

ANÁLISE ESTRUTURAL DE TORRES DE RESFRIAMENTO HIPERBÓLICAS SOLICITADAS POR CARREGAMENTO ASSIMÉTRICO

Isaias Vizotto^a, Paschoal Perdão Junior^b e Juliana P. Lopes^c

^a*Professor, UNICAMP - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo, Departamento de Estruturas, Av. Albert Einstein 951, Cidade Universitária, Barão Geraldo, 13.083-852 Campinas, SP, Brasil, vizotto@fec.unicamp.br*

^b*Professor, FACCAMP – Faculdade Campo Limpo Paulista, R. Guatemala 167, Jardim América, 13.231-230 Campo Limpo Paulista, SP, Brasil, p_p_j_r@ig.com.br*

^c*Bacharel em Ciência da Computação, FACCAMP – Faculdade Campo Limpo Paulista, R. Guatemala 167, Jardim América, 13.231-230 Campo Limpo Paulista, SP, Brasil, jupaniago@hotmail.com*

Palavras Chave: Torres de Resfriamento Hiperbólicas, Solução Analítica para Torres de Resfriamento Hiperbólicas sob Ação do Vento, Harmônicos de Torres Hiperbólicas sob Ação do Vento, Estado de Membrana de Torres Hiperbólicas sob Ação do Vento, Carregamentos Assimétricos Aplicados às Torres Hiperbólicas.

Resumo. Para estruturas em casca as formas das superfícies são importantes para a determinação do comportamento estrutural predominante. O estado de tensão é fortemente dependente da forma tridimensional da casca. O estado de tensão ideal para essas estruturas é de compressão pura. O principal objetivo deste trabalho é apresentar soluções analíticas para problemas de torres de resfriamento hiperbólicas sob a ação de carregamentos assimétricos devidos ao vento. Estruturas em casca em forma de hiperbolóides de revolução são amplamente empregadas em projetos de torres de resfriamento de concreto. Carregamentos simétricos têm tratamento matemático analítico, enquanto carregamentos assimétricos devidos ao vento, por exemplo, requerem soluções numéricas que possuem dificuldade inerente pelo motivo de que uma das curvaturas principais da hipérbole é negativa. São apresentadas soluções envolvendo aproximação por séries para os casos de carregamentos assimétricos, e também utilizando o Método de Runge-Kutta de quarta ordem. É apresentada a análise estrutural de uma torre de resfriamento hiperbólica de concreto sob a ação de um carregamento assimétrico do vento com as aproximações propostas. São realizadas comparações entre os resultados e com soluções obtidas por outro autor pelo Método das Diferenças Finitas. Os esforços de membrana obtidos por meio dos diferentes métodos são apresentados através de tabelas e gráficos para vários pontos ao longo da altura da estrutura.

1 INTRODUÇÃO

Este trabalho tem por objetivo analisar os esforços assimétricos devido ao vento em torres de resfriamento hiperbólicas. Segundo [Singh e Gupta \(1976\)](#), esforços não-simétricos são da maior importância, pois, usualmente, são determinantes para o projeto de hiperbolóides de revolução. De acordo com [Niemann \(1980\)](#), o principal caso de carregamento para projetos de torres de resfriamento de concreto armado é produzido por forças oriundas da ação do vento, com exceção dos casos onde forças geradas pela ação de terremotos são consideradas.

Este estudo é baseado inicialmente nas equações de equilíbrio e nas respectivas equações diferenciais, empregadas por [Soare \(1967\)](#), nas quais foram utilizadas "funções de tensão" responsáveis pelo "estado assimétrico de tensão em cascas hiperbólicas de revolução". Para a solução dessas equações diferenciais, [Soare \(1967\)](#) empregou o "Método das Diferenças Finitas". Neste trabalho é utilizado o mesmo desenvolvimento analítico, porém, são obtidas expressões analíticas para os esforços que governam o estado assimétrico de tensão em cascas hiperbólicas de revolução.

É bastante conhecida a importância e conveniência da forma geométrica hiperbólica, em termos de economia e resistência estrutural. Muitas são as propostas visando uma melhor compreensão sobre a ação do vento nessas formas geométricas especiais de revolução, pois o vento se constitui em um dos principais carregamentos aos quais essas estruturas em casca podem ser submetidas.

Um fator extremamente importante a ser considerado, juntamente com a incidência dessas construções em todo o mundo, é sua sensibilidade ao grupamento, em suas proximidades, de outras torres ou estruturas. [Soare \(1967\)](#) utiliza em sua formulação expansões em harmônicos (0,1 e 2 para o estado de membrana) para estudar a ação assimétrica do vento nesses hiperbolóides, e um ponto extremamente importante nessa formulação é que ela permite que a pressão do vento seja aplicada independentemente de seu desenvolvimento e resolução, tornando-a bastante atual face às novas descobertas e novos desenvolvimentos voltados à compreensão da ação do vento em torres de resfriamento (ou grupamento de torres de resfriamento) sob a forma de cascas hiperbólicas de revolução.

A proposta deste trabalho para a solução das equações geradas pela formulação de [Soare \(1967\)](#) resume-se, literalmente, na apresentação de expressões analíticas para os esforços na casca hiperbólica solicitada pelo vento, para os diversos harmônicos responsáveis pelo estado de membrana. Os resultados obtidos são comparados com os disponíveis na publicação de [Soare \(1967\)](#), com os obtidos através da programação do Método de Runge-Kutta de quarta ordem, e com os obtidos através do emprego do software Mathematica, que também utiliza um Runge-Kutta de quarta ordem para solução de sistemas de equações diferenciais.

2 CONSIDERAÇÕES SOBRE TORRES HIPERBÓLICAS

Estruturas em forma de cascas hiperbólicas são muito eficientes e podem ser

utilizadas em muitas aplicações. Cascas hiperbólicas são estruturas finas, e devido à sua curvatura, são esteticamente agradáveis e apresentam resistência estrutural adequada para diversos carregamentos simétricos. Estudos têm demonstrado que a forma hiperbólica também é a solução mais econômica para ações assimétricas (Nasir, Thambiratnam, Butler e Austin, 2002). As edificações de parede fina sob a forma hiperbólica apresentam condições de boa aerodinâmica, resistência e estabilidade (Krivoshapko, 2002).

Torres hiperbólicas são empregadas, por exemplo, em usinas nucleares, torres de resfriamento, reservatórios de água, torres de TV, e projetos industriais. Esta estrutura especial conquistou importância considerável dentro da Engenharia Civil. Devido à geometria, primariamente, essas torres resistem a forças aplicadas através da ação de membrana. Em décadas recentes, o tamanho dessas torres tem aumentado para mais de 150 metros de altura e 60 metros de diâmetro de base, com espessura de parede em torno de 20 a 25 centímetros para a maioria das cascas. O projeto de um hiperbolóide de revolução é baseado em tensões calculadas a partir de análises elásticas da estrutura (Mahmoud e Gupta, 1995). As grandes dimensões destas cascas fazem com que se tornem vulneráveis a terremotos e distúrbios de vento (Niemann, 1980; Godbole, Viladkar e Tanka, 1998).

Uma análise precisa do comportamento estrutural dos hiperbolóides de revolução e a conseqüente segurança de projeto constitui desafios para os engenheiros projetistas. A análise de grandes estruturas sob forma de cascas solicitadas pelo vento tem sido continuamente objeto de estudo. O interesse por hiperbolóides de revolução é atribuído ao aumento da demanda de projetos e construção de estruturas cada vez maiores, aproximadamente 200 metros de altura, e devido ao colapso de várias torres em diversos países da Europa (Byun e Kapania, 1992; Kapania e Yang, 1984; Reed e Scanlan, 1983; e Basu e Gould, 1980).

Durante a construção dessas cascas podem ocorrer substanciais desvios entre a forma projetada e a forma construída. Estas imperfeições geométricas podem alterar significativamente o comportamento estrutural de torres de resfriamento hiperbólicas, isto é, podem alterar a resposta estática, respostas de vibração livre e forçada, e o comportamento referente à flambagem e pós-flambagem (Yang e Kapania, e Nelson, apud Byun e Kapania, 1992). O comportamento estrutural da casca é sensível a qualquer mudança na geometria. Essas imperfeições podem gerar os chamados efeitos danosos na análise de precisão de sua influência na estabilidade e performance de uma torre (Fricker apud Godbole, Viladkar e Tanka, 1998).

As investigações demonstraram que os efeitos do escoamento de vento em torno de grupos complexos de torres e edificações podem dar origem a tensões, principais e secundárias, muito mais severas do que aquelas que se apresentam em uma torre isolada, considerando-se a mesma velocidade do vento. O desenvolvimento de pesquisas envolvendo análise dinâmica de resposta ao vento em torres de resfriamento levou à melhor compreensão acerca do comportamento, análise, projeto e construção dessas estruturas (Armitt, 1980).

Os colapsos de torres de resfriamento ocorridos na Inglaterra em 1965, na Escócia em 1973, no norte da França em 1979 e no Reino Unido em 1984 têm atraído a atenção de muitos pesquisadores. O carregamento principal para projetos de torres hiperbólicas é produzido pelo vento, com exceção dos casos onde esforços devidos a terremotos têm significativa importância. As forças devidas ao vento atuando em hiperbolóides de revolução são não-simétricas devido aos efeitos aerodinâmicos do vento, bem como devido à presença de um grupo de torres, ou quaisquer outras estruturas proeminentes em sua vizinhança (Krishna, Godbole e Viladkar, 1993).

3 FORMULAÇÃO

Para a análise dos hiperbolóides de revolução será considerado a teoria de membrana de cascas finas, pois os esforços de flexão são desprezíveis. As resultantes dos carregamentos (X , Y e Z) e esforços de membrana (N_φ , N_θ , $N_{\varphi\theta}$ e $N_{\theta\varphi}$) atuantes em um elemento infinitesimal de casca, e a representação do equilíbrio de uma secção transversal desse elemento estrutural são apresentados na Figura 1, conforme Soare (1967).

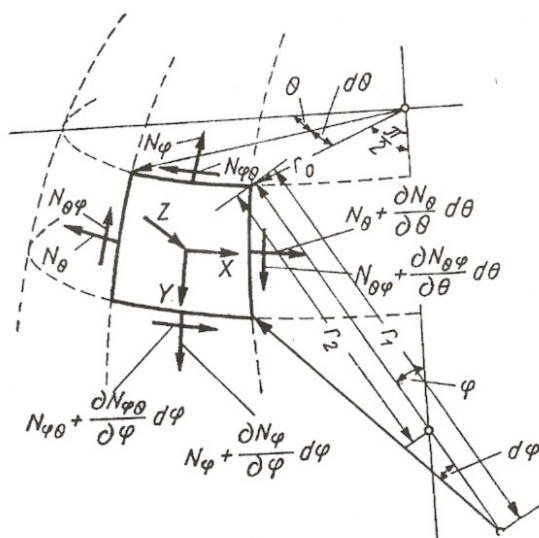


Figura 1: Carregamentos e esforços solicitantes de membrana em elemento de casca (Fonte: Soare, 1967, p. 117)

As equações de equilíbrio em função das coordenadas φ e θ são representadas pelas expressões (1):

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} r_1 + \frac{\partial(N_{\varphi\theta} r_0)}{\partial \varphi} + N_{\varphi\theta} r_1 \cos \varphi + X r_0 r_1 &= 0 \\ \frac{\partial N_{\varphi\theta}}{\partial \theta} r_1 + \frac{\partial(N_\varphi r_0)}{\partial \varphi} - N_\varphi r_1 \cos \varphi + Y r_0 r_1 &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

$$\frac{N_{\varphi}}{r_1} + \frac{N_{\theta}}{r_2} = -Z$$

As equações básicas podem ser representadas em função das coordenadas z e θ pelas expressões (2):

$$-\frac{\partial N_{\varphi}}{\partial \theta} + \frac{\partial(N_{\varphi\theta} r_0)}{\partial z} \frac{r_1}{r_2} \operatorname{sen}\varphi + N_{\theta\varphi} \frac{r_1}{r_2} \cos\varphi = \left(-X \operatorname{sen}\varphi + \frac{\partial Z}{\partial \theta}\right) r_1 \quad (2)$$

$$\frac{\partial N_{\theta\varphi}}{\partial \theta} + \frac{\partial(N_{\varphi} r_0)}{\partial z} \operatorname{sen}\varphi + N_{\varphi} \frac{r_2}{r_1} \cos\varphi = -(Y \operatorname{sen}\varphi + Z \cos\varphi) r_2$$

O problema pode ainda ser simplificado pela introdução de funções de tensão, sendo que neste caso são utilizadas (Soare, 1967):

$$F_1 = -\frac{1}{n} N_{\varphi\theta} r_0^2 \quad (3)$$

$$F_2 = N_{\varphi} r_0 \operatorname{sen}\varphi$$

Para a determinação completa dos esforços na casca é necessário o conhecimento dos valores iniciais no seu topo superior. Para cascas abertas, das condições de equilíbrio estático, tem-se no círculo paralelo superior:

$$N_{\varphi\theta} = N_{\varphi} \equiv 0 \quad (4)$$

Genérica e simplificada, pode-se assumir o carregamento devido à variação da pressão do vento p_w como sendo senoidal ao longo do meridiano da hipérbole:

$$Z_n = p_w \operatorname{sen}\varphi \quad (5)$$

Para o estado de tensão de membrana, após a expansão por harmônicos, consideram-se os três primeiros destes: $n=0, 1, 2$. O harmônico $n=0$ corresponde ao estado simétrico de tensão. Os resultados são facilmente obtidos por integração direta. Para os outros harmônicos utilizam-se as funções de tensão, F_1 e F_2 , definidas em (3).

Segundo Soare (1967), o sistema de equações diferenciais ordinárias, em termos da variável z , para o qual é apresentada uma solução analítica é:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dF_1}{dz} - \frac{r_0}{r_1 \operatorname{sen}^3\varphi} F_2 &= r_2^2 \left(Z_n + \frac{1}{n} X_n \operatorname{sen}\varphi \right) \\ \frac{dF_2}{dz} - \frac{n^2}{r_0^2} F_1 &= -r_2 (Y_n \operatorname{sen}\varphi + Z_n \cos\varphi) \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Para o caso particular em que são consideradas as componentes de carregamento ($X_n = Y_n \equiv 0$, $Z_n = p_w \operatorname{sen}\varphi$), as equações (6) podem ser representadas por:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dF_1}{dz} + \frac{a^2}{r_0^2 \operatorname{tg}^2 A} F_2 &= \frac{\rho_w r_0^2}{\operatorname{sen} \varphi} \\ \frac{dF_2}{dz} - \frac{n^2}{r_0^2} F_1 &= -\rho_w r_0 \cos \varphi \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Eliminando F_2 das duas relações, e fazendo-se $F_1 = F$, obtém-se a equação responsável pelo estudo envolvendo a análise de tensões provocadas pela ação do vento na torre de resfriamento, em forma de um hiperbolóide de revolução:

$$\frac{d^2 F}{dz^2} + \frac{2 \cot g \varphi}{r_0} \frac{dF}{dz} + \frac{n^2 a^2}{r_0^4 \operatorname{tg}^2 A} F = \frac{4 \rho_w \cos \varphi}{r_0} \left(r_2^2 + \frac{a^2}{2 \operatorname{tg}^2 A} \right) \quad (8)$$

Observações:

I) $r_0 = a \sqrt{1 + \left(\frac{z}{b}\right)^2}$ é raio do círculo paralelo da torre, onde: $\operatorname{tg} A = \frac{b}{a}$ (A é o ângulo formado pelas assintóticas do meridiano da hipérbole e o eixo $O r_0$);

II) z = eixo vertical da torre, e r_1 e r_2 são os raios principais de curvatura da hipérbole:

$$r_1 = - \frac{a \operatorname{sen}^2 A \cos A}{(\cos^2 A - \cos^2 \varphi)^{3/2}} = - \frac{z^3}{b^2 \operatorname{tg}^2 A \cos^3 \varphi}$$

$$r_2 = \frac{r_0}{\operatorname{sen} \varphi} \quad (9)$$

III) X , Y e Z são os carregamentos externos da casca, sendo Z a componente representada pelo esforço de vento, ou seja, a componente ortogonal às tangentes da torre;

IV) Da equação da hipérbole, deduz-se:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{dz}{dr_0} = \pm \frac{b}{a} \frac{r_0}{\sqrt{r_0^2 - a^2}} = \frac{r_0}{z} \operatorname{tg}^2 A \quad (10)$$

$$\operatorname{sen} \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{z^2}{r_0^2 \operatorname{tg}^4 A}}}$$

$$\cos \varphi = \frac{1}{\pm \sqrt{1 + \frac{r_0^2 \operatorname{tg}^4 A}{z^2}}} \quad (11)$$

V) Equação cartesiana do meridiano da hipérbole: $\frac{r_0^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1$; onde b representa o semi-eixo imaginário que será determinado, da condição $r_0 = r_{0,l}$ para $z = z_l$,

$$\text{por: } b = \frac{z_l}{\sqrt{\frac{r_{0,l}^2}{a^2} - 1}}.$$

4 METODOLOGIA

Para o estudo dos esforços numa torre hiperbólica é admitido o estado de membrana para a estrutura. Nessas condições, conforme Soare (1967), são analisadas as equações (7) e (8), nas quais são enfocados os harmônicos 0, 1, e 2.

Tomando-se a parte homogênea da equação (8), tem-se:

$$\frac{d^2 F}{dz^2} + \frac{2 \operatorname{Cotg} \varphi}{r_0} \frac{dF}{dz} + \frac{n^2 a^2}{r_0^4 \operatorname{tg}^2 A} F = 0 \quad (12)$$

Cuja solução conforme Kamke (1983) é:

$$\begin{aligned} \varphi = \varphi_1 &= C \cos \left[n \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{z}{b} \right) \right] \\ \varphi_2 &= -\frac{d\varphi_1}{dz} \frac{r_0^2 \operatorname{tg}^2 A}{a^2} = C n \operatorname{sen} \left[n \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{z}{b} \right) \right] \frac{b}{a^2} \end{aligned} \quad (13)$$

O Wronskiano, conforme Kamke (1983), é dado por:

$$W = \varphi_1 \varphi_2' - \varphi_1' \varphi_2 = C^2 n^2 \frac{\operatorname{tg}^2 A}{(b^2 + z^2)} \quad (14)$$

4.1 Estudo para o harmônico "0" ($n=0$)

Para o harmônico 0 ($n=0$), correspondente ao estado simétrico de tensão, as equações (7) podem ser resolvidas por integração direta:

$$\frac{dF_2}{dz} = \frac{dF_2}{dr_0} \frac{dr_0}{dz} = \frac{dF_2}{dr_0} \frac{1}{\operatorname{tg} \varphi} = -p_w r_0 \cos \varphi \Rightarrow \frac{dF_2}{dr_0} = -p_w r_0 \cos \varphi \operatorname{tg} \varphi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_2 = -p_w \operatorname{tg} A \int \frac{r_0^2}{\sqrt{\sec^2 A r_0^2 - a^2}} dr_0 \Rightarrow$$

$$F_2 = -\frac{p_w \operatorname{sen} A \cos A}{2}.$$

$$\cdot \left\{ r_0 \sqrt{\sec^2 A r_0^2 - a^2} + \frac{a^2}{\sec A} \ln \left[2 \sec A \sqrt{\sec^2 A r_0^2 - a^2} + 2 \sec^2 A r_0 \right] \right\} - p_w \operatorname{tg} A C \quad (15)$$

Onde a constante C é determinada através da condição inicial que, segundo [Soare \(1967\)](#), impõe, no topo superior da torre hiperbólica, que os esforços devidos à incidência do vento sejam iguais a zero (topo superior aberto da torre hiperbólica). E,

$$N_{\varphi_0} = \frac{1}{r_0 \operatorname{sen} \varphi} F_2 \quad (16)$$

Ou com a representação de $N_{\varphi_0} = f(z)$:

$$N_{\varphi_0} = - p_w \frac{\sqrt{b^2 \operatorname{sen}^2 A + z^2}}{(b^2 + z^2)} \left\{ \frac{\sqrt{b^2 + z^2} \sqrt{b^2 \operatorname{sen}^2 A + z^2}}{2 \operatorname{tg} A} + \frac{\operatorname{tg} A}{\cos A} C + \right. \\ \left. + \frac{b^2 \cos^2 A}{2 \operatorname{tg} A} \ln \left(\frac{2}{\cos A \operatorname{sen} A} \left(\sqrt{b^2 \operatorname{sen}^2 A + z^2} + \sqrt{b^2 + z^2} \right) \right) \right\} \quad (17)$$

4.2 Estudo para o harmônico "1" ($n=1$)

Para o harmônico 1 ($n = 1$), as equações (13) e (14) tornam-se, respectivamente:

$$\varphi_1 = C \cos \left[1 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{z}{b} \right) \right] = C \cos \left[1 \operatorname{arc} \cos \left(\frac{b}{\sqrt{b^2 + z^2}} \right) \right] = C \frac{b}{\sqrt{b^2 + z^2}} \quad (18)$$

$$\varphi_2 = C 1 \operatorname{sen} \left[1 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{z}{b} \right) \right] \frac{b}{a^2} = C \operatorname{sen} \left[\operatorname{arc} \operatorname{sen} \left(\frac{z}{\sqrt{b^2 + z^2}} \right) \right] \frac{b}{a^2} = C \frac{b z}{a^2 \sqrt{b^2 + z^2}} \quad (19)$$

$$W = C^2 1^2 \frac{\operatorname{tg}^2 A}{(b^2 + z^2)} = C^2 \frac{\operatorname{tg}^2 A}{(b^2 + z^2)} \quad (20)$$

Conforme [Kamke \(1983\)](#), a solução completa para a equação (8) é dada por:

$$F = F_1 = \varphi_2 \int \frac{\varphi_1 h}{W} dz - \varphi_1 \int \frac{\varphi_2 h}{W} dz + C_1 \varphi_1 + C_2 \varphi_2 \Rightarrow \\ \Rightarrow F_1 = \frac{b z}{a^2 \sqrt{b^2 + z^2}} \int \left[4 p_w \left(\frac{a^2}{2} + b^2 \right) b \cot g^4 A \operatorname{sen} A \frac{z}{\sqrt{b^2 \operatorname{sen}^2 A + z^2}} + \right. \\ \left. + 4 p_w b \cot g^4 A \operatorname{cosec} A \frac{z^3}{\sqrt{b^2 \operatorname{sen}^2 A + z^2}} \right] dz + \\ - \frac{b}{\sqrt{b^2 + z^2}} \int \left[4 p_w \left(\frac{a^2}{2} + b^2 \right) \frac{1}{b} \cot g^2 A \operatorname{sen} A \frac{z^2}{\sqrt{b^2 \operatorname{sen}^2 A + z^2}} + \right.$$

$$+ 4 p_w \frac{1}{b} \cot g^2 A \operatorname{cosec} A \frac{z^4}{\sqrt{b^2 \operatorname{sen}^2 A + z^2}} \Big] dz + C_1 \frac{b}{\sqrt{b^2 + z^2}} + C_2 \frac{b z}{a^2 \sqrt{b^2 + z^2}} \quad (21)$$

Onde C_1 e C_2 são constantes determinadas através da condição de contorno inicial que no topo superior aberto da torre hiperbólica os esforços devidos à incidência do vento sejam iguais a zero (Soare, 1967).

$$F_1 = \frac{1}{12 a^2 \sqrt{b^2 + z^2}} \left(p_w z \sqrt{b^2 \operatorname{sen}^2 A + z^2} \left(-6a^4 + 8b^4 + 3a^2 (3b^2 - 4z^2) + \right. \right. \\ \left. \left. + (6a^4 + 15a^2 b^2 + 8b^4) \cos(2A) \right) \cot g^2 A \operatorname{cosec} A + 16 b^2 p_w z^3 \sqrt{b^2 \operatorname{sen}^2 A + z^2} \cot g^4 A \operatorname{cosec} A + \right. \\ \left. + 6 b \left(2 \left(a^2 (-9660,47 p_w) + (-12010,30 p_w) z \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + a^2 b (2 a^2 + b^2) p_w \cos^2 A \ln \left(2 z + 2 \sqrt{b^2 \operatorname{sen}^2 A + z^2} \right) \operatorname{sen} A \right) \right) \quad (22)$$

$$N_{\varphi \theta_1} = - \frac{\operatorname{tg}^2 A}{(b^2 + z^2)} F_1 \quad (23)$$

$$N_{\varphi_1} = \frac{\sqrt{b^2 \operatorname{sen}^2 A + z^2}}{a^2 \cos A} \left[\frac{p_w (b^2 + z^2)}{\operatorname{tg}^2 A} \frac{\sqrt{b^2 \operatorname{sen}^2 A + z^2}}{\operatorname{sen} A \sqrt{b^2 + z^2}} - \frac{d F_1}{dz} \right] \quad (24)$$

4.3 Estudo para o harmônico "2" ($n = 2$)

Para o harmônico 2 ($n = 2$), as equações (13), e (14) tornam-se, respectivamente:

$$\varphi = \varphi_1 = C \cos \left[2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{z}{b} \right) \right] = C \left\{ \cos^2 \left[\operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{z}{b} \right) \right] - \operatorname{sen}^2 \left[\operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{z}{b} \right) \right] \right\} \Rightarrow \\ \Rightarrow \varphi_1 = C \frac{(b^2 - z^2)}{(b^2 + z^2)} \quad (25)$$

$$\varphi_2 = - \frac{d\varphi_1}{dz} \frac{r_0^2 \operatorname{tg}^2 A}{a^2} = C 2 \operatorname{sen} \left[2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{z}{b} \right) \right] \frac{b}{a^2} \Rightarrow \\ \Rightarrow \varphi_2 = C 4 \operatorname{tg}^2 A \frac{z}{(b^2 + z^2)} \quad (26)$$

$$W = C^2 z^2 \frac{\operatorname{tg}^2 A}{(b^2 + z^2)} \Rightarrow W = C^2 4 \frac{\operatorname{tg}^2 A}{(b^2 + z^2)} \quad (27)$$

Conforme Kamke (1983), a solução completa para a equação (8) é dada por:

$$F = F_1 = \varphi_2 \int \frac{\varphi_1 h}{W} dz - \varphi_1 \int \frac{\varphi_2 h}{W} dz + C_1 \varphi_1 + C_2 \varphi_2 \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow F_1 = & 4 \operatorname{tg}^2 A \frac{z}{(b^2 + z^2)} \int \left[p_w \left(\frac{a^2}{2} + b^2 \right) \cot g^4 A \operatorname{sen} A \frac{(b^2 - z^2) z}{\sqrt{b^2 + z^2} \sqrt{b^2 \operatorname{sen}^2 A + z^2}} + \right. \\ & \left. + p_w \cot g^4 A \operatorname{cosec} A \frac{(b^2 - z^2) z^3}{\sqrt{b^2 + z^2} \sqrt{b^2 \operatorname{sen}^2 A + z^2}} \right] dz - \frac{(b^2 - z^2)}{(b^2 + z^2)} \\ \int & \left[4 p_w \left(\frac{a^2}{2} + b^2 \right) \cot g^2 A \operatorname{sen} A \frac{z^2}{\sqrt{b^2 + z^2} \sqrt{b^2 \operatorname{sen}^2 A + z^2}} + 4 p_w \cot g^2 A \operatorname{cosec} A \right. \\ & \left. \frac{z^4}{\sqrt{b^2 + z^2} \sqrt{b^2 \operatorname{sen}^2 A + z^2}} \right] dz + C_1 \frac{(b^2 - z^2)}{(b^2 + z^2)} + C_2 4 \operatorname{tg}^2 A \frac{z}{(b^2 + z^2)} \end{aligned} \quad (28)$$

Na equação (28), a expressão utilizada para a determinação de F_1 para o harmônico 2 ($n = 2$), somente a primeira das duas integrais tem solução analítica; a segunda, por se tratar de uma integral elíptica, só é resolvida numericamente, ou seja, não é possível a solução dessa integral apresentando-se uma expressão analítica como resultado (com os limites de integração definidos, é possível a solução numérica dessa integral).

É bastante conveniente que, a apresentação dos esforços devidos ao vento que incidem sobre a torre de resfriamento hiperbólica seja através de expressões matemáticas analíticas. Com a preparação adequada dessa integral elíptica, torna-se possível sua resolução com a apresentação de uma expressão analítica, através do emprego de desenvolvimento por série.

A solução da primeira integral apresentada na equação (28) é dada por:

$$\begin{aligned} & \int \left[p_w \left(\frac{a^2}{2} + b^2 \right) \cot g^4 A \operatorname{sen} A \frac{(b^2 - z^2) z}{\sqrt{b^2 + z^2} \sqrt{b^2 \operatorname{sen}^2 A + z^2}} + \right. \\ & \left. + p_w \cot g^4 A \operatorname{cosec} A \frac{(b^2 - z^2) z^3}{\sqrt{b^2 + z^2} \sqrt{b^2 \operatorname{sen}^2 A + z^2}} \right] dz = \\ & = -\frac{1}{64} p_w \cot g^4 A \operatorname{cosec} A \left(-4 \sqrt{b^2 + z^2} \sqrt{b^2 \operatorname{sen}^2 A + z^2} (-2a^2 + 13b^2 - 4z^2 + \right. \\ & \left. + (2a^2 + b^2) \cos(2a)) + b^2 (-30a^2 + 29b^2 + 4(8a^2 + 7b^2) \cos(2a) - (2a^2 + b^2) \cos(4a)) \right. \\ & \left. \ln \left(2 \left(\sqrt{b^2 + z^2} + \sqrt{b^2 \operatorname{sen}^2 A + z^2} \right) \right) \right) \end{aligned} \quad (29)$$

A segunda integral na equação (28), que é uma integral elíptica, pode ser reescrita como:

$$\int \left[4 p_w \left(\frac{a^2}{2} + b^2 \right) \cot g^2 A \operatorname{sen} A \frac{z^2}{(b^2 \operatorname{sen}^2 A + z^2)} \frac{\sqrt{b^2 \operatorname{sen}^2 A + z^2}}{\sqrt{b^2 + z^2}} + \right. \\ \left. + 4 p_w \cot g^2 A \operatorname{cosec} A \frac{z^4}{(b^2 \operatorname{sen}^2 A + z^2)} \frac{\sqrt{b^2 \operatorname{sen}^2 A + z^2}}{\sqrt{b^2 + z^2}} \right] dz \quad (30)$$

Fazendo-se:

$$\frac{\sqrt{b^2 \operatorname{sen}^2 A + z^2}}{\sqrt{b^2 + z^2}} = \sqrt{1+y} \Rightarrow 1+y = \frac{b^2 \operatorname{sen}^2 A + z^2}{b^2 + z^2} \Rightarrow y = \frac{b^2 \operatorname{sen}^2 A + z^2}{b^2 + z^2} - 1 \Rightarrow \\ \Rightarrow y = \frac{b^2 \operatorname{sen}^2 A + z^2 - b^2 - z^2}{b^2 + z^2} \Rightarrow y = -\frac{b^2 \cos^2 A}{b^2 + z^2} \quad (31)$$

Sabendo-se que:

$$\sqrt{1+y} = 1 + \frac{1}{2} y - \frac{1}{8} y^2 + \frac{1}{16} y^3 - \frac{5}{128} y^4 + \frac{7}{256} y^5 - \frac{21}{1024} y^6 + \frac{33}{2048} y^7 - \dots \quad (32)$$

Tomando-se os seis primeiros termos da aproximação da série expressa na equação (32), tem-se:

$$\sqrt{1+y} = 1 + \frac{1}{2} y - \frac{1}{8} y^2 + \frac{1}{16} y^3 - \frac{5}{128} y^4 + \frac{7}{256} y^5 = \\ = \frac{1}{256} \left(256 - \frac{1}{(b^2 + z^2)^5} b^2 \cos^2 A \left(128 (b^2 + z^2)^4 + 32 b^2 (b^2 + z^2)^3 \cos^2 A + \right. \right. \\ \left. \left. + 16 b^4 (b^2 + z^2)^2 \cos^4 A + 10 b^6 (b^2 + z^2) \cos^6 A + 7 b^8 \cos^8 A \right) \right) \quad (33)$$

Então:

$$\frac{\sqrt{b^2 \operatorname{sen}^2 A + z^2}}{\sqrt{b^2 + z^2}} = \sqrt{1+y} = \\ = \frac{1}{256} \left(256 - \frac{1}{(b^2 + z^2)^5} b^2 \cos^2 A \left(128 (b^2 + z^2)^4 + 32 b^2 (b^2 + z^2)^3 \cos^2 A + \right. \right. \\ \left. \left. + 16 b^4 (b^2 + z^2)^2 \cos^4 A + 10 b^6 (b^2 + z^2) \cos^6 A + 7 b^8 \cos^8 A \right) \right) \quad (34)$$

Portanto, a segunda integral (integral elíptica) da equação (28), pode novamente ser reescrita, utilizando-se a expansão por série apresentada, juntamente com sua respectiva solução analítica como:

$$\begin{aligned}
& \int \left[4 p_w \left(\frac{a^2}{2} + b^2 \right) \cot g^2 A \operatorname{sen} A \frac{z^2}{(b^2 \operatorname{sen}^2 A + z^2)} \right. \\
& \frac{1}{256} \left(256 - \frac{1}{(b^2 + z^2)^5} b^2 \cos^2 A \left(128 (b^2 + z^2)^4 + 32 b^2 (b^2 + z^2)^3 \cos^2 A + \right. \right. \\
& \left. \left. + 16 b^4 (b^2 + z^2)^2 \cos^4 A + 10 b^6 (b^2 + z^2) \cos^6 A + 7 b^8 \cos^8 A \right) \right) + \\
& \left. + 4 p_w \cot g^2 A \operatorname{cosec} A \frac{z^4}{(b^2 \operatorname{sen}^2 A + z^2)} \right. \\
& \left. \frac{1}{256} \left(256 - \frac{1}{(b^2 + z^2)^5} b^2 \cos^2 A \left(128 (b^2 + z^2)^4 + 32 b^2 (b^2 + z^2)^3 \cos^2 A + \right. \right. \right. \\
& \left. \left. + 16 b^4 (b^2 + z^2)^2 \cos^4 A + 10 b^6 (b^2 + z^2) \cos^6 A + 7 b^8 \cos^8 A \right) \right) \left. \right] dz = \\
& = \frac{1}{64} p_w \cot g A \left(\frac{7 b^8 z \cos^7 A \left(-a^2 + 2 b^2 + (a^2 + 2 b^2) \cos(2A) \right) \cot g^2 A}{32 (b^2 + z^2)^4} + \right. \\
& + \frac{b^6 z \cos^5 A \cot g^2 A}{768 (b^2 + z^2)^3} \left(-537 a^2 + 598 b^2 + 8 (68 a^2 + 73 b^2) \cos(2A) + \right. \\
& \left. \left. - 7 (a^2 + 2 b^2) \cos(4A) \right) + \right. \\
& + \frac{b^4 z \cos^3 A \cot g^2 A}{12288 (b^2 + z^2)^2} \left(-24730 a^2 + 21956 b^2 + (25379 a^2 + 20966 b^2) \cos(2A) + \right. \\
& \left. - 2 (307 a^2 + 530 b^2) \cos(4A) - 35 (a^2 + 2 b^2) \cos(6A) \right) + \\
& + \frac{b^2 z \cos A \cot g^2 A}{32768 (b^2 + z^2)} \left(4 (66731 a^2 + 53964 b^2) \cos(2A) + \right. \\
& - 4 (2419 a^2 + 3498 b^2) \cos(4A) - 12 (57 a^2 + 100 b^2) \cos(6A) + \\
& \left. - 7 (36647 a^2 - 32674 b^2 + 5 (a^2 + 2 b^2) \cos(8A)) \right) \left. \right) + \\
& + \frac{256}{3} z^3 \cot g A \operatorname{cosec} A + \frac{b \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{z}{b} \right) \cot g A \operatorname{cosec} A}{131072} \left(-6037878 a^2 + \right. \\
& \left. + 7489036 b^2 + (6335338 a^2 + 7166612 b^2) \cos(2A) + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - 8 \left(35699 a^2 + 42202 b^2 \right) \cos(4A) - \left(11079 a^2 + 16462 b^2 \right) \cos(6A) + \\
& - 2 \left(377 a^2 + 670 b^2 \right) \cos(8A) - 35 \left(a^2 + 2 b^2 \right) \cos(10A) \Big) + \\
& + 128 z \left(\left(a^2 + b^2 \right) \cos A - b^2 \cot g A \operatorname{cosec} A \right) + \\
& - \frac{63}{2} a^2 b \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{z \operatorname{cosec} A}{b} \right) \cos A \operatorname{sen} A \Big) \quad (35)
\end{aligned}$$

Então, a expressão analítica de F_1 , obtida com a resolução da equação (28), é dada por:

$$\begin{aligned}
F_1 = & 4 \operatorname{tg}^2 A \frac{z}{(b^2 + z^2)} \left[\right. \\
& - \frac{1}{64} p_w \cot g^4 A \operatorname{cosec} A \left(-4 \sqrt{b^2 + z^2} \sqrt{b^2 \operatorname{sen}^2 A + z^2} (-2a^2 + 13b^2 - 4z^2 + \right. \\
& \left. + (2a^2 + b^2) \cos(2a)) + b^2 (-30a^2 + 29b^2 + 4(8a^2 + 7b^2) \cos(2a) - (2a^2 + b^2) \cos(4a)) \right. \\
& \left. \ln \left(2 \left(\sqrt{b^2 + z^2} + \sqrt{b^2 \operatorname{sen}^2 A + z^2} \right) \right) \right) \Big] + - \frac{(b^2 - z^2)}{(b^2 + z^2)} \left[\right. \\
& \frac{1}{64} p_w \cot g A \left(\frac{7 b^8 z \cos^7 A \left(-a^2 + 2 b^2 + (a^2 + 2 b^2) \cos(2A) \right) \cot g^2 A}{32 (b^2 + z^2)^4} + \right. \\
& + \frac{b^6 z \cos^5 A \cot g^2 A}{768 (b^2 + z^2)^3} \left(-537 a^2 + 598 b^2 + 8 (68 a^2 + 73 b^2) \cos(2A) + \right. \\
& \left. \left. - 7 (a^2 + 2 b^2) \cos(4A) \right) + \right. \\
& + \frac{b^4 z \cos^3 A \cot g^2 A}{12288 (b^2 + z^2)^2} \left(-24730 a^2 + 21956 b^2 + (25379 a^2 + 20966 b^2) \cos(2A) + \right. \\
& - 2 (307 a^2 + 530 b^2) \cos(4A) - 35 (a^2 + 2 b^2) \cos(6A) \Big) + \\
& + \frac{b^2 z \cos A \cot g^2 A}{32768 (b^2 + z^2)} \left(4 (66731 a^2 + 53964 b^2) \cos(2A) + \right. \\
& - 4 (2419 a^2 + 3498 b^2) \cos(4A) - 12 (57 a^2 + 100 b^2) \cos(6A) + \\
& \left. \left. - 7 (36647 a^2 - 32674 b^2 + 5 (a^2 + 2 b^2) \cos(8A)) \right) \right) \Big] +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{256}{3} z^3 \cot g A \operatorname{cosec} A + \frac{b \operatorname{arctg} \left(\frac{z}{b} \right) \cot g A \operatorname{cosec} A}{131072} \left(-6037878 a^2 + \right. \\
& \quad + 7489036 b^2 + (6335338 a^2 + 7166612 b^2) \cos(2A) + \\
& \quad - 8 (35699 a^2 + 42202 b^2) \cos(4A) - (11079 a^2 + 16462 b^2) \cos(6A) + \\
& \quad - 2 (377 a^2 + 670 b^2) \cos(8A) - 35 (a^2 + 2 b^2) \cos(10A) \left. \right) + \\
& \quad + 128 z \left((a^2 + b^2) \cos A - b^2 \cot g A \operatorname{cosec} A \right) + \\
& \quad - \frac{63}{2} a^2 b \operatorname{arctg} \left(\frac{z \operatorname{cosec} A}{b} \right) \cos A \operatorname{sen} A \left. \right] + \\
& \quad + C_1 \frac{(b^2 - z^2)}{(b^2 + z^2)} + C_2 4 \operatorname{tg}^2 A \frac{z}{(b^2 + z^2)}
\end{aligned} \tag{36}$$

Onde C_1 e C_2 são constantes determinadas através da condição de contorno inicial de que no topo superior aberto da torre hiperbólica os esforços devidos à incidência do vento sejam iguais a zero [Soare \(1967\)](#).

$$N_{\varphi 2} = - \frac{2 \operatorname{tg}^2 A}{(b^2 + z^2)} F_1 \tag{37}$$

$$N_{\varphi 2} = \frac{\sqrt{b^2 \operatorname{sen}^2 A + z^2}}{a^2 \cos A} \left[\frac{p_w (b^2 + z^2)}{\operatorname{tg}^2 A} \frac{\sqrt{b^2 \operatorname{sen}^2 A + z^2}}{\operatorname{sen} A \sqrt{b^2 + z^2}} - \frac{d F_1}{dz} \right] \tag{38}$$

5 EXEMPLO DE APLICAÇÃO

Como exemplo de análise estrutural, é apresentado o estado de tensão em uma torre de resfriamento tendo a forma de um hiperbolóide de revolução, submetida à ação de carregamento assimétrico de vento, conforme mostrado na [Figura 2](#). É admitido o estado de membrana para a estrutura da torre, e são considerados os harmônicos 0, 1, e 2, conforme recomendação de [Soare \(1967\)](#).

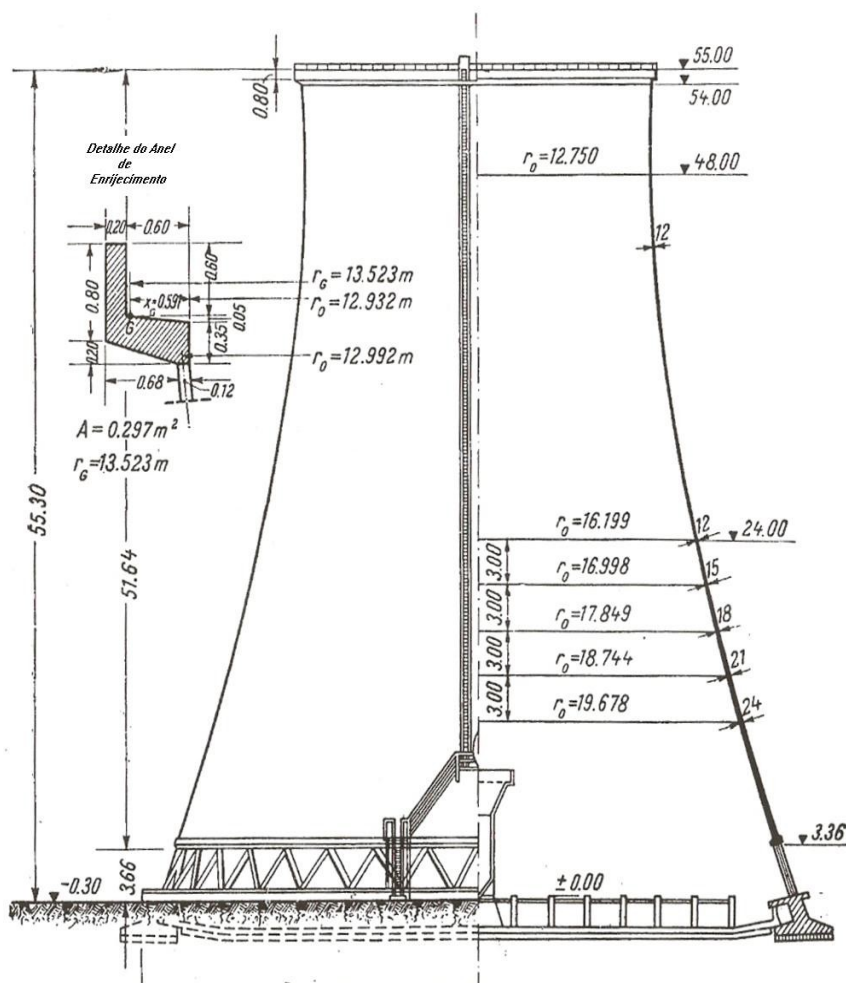


Figura 2: Torre de resfriamento hiperbólica (Fonte: Soare, 1967, p. 100)

O raio do menor círculo paralelo situado a altura da coordenada $z = 0$ do hiperbolóide (semi-eixo real do meridiano da hipérbole) é $a = 12,750 \text{ m}$;

O raio do círculo do paralelo inferior é $r_{o,i} = 22,320 \text{ m}$ ($z = +44 \text{ m}$); e

A altura total da torre hiperbólica $h = 50 \text{ m}$, dos quais $h_u = 6 \text{ m}$ acima do menor círculo do paralelo, e $h_l = 44 \text{ m}$ abaixo.

Na parte superior da torre existe um anel de enrijecimento, cujas dimensões estão detalhadas na Figura 2.

Para o trecho da hipérbole inferior ao menor círculo do paralelo, os valores de z são positivos, para o trecho superior os valores de z são negativos.

A seguir são apresentados os resultados obtidos, e as respectivas comparações, para os três harmônicos ($n=0$, $n=1$ e $n=2$), correspondentes à análise das tensões provocadas pela ação assimétrica do vento na torre de resfriamento em forma de hiperbolóide de revolução.

5.1 Esforços solicitantes obtidos para o harmônico "0" ($n = 0$)

Para o harmônico 0 ($n = 0$), correspondente ao estado simétrico de solicitação, as equações (7) podem ser resolvidas por integração direta, obtendo-se resultados exatos. Também foi obtida uma solução aproximada por meio do Método de Runge-Kutta de quarta ordem através do desenvolvimento de programação computacional (que apresentou resultados idênticos aos obtidos pelo Método de Runge-Kutta do software Mathematica). Os resultados obtidos pelos diferentes métodos e a comparação realizada são mostrados na Tabela 1 e no gráfico da Figura 3.

Altura da Torre Coordenada z [m]	$\frac{N_{\varphi_{OBTIDO}}}{p_w}$		% Diferença
	Exato Analítico	Runge-Kutta	
- 6	0	0	0
- 3	0,182464	0,182464	0
0	0,244347	0,244347	0
3	0,182464	0,182464	0
6	0	0	0
9	- 0,294041	- 0,294042	0,00034009
12	- 0,68632	- 0,686321	0,0001457
15	- 1,16112	- 1,16112	0
18	- 1,70225	- 1,70225	0
21	- 2,29455	- 2,29455	0
24	- 2,92482	- 2,92482	0
27	- 3,58213	- 3,58213	0
30	- 4,25787	- 4,25787	0
33	- 4,94546	- 4,94545	0,00020221
36	- 5,64002	- 5,64001	0,0001773
39	- 6,33803	- 6,33802	0,00015778
42	- 7,03702	- 7,03701	0,00014211
44	- 7,50269	- 7,50267	0,00026657

Tabela 1: Variação de N_{φ_0} ao longo da altura da torre para o harmônico 0 ($n = 0$)

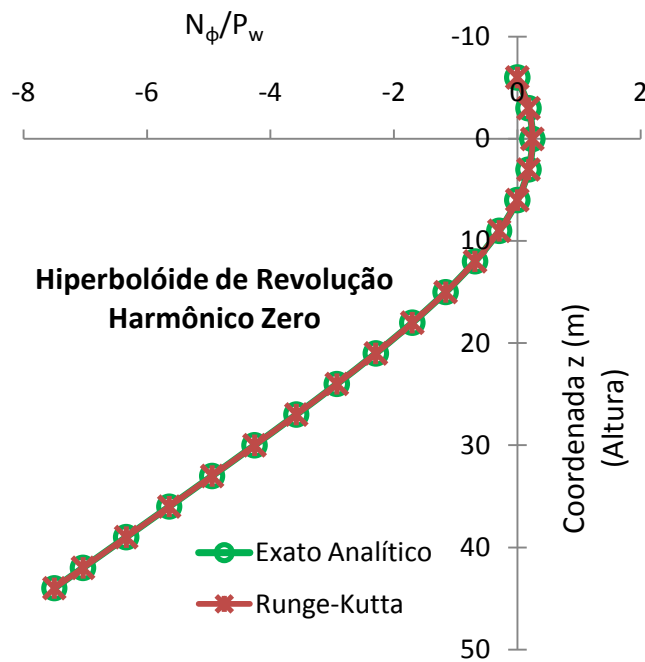


Figura 3: Variação de N_{φ_0} ao longo da altura da torre para o harmônico 0 ($n = 0$)

5.2 Esforços solicitantes obtidos para o harmônico "1" ($n = 1$)

Para o harmônico 1 ($n = 1$), os resultados obtidos também são exatos. E, de forma idêntica ao harmônico 0, realizaram-se comparações com os resultados obtidos através da programação do Método de Runge-Kutta de quarta ordem (que apresentou resultados idênticos aos obtidos pelo Método de Runge-Kutta do software Mathematica) e com os resultados pelo Método das Diferenças Finitas disponíveis em Soare (1967), conforme exposto na Tabela 2 e no gráfico da Figura 4, e na Tabela 3 e no gráfico da Figura 5.

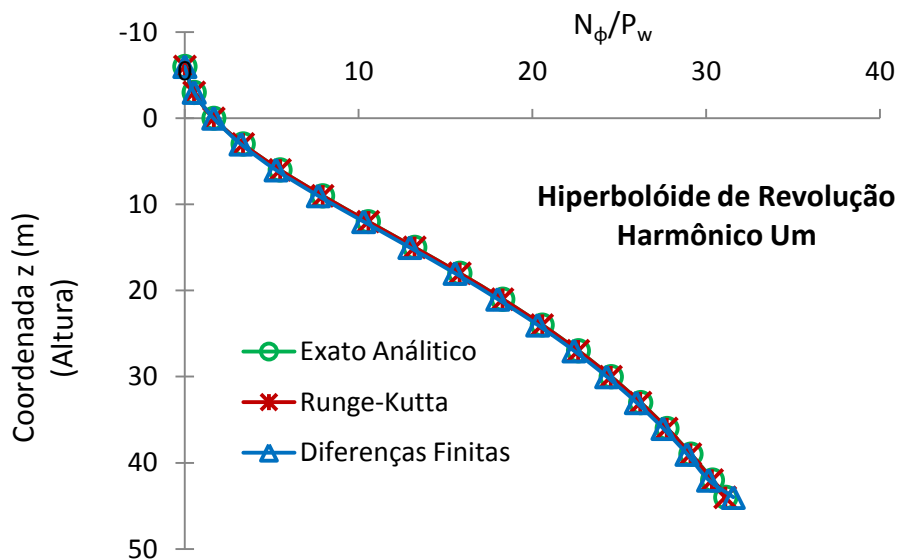
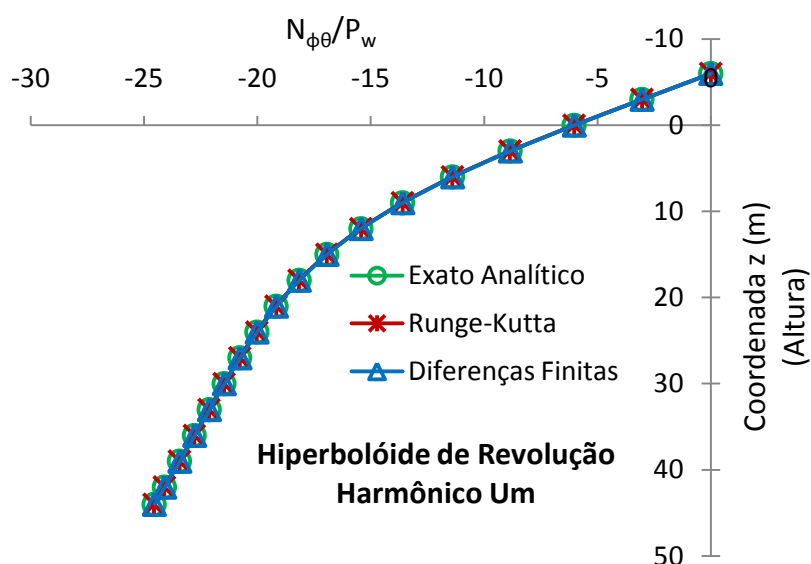


Figura 4: Variação de N_{φ_1} ao longo da altura da torre para o harmônico 1 ($n = 1$)

Altura da Torre z [m]	$\frac{N_{\varphi \text{ OBTIDO}}}{P_w}$			% Diferença (Exato Analítico e Runge-Kutta)	% Diferença (Exato Analítico e Diferenças Finitas)
	Exato Analítico	Runge-Kutta	Diferenças Finitas		
- 6	0	0	0	0	0
- 3	0,537138	0,53755	0,5385	0,076644030	0,252924790
0	1,66904	1,66961	1,6620	0,034139710	0,422395970
3	3,35085	3,35133	3,2314	0,014322670	3,564767150
6	5,48437	5,4845	5,2501	0,002370320	4,271593640
9	7,9360	7,93553	7,6833	0,005922380	3,184223790
12	10,5612	10,5598	10,2948	0,013256070	2,522440630
15	13,2271	13,2245	12,9519	0,019656610	2,080577000
18	15,8278	15,8237	15,5549	0,025903790	1,724181500
21	18,2897	18,2837	18,0127	0,032805350	1,514513630
24	20,5703	20,5619	20,3105	0,040835570	1,262985960
27	22,6516	22,6404	22,3984	0,049444630	1,117801830
30	24,5338	24,5193	24,2805	0,059102140	1,032453190
33	26,2281	26,2098	25,9872	0,069772500	0,918480560
36	27,7520	27,7292	27,5197	0,082156240	0,837056790
39	29,1254	29,0974	28,9017	0,096136020	0,768058120
42	30,3685	30,3346	30,1419	0,111628830	0,746167900
44	31,1343	31,0961	31,5632	0,122694260	1,358860950

Tabela 2: Variação de N_{φ_1} ao longo da altura da torre para o harmônico 1 ($n = 1$)Figura 5: Variação de $N_{\varphi \theta_1}$ ao longo da altura da torre para o harmônico 1 ($n = 1$)

Altura da Torre z [m]	$\frac{N_{\varphi \theta \text{ OBTIDO}}}{\rho_w}$			% Diferença (Exato Analítico e Runge-Kutta)	% Diferença (Exato Analítico e Diferenças Finitas)
	Exato Analítico	Runge-Kutta	Diferenças Finitas		
- 6	0	0	0	0	0
- 3	-3,03504	-3,03503	- 3,0287	0,000329480	0,208893460
0	-6,03164	-6,03161	- 6,0189	0,000497380	0,211219500
3	-8,85663	-8,85658	- 8,8374	0,000564550	0,217125480
6	-11,4005	-11,4004	- 11,3824	0,000877150	0,158764970
9	-13,5982	-13,5982	- 13,5806	0	0,129428900
12	-15,4353	-15,4353	- 15,4177	0	0,114024350
15	-16,9395	-16,9395	- 16,9213	0	0,107441190
18	-18,1645	-18,1646	- 18,1456	0,000550520	0,104049110
21	-19,1738	-19,174	- 19,1541	0,001043080	0,102744370
24	-20,0285	-20,0289	- 20,0081	0,001997110	0,101854860
27	-20,7809	-20,7814	- 20,7599	0,002406000	0,101054330
30	-21,4720	-21,4727	- 21,4506	0,003259950	0,099664680
33	-22,1322	-22,1329	- 22,1105	0,003162710	0,098047190
36	-22,7825	-22,7835	- 22,7607	0,004389140	0,095687480
39	-23,4373	-23,4383	- 23,4154	0,004266520	0,093440800
42	-24,1053	-24,1066	- 24,0835	0,005392710	0,090436540
44	-24,5608	-24,5622	- 24,5401	0,005699820	0,084280640

Tabela 3: Variação de $N_{\varphi \theta_1}$ ao longo da altura da torre para o harmônico 1 ($n=1$)

5.3 Esforços solicitantes obtidos para o harmônico "2" ($n=2$)

Para o harmônico 2 ($n=2$), os resultados são obtidos por meio de uma aproximação por série que possibilitou a constituição de uma solução analítica para o harmônico 2. E, da mesma forma que se procedeu para os harmônicos 0 e 1, realizaram-se comparações com os resultados obtidos através da programação do Método de Runge-Kutta de quarta ordem (que apresentou resultados idênticos aos obtidos pelo Método de Runge-Kutta do software Mathematica) e com os resultados disponíveis em Soare (1967) obtidos pelo Método das Diferenças Finitas, conforme exposto na Tabela 4 e no gráfico da Figura 6, e na Tabela 5 e no gráfico da Figura 7.

Para a programação do Método de Runge-Kutta de quarta ordem foram necessárias algumas preparações envolvendo os esforços que governam o comportamento da torre hiperbólica solicitada pelo vento, admitindo-se o estado de membrana para a estrutura, como exposto a seguir:

$$F_1 = - N_{\varphi \theta 2} \frac{(b^2 + z^2)}{2 \operatorname{tg}^2 A}$$

$$F_2 = N_{\varphi 2} \frac{(b^2 + z^2) \cos A}{\sqrt{b^2 \operatorname{sen}^2 A + z^2}} \quad (39)$$

$$\begin{aligned} \frac{d N_{\varphi \theta}}{d z} = & - N_{\varphi \theta} \frac{2 z}{(b^2 + z^2)} + \frac{2 b^2 \cos A}{(b^2 + z^2) \sqrt{b^2 \operatorname{sen}^2 A + z^2}} N_{\varphi} + \\ & - p_w \frac{2}{\operatorname{sen} A} \frac{\sqrt{b^2 \operatorname{sen}^2 A + z^2}}{\sqrt{b^2 + z^2}} \end{aligned} \quad (40)$$

$$\begin{aligned} \frac{d N_{\varphi}}{d z} = & - N_{\varphi} \frac{z \left[b^2 (\operatorname{sen}^2 A - \cos^2 A) + z^2 \right]}{(b^2 + z^2) (b^2 \operatorname{sen}^2 A + z^2)} - \frac{2}{\cos A} \frac{\sqrt{b^2 \operatorname{sen}^2 A + z^2}}{(b^2 + z^2)} N_{\varphi \theta} + \\ & - p_w \frac{z}{\operatorname{tg} A \sqrt{b^2 + z^2}} \end{aligned} \quad (41)$$

Com

$$\begin{cases} b = 30,622 \text{ m} \\ \cos A = 0,3843 \\ \operatorname{sen} A = 0,923 \\ \operatorname{tg} A = 2,40176 \\ p_w = \text{constante} \\ N_{\varphi \theta 2}(-6) = 0 \\ N_{\varphi 2}(-6) = 0 \end{cases} \quad (42)$$

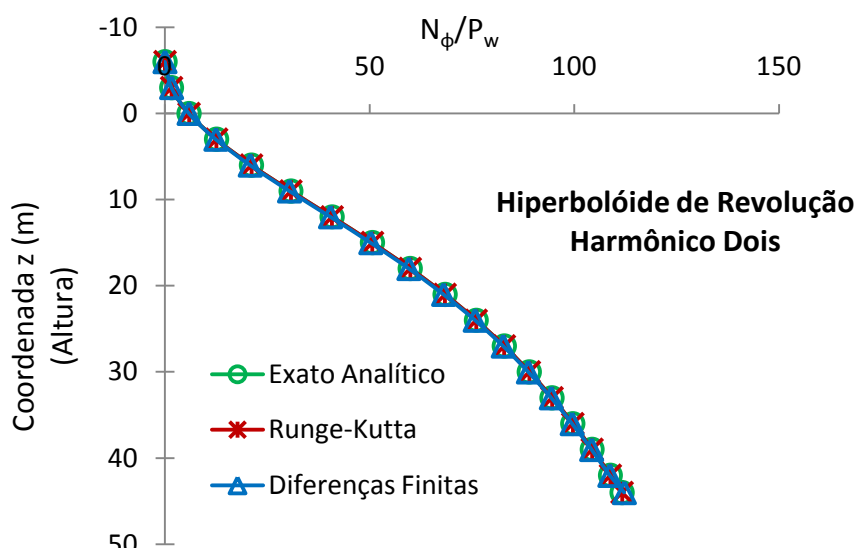


Figura 6: Variação de N_{φ_2} ao longo da altura da torre para o harmônico 2 ($n = 2$)

Altura da Torre z [m]	$\frac{N_{\varphi \text{ OBTIDO}}}{\rho_w}$			% Diferença (Expansão em Série e Runge-Kutta)	% Diferença (Expansão em Série e Diferenças Finitas)
	Expansão em Série	Runge-Kutta	Diferenças Finitas		
- 6	0	0	0	0	0
- 3	1,59949	1,59952	1,6136	0,001875560	0,874442240
0	5,89134	5,8915	5,8832	0,002715780	0,138168910
3	12,5870	12,5874	12,4371	0,003177780	1,190911260
6	21,1174	21,1180	20,8210	0,002841180	1,403581880
9	30,7618	30,7626	30,4093	0,002600560	1,145901740
12	40,8042	40,8052	40,4227	0,002450670	0,934952770
15	50,6584	50,6596	50,2697	0,002368750	0,767296240
18	59,9285	59,9300	59,5742	0,002502920	0,591204520
21	68,4081	68,4098	68,0559	0,002485020	0,514851310
24	76,0419	76,0438	75,7672	0,002498560	0,361248210
27	82,8744	82,8764	82,6246	0,002413230	0,301419980
30	89,0045	89,0066	88,7561	0,002359380	0,279087010
33	94,5520	94,5542	94,3617	0,002326710	0,201264910
36	99,6362	99,6385	99,4639	0,002308340	0,172929120
39	104,3650	104,3670	104,2145	0,001916310	0,144205430
42	108,8290	108,8320	108,6537	0,002756540	0,161078390
44	111,6960	111,6990	112,2108	0,002685790	0,458779370

Tabela 4: Variação de N_{φ_2} ao longo da altura da torre para o harmônico 2 ($n = 2$)

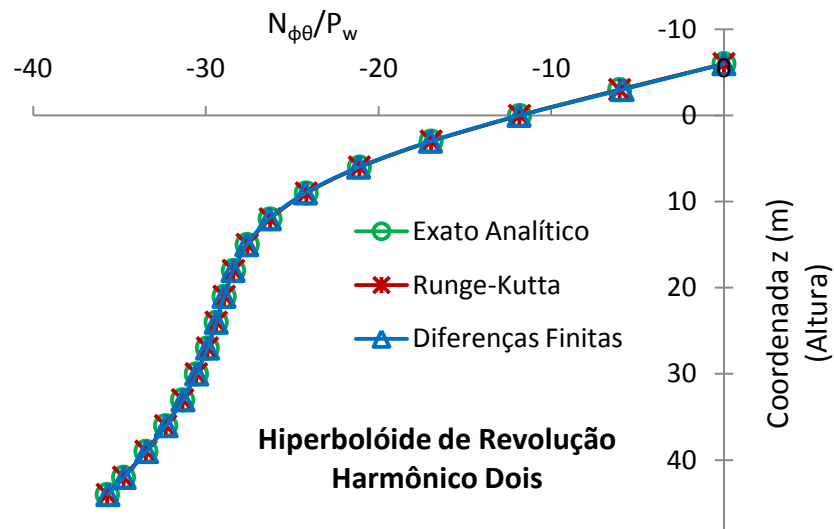


Figura 7: Variação de $N_{\phi\theta}$ ao longo da altura da torre para o harmônico 2 ($n = 2$)

Altura da Torre z [m]	$\frac{N_{\phi\theta\text{OBTIDO}}}{P_w}$			% Diferença (Expansão em Série e Runge-Kutta)	% Diferença (Expansão em Série e Diferenças Finitas)
	Expansão em Série	Runge-Kutta	Diferenças Finitas		
- 6	0	0	0	0	0
- 3	- 6,04177	-6,04177	- 5,8895	0	2,520287930
0	- 11,8332	-11,8332	- 11,8634	0	0,254564460
3	- 16,9539	- 16,9538	- 16,9926	0,000589830	0,227746200
6	- 21,1060	- 21,1060	- 21,1587	0	0,249070120
9	- 24,1852	- 24,1851	- 24,2408	0,000413480	0,229365370
12	- 26,2774	- 26,2772	- 26,3269	0,000761110	0,188020620
15	- 27,5965	- 27,5962	- 27,6345	0,001087090	0,137509270
18	- 28,4035	- 28,4032	- 28,4278	0,001056210	0,085479710
21	- 28,9415	- 28,9412	- 28,9523	0,001036570	0,037302740
24	- 29,4009	- 29,4005	- 29,3998	0,001360500	0,003741380

27	- 29,9113	- 29,9109	- 29,9004	0,001337290	0,036441080
30	- 30,5491	- 30,5487	- 30,5305	0,001309370	0,060885590
33	- 31,3508	- 31,3504	- 31,3262	0,001275880	0,078466900
36	- 32,3261	- 32,3257	- 32,2972	0,001237390	0,089401440
39	- 33,4691	- 33,4687	- 33,4369	0,001195130	0,096208140
42	- 34,7653	- 34,7649	- 34,7307	0,001150570	0,099524530
44	- 35,7059	- 35,7055	- 35,6724	0,001120260	0,093822030

Tabela 5: Variação de $N_{\vartheta 2}$ ao longo da altura da torre para o harmônico 2 ($n = 2$)

5.4 Esforços solicitantes finais

De acordo com Soare (1967), o valor de N_{θ} para os três harmônicos estudados, pode ser obtido como:

$$N_{\theta n} = -Z_n r_2 - N_{\varphi n} \frac{r_2}{r_1} \Rightarrow N_{\theta n} = -p_w \operatorname{sen} \varphi r_2 - N_{\varphi n} \frac{r_2}{r_1} \quad (43)$$

E ainda, os esforços totais que incidem sobre a torre hiperbólica submetida à ação do vento, admitindo-se para a estrutura o estado de membrana, são obtidos somando-se os resultados para os três harmônicos ($n=0$, $n=1$, e $n=2$):

$$\begin{cases} N_{\varphi \text{ TOTAL}} = N_{\varphi 0} + N_{\varphi 1} + N_{\varphi 2} \\ N_{\varphi \theta \text{ TOTAL}} = N_{\varphi \theta 0} + N_{\varphi \theta 1} + N_{\varphi \theta 2} \\ N_{\theta \text{ TOTAL}} = N_{\theta 0} + N_{\theta 1} + N_{\theta 2} \end{cases} \quad (44)$$

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O estudo analítico envolvendo a análise dos esforços numa torre hiperbólica submetida à ação do vento demonstrou-se bastante preciso quando comparado com os resultados obtidos pelos métodos de Runge-Kutta de quarta ordem (que são idênticos aos do software Mathematica) e das Diferenças Finitas.

É importante ressaltar que para os harmônicos 0 e 1, os resultados são exatos, pois são obtidos a partir de integração direta. Para o harmônico 2, utilizou-se uma aproximação por série que, apesar de se constituir em um método numérico aproximado, forneceu totais subsídios para a obtenção de uma expressão analítica completa para os esforços que governam a torre de resfriamento hiperbólica, admitindo-se estado de membrana para a estrutura, solicitada pela ação assimétrica do vento.

A formulação utilizada (Soare, 1967), apesar de ter sido publicada há mais de quarenta anos, apresenta-se em condições bem atuais, pois permite que a pressão do vento seja considerada totalmente em função dos critérios e parâmetros estabelecidos pelo projetista estrutural; podendo-se, por exemplo, levar em conta o "efeito de grupo" para a estrutura, além dos mais recentes procedimentos oriundos dos últimos estudos envolvendo carregamentos assimétricos.

REFERÊNCIAS

- Armit, J. Wind loading on cooling towers. *Journal of the Structural Division, Proceedings of the American Society of Civil Engineers*, v. 106, n.ST3, p. 623-641, Mar. 1980.
- Basu, P. K. and Gould, P. L. Cooling towers using measured wind data. *Journal of the structural division, Proceedings of the American Society of Civil Engineers*, v. 106, n. ST3, p. 579-621, Mar. 1980.
- Byun, C. and Kapania, R. K. Nonlinear transient response of imperfect hyperbolic shells using a reduction method. *Computers & Structures*, v. 44, n. 1 / 2, p. 255-262, 1992.
- Godbole, P. N., Viladkar, M. N., Tankha, A. *Journal of Engineering Mechanics*, v. 124, n. 11, p. 1269-1279, Nov. 1998.
- Kamke, E. *Differentialgleichungen: lösungsmethoden und lösungen*. v. I, B. G. Teubner. 1983a.
- Kamke, E. *Differentialgleichungen: lösungsmethoden und lösungen*. v. II, B. G. Teubner. 1983b.
- Kapania, R. K. and Yang, T. Y. Time domain random wind response of cooling tower. *Journal of Engineering Mechanics*, v. 110, n. 10, p. 1524-1543, Oct. 1984.
- Kreyszig, E. *Advanced engineering mathematics*. 17. ed. Singapore: John Wiley & Sons, INC. 1993.
- Krishna, P., Godbole, P. N., Viladkar, M. N. Analysis of hyperbolic cooling towers for wind loads with ACMC and semi-loof shell elements. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, v. 46-47, p. 477-486, 1993.
- Krivoshapko, S. N. Static, vibration, and buckling analyses and applications to one-sheet hyperboloidal shells of revolution. *Applied Mechanics Reviews*, v. 55, n. 3, May 2002.
- Mahmoud, B. E. H. and Gupta, A. K. Inelastic large displacement behavior and buckling of cooling tower. *Journal of Structural Engineering*, v. 121, n. 6, p. 981-985, Jun. 1995.
- Nasir, A. M., Thambiratnam, D. P., Butler, D., Austin, P. Dynamics of axisymmetric hyperbolic shell structures. *Thin-Walled structures*, v. 40, p. 665-690, 2002.
- Niemann, H. J. Wind effects on cooling tower shells. *Journal of the structural division, Proceedings of the American Society of Civil Engineers*, v.106, n. ST3, p. 643-661, Mar. 1980.

- Reed, D. A. and Scanlan, R. H. Time series analysis of cooling tower wind loading. *Journal of Structural Engineering*, v. 109, n. 2, p. 538-554, Feb. 1983.
- Singh, M. P. and Gupta, A. K. Gust factors for hyperbolic cooling towers. *Journal of the structural division, Proceedings of the American Society of Civil Engineers*, v. 102, n. ST2, p. 371-387, Feb. 1976.
- Soare, M. *Application of finite difference equations to shell analysis*. Ed. Academiei Republicii Socialiste România, Bucharest. 1967.