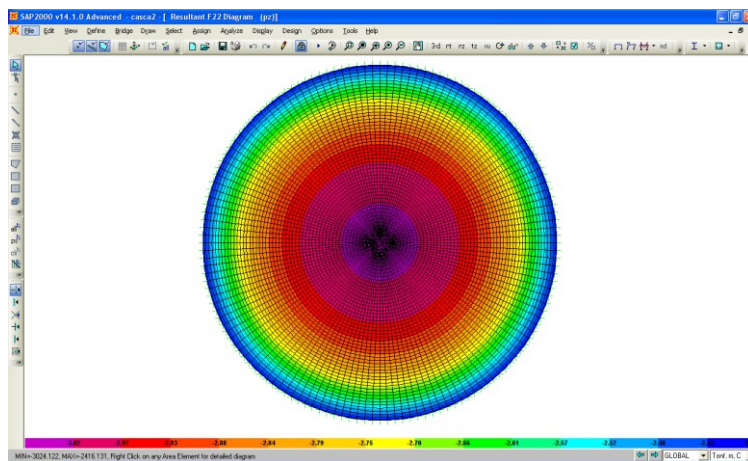


Figura 16: Esforços tangenciais aos meridianos  $N_\phi$  (kN/m) na casca esférica circular

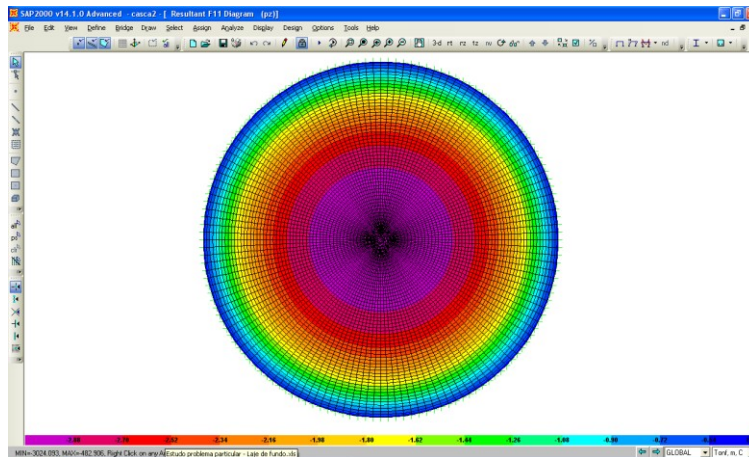


Figura 17: Esforços tangenciais aos paralelos  $N_{\theta}$  (kN/m) na casca esférica circular

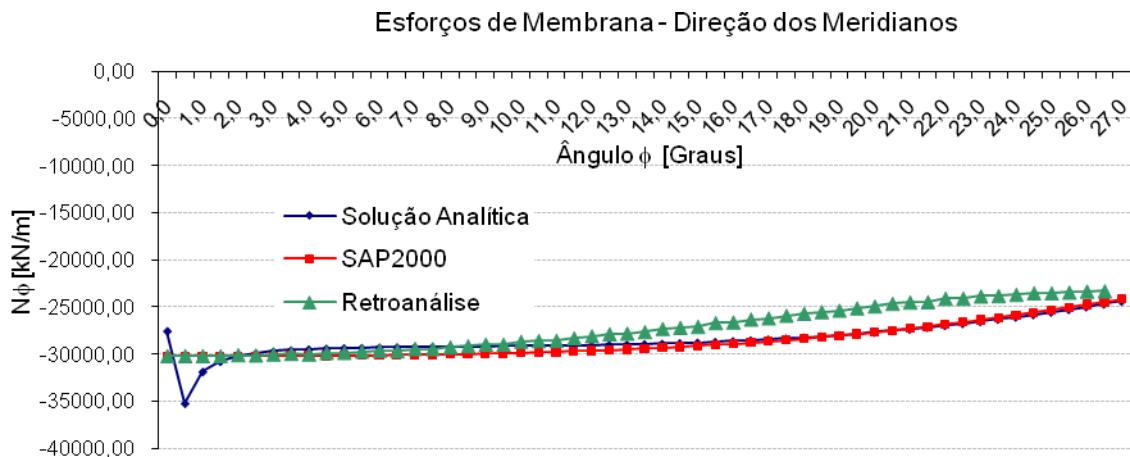


Figura 18: Esforços normais  $N_{\phi}$  (kN/m) na direção dos meridianos da casca esférica circular

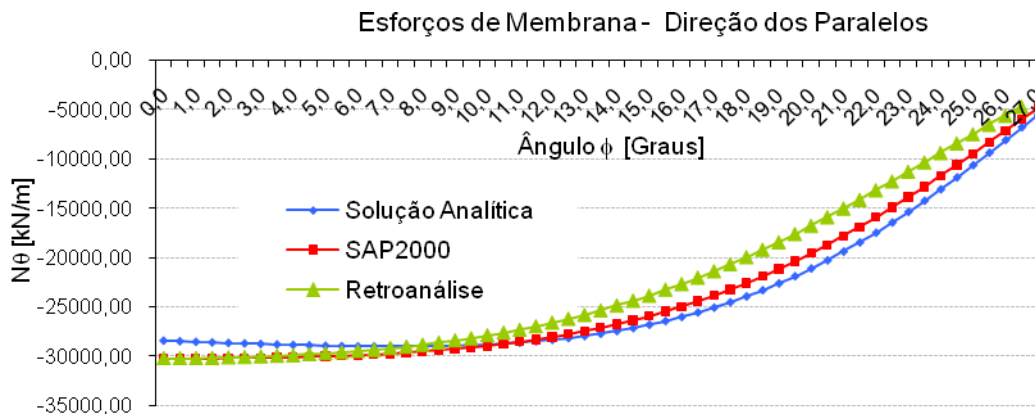


Figura 19: Esforços normais  $N_{\theta}$  (kN/m) na direção dos paralelos da casca esférica circular

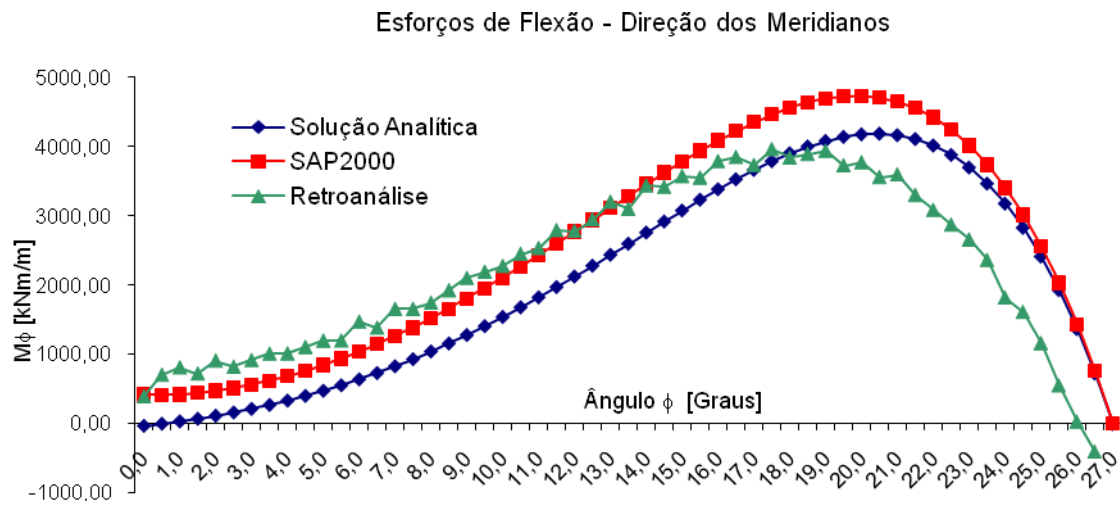


Figura 20: Esforços de flexão  $M_\phi$  (kNm/m) na direção dos meridianos da casca esférica circular

N	$\phi$ (°)	Esforços de Membrana					
		Solução Analítica		SAP2000		Retroanálise	
		$N\phi$ (kN/m)	$N\theta$ (kN/m)	$N\phi$ (kN/m)	$N\theta$ (kN/m)	$N\phi$ (kN/m)	$N\theta$ (kN/m)
1	0,0	-27541,50	-28418,67	-30242,98	-30241,86		
2	0,5	-35216,83	-28475,32	-30241,22	-30237	-30216	-30216,2
3	1,0	-31859,93	-28532,11	-30238,48	-30229,16	-30217,2	-30211,8
4	1,5	-30759,65	-28588,60	-30234,57	-30217,99	-30225,6	-30205,8
5	2,0	-30223,33	-28644,34	-30229,42	-30203,21	-30237,8	-30197,5
6	2,5	-29912,37	-28698,81	-30222,95	-30184,46	-30128,6	-30136,9
7	3,0	-29713,79	-28751,43	-30215,07	-30161,32	-30155,5	-30108,8
8	3,5	-29579,10	-28801,59	-30205,7	-30133,27	-30063,5	-30040,8
9	4,0	-29483,94	-28848,58	-30194,7	-30099,72	-29987,6	-29964,8
10	4,5	-29414,73	-28891,65	-30181,95	-30060,01	-30055,6	-29923,1
11	5,0	-29363,21	-28929,97	-30167,31	-30013,4	-29881,8	-29811
12	5,5	-29324,08	-28962,66	-30150,61	-29959,08	-29863,6	-29724,7
13	6,0	-29293,70	-28988,75	-30131,69	-29896,16	-29729,8	-29600,2
14	6,5	-29269,49	-29007,21	-30110,35	-29823,68	-29652,3	-29474,7
15	7,0	-29249,53	-29016,93	-30086,4	-29740,63	-29713,9	-29375,8
16	7,5	-29232,33	-29016,74	-30059,63	-29645,91	-29451,8	-29186
17	8,0	-29216,71	-29005,38	-30029,81	-29538,37	-29477,1	-29047,3
18	8,5	-29201,68	-28981,52	-29996,7	-29416,8	-29287,7	-28845,8
19	9,0	-29186,41	-28943,75	-29960,06	-29279,93	-29166,2	-28640,9
20	9,5	-29170,16	-28890,59	-29919,63	-29126,44	-28990	-28404,2
21	10,0	-29152,29	-28820,51	-29875,15	-28954,96	-29004	-28193,7
22	10,5	-29132,17	-28731,88	-29826,34	-28764,09	-28694,6	-27890,8
23	11,0	-29109,26	-28623,02	-29772,92	-28552,39	-28605,9	-27613,7
24	11,5	-29083,02	-28492,20	-29714,59	-28318,38	-28591,6	-27335,4
25	12,0	-29052,94	-28337,61	-29651,07	-28060,58	-28321,8	-26977
26	12,5	-29018,51	-28157,41	-29582,05	-27777,48	-28111,2	-26604,9
27	13,0	-28979,27	-27949,72	-29507,24	-27467,57	-27889	-26203,7
28	13,5	-28934,73	-27712,63	-29426,33	-27129,36	-27820,4	-25809,5
29	14,0	-28884,43	-27444,20	-29339,03	-26761,37	-27666,8	-25373,3
30	14,5	-28827,92	-27142,48	-29245,02	-26362,15	-27329,6	-24865,9
31	15,0	-28764,73	-26805,54	-29144,02	-25930,29	-27201,1	-24373,8
32	15,5	-28694,44	-26431,46	-29035,74	-25464,46	-27096,5	-23859,2
33	16,0	-28616,59	-26018,36	-28919,89	-24963,36	-26701,9	-23251,6
34	16,5	-28530,77	-25564,42	-28796,19	-24425,84	-26631,4	-22681,1
35	17,0	-28436,56	-25067,89	-28664,4	-23850,81	-26319,4	-22027,5
36	17,5	-28333,55	-24527,12	-28524,26	-23237,33	-26196,8	-21384,1
37	18,0	-28221,37	-23940,60	-28375,55	-22584,62	-25918,8	-20675,6
38	18,5	-28099,63	-23306,96	-28218,06	-21892,06	-25710,8	-19950,7
39	19,0	-27968,00	-22625,01	-28051,6	-21159,23	-25529,7	-19201,2
40	19,5	-27826,14	-21893,79	-27876,01	-20385,93	-25381,2	-18428,8
41	20,0	-27673,76	-21112,57	-27691,18	-19572,2	-25140,1	-17608,8
42	20,5	-27510,59	-20280,94	-27496,99	-18718,39	-24936,4	-16767,9
43	21,0	-27336,40	-19398,77	-27293,39	-17825,13	-24638,8	-15880,4
44	21,5	-27151,01	-18466,33	-27080,35	-16893,39	-24505,7	-15001,3
45	22,0	-26954,25	-17484,29	-26857,9	-15924,52	-24472,1	-14123
46	22,5	-26746,04	-16453,80	-26626,11	-14920,27	-24093,2	-13151,8
47	23,0	-26526,32	-15376,50	-26385,1	-13882,85	-24091,7	-12242,4
48	23,5	-26295,12	-14254,59	-26135,03	-12814,93	-23858	-11270,5
49	24,0	-26052,51	-13090,90	-25876,14	-11719,69	-23816,4	-10327,7
50	24,5	-25798,65	-11888,94	-25608,73	-10600,89	-23677,9	-9360,42
51	25,0	-25533,75	-10652,92	-25333,16	-9462,88	-23521	-8385,91
52	25,5	-25258,14	-9387,87	-25049,86	-8310,63	-23530	-7448,72
53	26,0	-24972,19	-8099,68	-24759,34	-7149,8	-23455,6	-6504
54	26,5	-24676,41	-6795,15	-24462,19	-5986,79	-23331,2	-5562,88
55	27,0	-24377,57	-5508,35	-24159,08	-4828,73	-23310,7	-4662,14

Tabela 4: Casca esférica circular – esforços de membrana

N	$\phi$ (°)	Esforços de Flexão $M\phi$ (kNm/m)		
		Solução Analítica	SAP2000	Retroanálise
		$M\phi$ (kNm/m)	$M\phi$ (kNm/m)	$M\phi$ (kNm/m)
1	0,0	-40,87	415,78	0
2	0,5	-10,59	407,05	387,50
3	1,0	23,60	418,00	697,50
4	1,5	61,95	438,71	803,20
5	2,0	104,70	469,02	715,56
6	2,5	152,07	508,64	904,23
7	3,0	204,29	557,42	816,11
8	3,5	261,59	615,23	909,51
9	4,0	324,17	681,93	1003,65
10	4,5	392,23	757,39	1006,68
11	5,0	465,96	841,48	1098,98
12	5,5	545,50	934,02	1192,30
13	6,0	631,01	1034,83	1193,27
14	6,5	722,59	1143,68	1467,28
15	7,0	820,31	1260,34	1378,96
16	7,5	924,21	1384,52	1650,21
17	8,0	1034,31	1515,88	1651,61
18	8,5	1150,53	1654,06	1740,80
19	9,0	1272,80	1798,63	1919,85
20	9,5	1400,94	1949,11	2097,92
21	10,0	1534,73	2104,96	2186,23
22	10,5	1673,88	2265,58	2271,20
23	11,0	1818,02	2430,29	2445,70
24	11,5	1966,69	2598,32	2529,84
25	12,0	2119,33	2768,85	2789,27
26	12,5	2275,31	2940,93	2780,22
27	13,0	2433,87	3113,56	2946,93
28	13,5	2594,12	3285,59	3201,22
29	14,0	2755,08	3455,80	3099,00
30	14,5	2915,62	3622,84	3434,90
31	15,0	3074,48	3785,23	3417,30
32	15,5	3230,23	3941,40	3573,30
33	16,0	3381,32	4089,61	3549,87
34	16,5	3526,00	4228,02	3788,18
35	17,0	3662,37	4354,61	3847,71
36	17,5	3788,36	4467,25	3732,26
37	18,0	3901,68	4563,64	3960,37
38	18,5	3999,88	4641,33	3840,23
39	19,0	4080,30	4697,73	3890,73
40	19,5	4140,08	4730,08	3938,79
41	20,0	4176,15	4735,47	3727,32
42	20,5	4185,23	4710,81	3770,93
43	21,0	4163,84	4652,89	3556,78
44	21,5	4108,27	4558,33	3597,00
45	22,0	4014,62	4423,58	3298,23
46	22,5	3878,77	4244,97	3082,11
47	23,0	3696,38	4018,68	2868,48
48	23,5	3462,95	3740,78	2653,83
49	24,0	3173,77	3407,21	2357,93
50	24,5	2823,96	3013,79	1815,22
51	25,0	2408,48	2556,28	1606,73
52	25,5	1922,14	2030,34	1154,67
53	26,0	1359,64	1431,61	543,62
54	26,5	715,58	755,68	20,91
55	27,0	-15,51	-1,92	-413,49

Tabela 5: Casca esférica circular – momentos fletores

## 9 CONCLUSÕES

Para o caso da estrutura do fundo de poços de grandes dimensões há a possibilidade de se substituir a placa circular por casca esférica circular apoiada no contorno, que será solicitada principalmente por esforços de membrana. Desta forma a espessura pode ser reduzida consideravelmente, e a economia no consumo de material será significativa. Entretanto, é importante a análise relativa à perda da estabilidade da casca que será motivo de trabalho futuro.

## REFERÊNCIAS

- SAP2000® Advanced 11.0.8, *Structural Analysis Program*, Computers and Structures, Inc., Berkeley, CA, USA, 2007.
- Billington, D.P., *Thin shell concrete structures*. McGraw-Hill, 1965.
- Timoshenko, S.P., and Woinowsky-Krieger, S., *Theory of plates and shells*, 2d ed., McGraw-Hill, 1959.