

## **MODOS DE VIBRACIONES LIBRES DE PLACAS ORTÓTROPAS RECTANGULARES CON HUECOS Y BORDES EMPOTRADOS, SIMPLEMENTE APOYADOS O LIBRES**

**Daniel H. Felix<sup>\*</sup>, Diana V. Bambill<sup>\*,#</sup>, Carlos A. Rossit<sup>\*,#</sup> y Patricio A.A. Laura<sup>\*</sup>**

<sup>\*</sup>Departamento de Ingeniería, Instituto de Mecánica Aplicada (IMA),  
Universidad Nacional del Sur, Av. Alem 1253,  
B8000CPB, Bahía Blanca  
e-mail: dbambill@criba.edu.ar)

<sup>#</sup>Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas  
(CONICET)

**Palabras clave:** Ortotropía, vibraciones formas modales, placas orificios.

### **Resumen.**

*El conocimiento de los modos de vibración reviste singular importancia tanto en tareas de investigación como de aplicación, pudiendo citarse como ejemplo, el análisis de vibraciones forzadas y las técnicas de control pasivo y activo de vibraciones. El objetivo de este trabajo es examinar el efecto que la presencia de HUECOS RECTANGULARES en placas ortótropas rectangulares vibrantes causa en las formas modales.*

*En este estudio se presenta el análisis de los primeros seis modos de vibración natural correspondientes a dos modelos de placas con condiciones de borde mixtas: empotrado – simplemente apoyado y empotrado – libre. En el desarrollo modal la amplitud de deflexión de la placa se aproxima con sumatorias de funciones viga, utilizando en su expresión los valores de frecuencias naturales determinadas mediante el método variacional de Rayleigh – Ritz.*

## 1. INTRODUCCIÓN

En los últimos años la utilización de materiales ortótropos y anisótropos (por ejemplo resinas epoxídicas) en la construcción y reparación de estructuras ha adquirido una enorme importancia en el campo de la ingeniería mecánica, naval y aeronáutica entre otras.

En muchas estructuras resulta conveniente dotar a los elementos estructurales de condiciones de ortotropía adecuadas, orientación de las fibras en los materiales compuestos, efectos de laminado en metales, ubicación de hierro en el hormigón, o utilizar ventajosamente tales condiciones presentes en algunos materiales como maderas, vidrios, cristales.

La presencia de aberturas y orificios en las estructuras se presenta con asiduidad en la práctica de la ingeniería. Los orificios se hacen con diversos propósitos: para alivianar la estructura, para el pasaje de conductos y cables, para permitir el acceso a otras partes de la estructura o para modificar la respuesta dinámica.

En el estudio de elementos estructurales con aberturas se ha encontrado que la presencia de orificios produce un efecto significativo en algunas frecuencias naturales, aunque la forma modal correspondiente puede no ser sensiblemente afectada y viceversa

En la literatura se ha estudiado en profundidad la influencia de orificios en la vibración de placas rectangulares isótropas<sup>1, 2, 3, 4</sup>, pero no así con placas ortótropas con condiciones de borde diversas<sup>5</sup>.

En este trabajo se presenta un análisis de las vibraciones libres de placas rectangulares con orificios rectangulares.

Las condiciones de vinculación de borde de los modelos de placa analizado son: empotradas, simplemente apoyadas o con algún borde libre.

En los casos presentados se consideraron dos tipos de condiciones de borde externo.

- a) Empotrado–Simplemente Apoyado–Simplemente Apoyado–Empotrado (E-SA-SA-E).
- b) Empotrado–Simplemente Apoyado–Simplemente Apoyado–Libre (E-SA-SA-L).

## 2. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

En este análisis de vibración de placas rectangulares ortótropas con orificios rectangulares se utiliza el Método de Rayleigh -Ritz.

La amplitud de desplazamiento de la placa vibrante  $W(x,y)$  se aproxima mediante un conjunto de funciones viga que verifican las condiciones esenciales de borde en el contorno exterior de la placa:

$$W(x, y) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N A_{mn} X_m(x) Y_n(y) \quad (1)$$

donde  $X_m(x)$  e  $Y_n(y)$  son las funciones de las formas modales de las vigas que tienen en cada dirección  $x$  ó  $y$  las mismas condiciones de borde que la placa.

Las frecuencias fundamentales correspondientes a los modos normales de vibración transversal se determinan minimizando la funcional de energía del modelo de placa analizado:

$$\mathbf{J}(W(x, y)) = U_{\max}(W(x, y)) - T_{\max}(W(x, y)) \quad (2)$$

donde  $U_{\max}(W)$  es la máxima energía de deformación y  $T_{\max}(W)$  la máxima energía cinética durante la vibración

Siguiendo la notación de Lekhnitskii para materiales ortótropos, se tiene para la máxima energía acumulada durante la deformación:

$$U_{\max}(W_{(x,y)}) = \frac{1}{2} \int_{A_p} (D_1 W_{xx}^2 + 2D_1 \nu_2 W_{xx} W_{yy} + 2D_k W_{yy}^2 + 4D_k W_{xy}^2) dx dy \quad (3)$$

$A_p$ : es el dominio de integración que corresponde a la superficie de la placa descontado el orificio.

Los  $D_1$  y  $D_2$  son las constantes de rigidez flexional de la placa.

$$D_1 = \frac{E_1 h^3}{12(1 - \nu_1 \nu_2)} \quad (4)$$

$$D_2 = \frac{E_2 h^3}{12(1 - \nu_1 \nu_2)} \quad (5)$$

en tanto que:

$$D_k = \frac{G_{12} h^3}{12} \quad (6)$$

es la rigidez torsional, en las direcciones elásticas principales.

$E_1, E_2$  son los módulos de Young

$\nu_1, \nu_2$ , son los coeficientes de Poisson

$G_{12}$ , es el módulo de elasticidad transversal

$h$  es el espesor de la placa.

Por otra parte la máxima energía cinética de la placa vibrante es:

$$T_{\max}(W_{(x,y)}) = \frac{1}{2} \rho h \omega^2 \int_{A_p} W(x, y)^2 dx dy \quad (7)$$

donde  $\rho$  es la masa por unidad de volumen del material de la placa y  $\omega$  es la frecuencia natural circular de vibración transversal del sistema.

Siguiendo el método de Rayleigh – Ritz, se minimiza la funcional (2) con respecto a los coeficientes  $A_{mm}$  de la aproximación (1)

Para cada modelo de placa en estudio se adoptan las funciones viga que se correspondan con las condiciones de vínculo de la placa en los bordes exteriores opuestos<sup>6</sup>.

En los casos que se analizan, se utilizan las funciones viga según corresponda al modelo vibrante.

$$F(s): \text{función viga} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} X_m(x) &= F(s) \\ Y_n(y) &= F(s) \end{aligned} \quad (9a, b)$$

para  $s = x$  ó  $s = y$  según corresponda

Caso de bordes opuestos simplemente apoyados (SA-SA):

$$F(s) = \text{sen}(ks)$$

donde  $k = n\pi$ , con  $n = 1, 2, 3, \dots$

Caso de bordes opuestos simplemente apoyado – libre (SA-L):

$$F(s) = \text{sen}(ks) + \text{senh}(ks) + r [\text{sen}(ks) - \text{senh}(ks)]$$

donde  $r = \frac{\text{senh}(k) + \text{sen}(k)}{\text{senh}(k) - \text{sen}(k)}$

y los autovalores son las raíces de la ecuación característica:

$$\tan(k) = \tanh(k)$$

En este caso el autovalor  $k = 0$ , tiene sentido físico pues corresponde al movimiento de cuerpo rígido.

Caso de bordes opuestos empotrado – simplemente apoyado, (E – SA):

$$F(s) = \cosh(ks) - \cos(ks) - r [\text{senh}(ks) - \text{sen}(ks)]$$

$$\text{con } r = \frac{\cosh(k) - \cos(k)}{\sinh(k) - \sin(k)}$$

y los autovalores son las raíces de la siguiente ecuación característica:

$$\tan(k) = \tanh(k)$$

**Caso de bordes opuestos empotrados, (E-E):**

$$F(s) = \cosh(ks) - \cos(ks) - r [\sin(ks) - \sinh(ks)]$$

$$\text{con } r = \frac{\cosh(k) - \cos(k)}{\sin(k) - \sinh(k)}$$

y los autovalores son las raíces de la siguiente ecuación característica:

$$\cos(k) \cdot \cosh(k) = 1$$

El sistema de ecuaciones lineales a que lleva la aplicación del método de Rayleigh – Ritz surge de minimizar la funcional de energía:

$$\frac{\partial J(W)}{\partial A_{mn}} = 0, \quad \forall A_{mn} \quad (10)$$

Matricialmente puede escribirse como:

$$(\mathbf{U} - \Omega_i^2 \mathbf{T}) \mathbf{A} = 0 \quad (11)$$

donde  $\mathbf{A}$  es el vector de los coeficientes  $A_{mn}$  de la exp. (1),  $\mathbf{U}$  la matriz de los coeficientes derivadas de la energía potencial,  $\mathbf{T}$ , es la matriz de los coeficientes derivados de la energía cinética y  $\Omega_i$  son los coeficientes adimensionales de frecuencias naturales circulares del sistema vibrante:

$$\Omega_i^2 = \frac{\rho h}{D_1} a^4 \omega_i^2 \quad (12)$$

El determinante – ecuación de frecuencias de la placa resulta:

$$|\mathbf{U} - \Omega_i^2 \mathbf{T}| = 0 \quad (13)$$

Resolviéndolo, se obtienen los coeficientes  $\Omega_i$  correspondientes a los modos normales de vibración.

#### DETERMINACIÓN DE LAS AUTOFUNCIONES.

Obtenidos los  $\Omega_i$ , se procede a calcular una nueva matriz  $\mathbf{C}$  de la forma.

$$\mathbf{C} = \mathbf{U} - \Omega_i^2 \mathbf{T} \quad (14)$$

Con la cual puede escribirse el sistema lineal homogéneo de  $M \times N$  ecuaciones (11) como.

$$\mathbf{C} \cdot \mathbf{A} = 0 \quad (15)$$

Para determinar las autofunciones se procede a asignar valor unitario a una de las constantes  $A_{mn}$  del vector  $\mathbf{A}$

Se genera así un sistema de ecuaciones reducido no homogéneo de  $M \times N - 1$  ecuaciones con  $M \times N - 1$  incógnitas:

$$\mathbf{C}' \cdot \mathbf{A}' = \mathbf{B} \quad (16)$$

Con el cual pueden calcularse los valores de las restantes constantes  $A_{mn}$  con respecto a la constante adoptada de valor uno.

De esta manera se determina la autofunción correspondiente a cada coeficiente de frecuencia natural (autovalor)  $\Omega_i$ .

$$W_i(x, y) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N A_{mn} X_m(x) Y_n(y) \quad (17)$$

### 3. RESULTADOS NUMÉRICOS

Los resultados numéricos obtenidos siguiendo el procedimiento propuesto, se corroboraron con otros resultados tanto numéricos como experimentales encontrados en la literatura para placas isótropas.

Se analizó el modelo de placa isótropa rectangular con orificio centrado de la Figura 1:

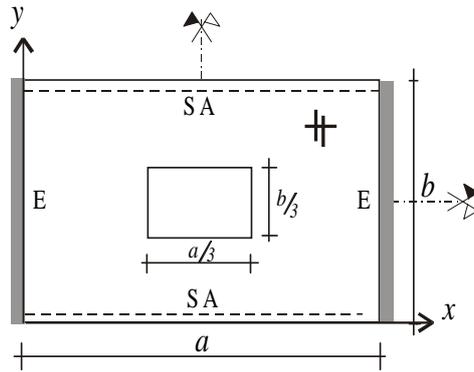


Figura 1: Placa isótropa con orificio centrado

La relación de lados de la placa es  $\lambda = a/b = 8/9$  y el orificio centrado tiene dimensiones:  $a/3$  y  $b/3$ . El coeficiente de Poisson adoptado es  $\nu = 0.30$ .

En la Tabla 1 se muestran los valores de los primeros 6 coeficientes de frecuencia natural.

Estos resultados se compararon con resultados publicados<sup>7,8,9</sup>. La comparación se efectúa para los primeros cuatro modos de vibración. Se evidencia que estos resultados están razonablemente de acuerdo con los valores determinados tanto experimental<sup>7</sup> como numéricamente<sup>7,8,9</sup>.

$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$	$\Omega_5$	$\Omega_6$	
34.36	56.36	63.68	96.89	118.43	152,454	Presente Estudio
34.04	54.57	65.05	95.38	---	---	Ref. [8]
33.83*	53.99*	62.49*	95.03*	---	---	Ref. [7]
33.22	53.01	61.91	91.87	---	---	Ref. [7]
32.42	53.42	62.35	94.83	---	---	Ref. [9]

\*: Resultados experimentales

Tabla 1: Comparación de los coeficientes de frecuencia natural  $\Omega = \sqrt{\rho h/D} a^2 \omega$ , para la placa isótropa rectangular E – SA – E – SA, con un orificio centrado. (Figura 1).

El segundo modelo de placa analizado corresponde a una placa ortótropa con condiciones de borde no simétricas. E-E-SA-SA. Ver Figura 2.

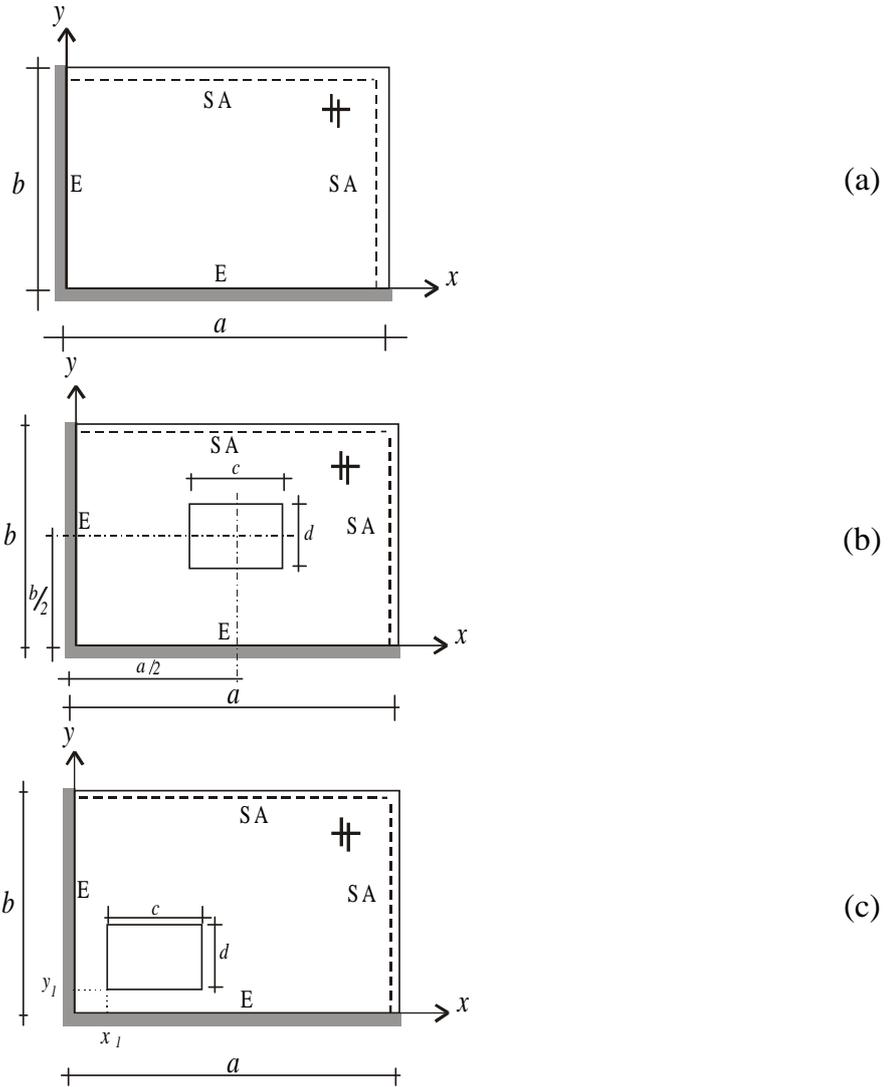


Figura 2: Placa ortótropa rectangular E-E-SA-SA.  $\lambda = a/b = 1,5$

En primera instancia se presentan en la Figura 3 las formas modales de los primeros seis coeficientes de frecuencia natural de la placa maciza. (Fig. 2(a)). La relación de lados elegida es  $\lambda = a/b = 1,5$  y las correspondientes relaciones de ortotropía adaptadas para el material de la placa son  $D_2 = D_k = D_1/2; \nu_2 = 0,3$

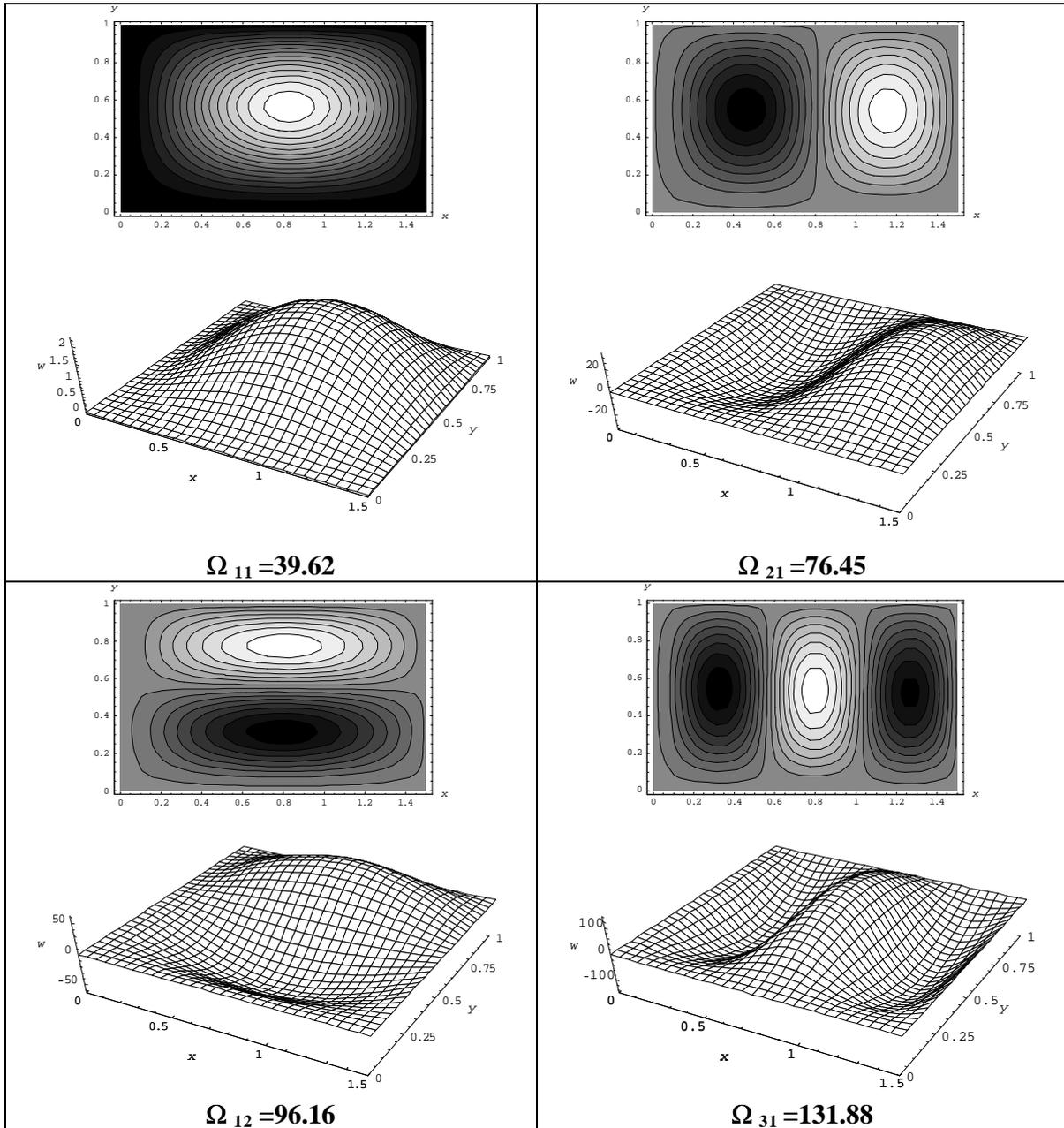


Figura 3: Formas modales y coeficientes de vibración de la placa ortótropa maciza E-E-SA-SA

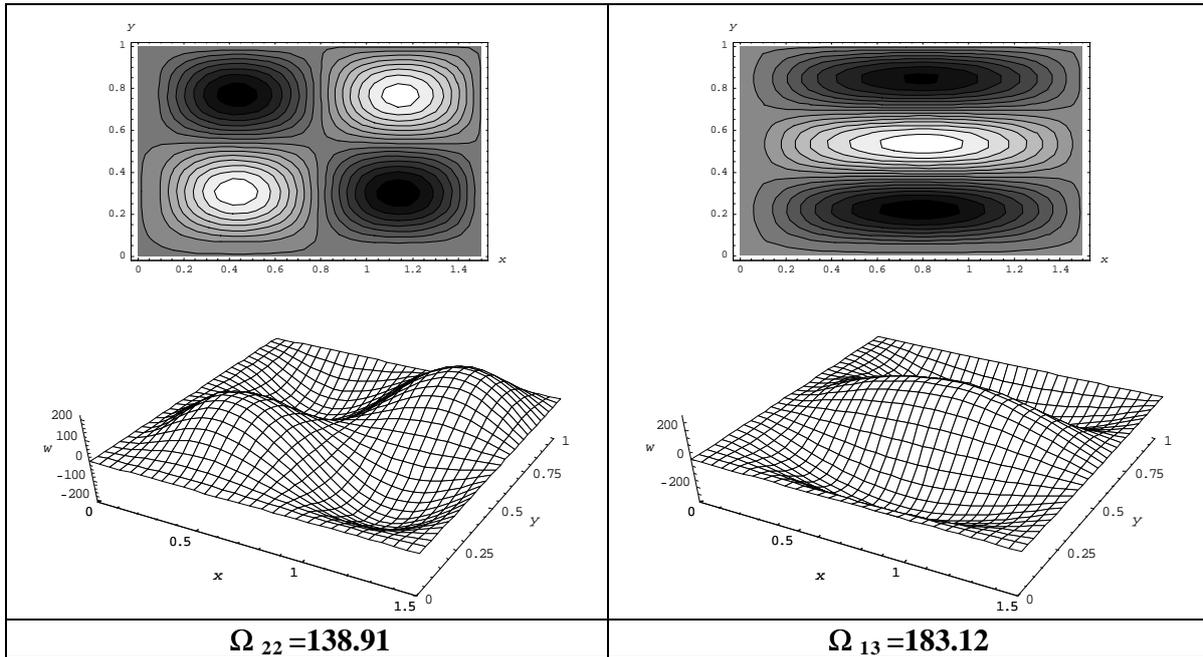


Figura 3 cont.: Formas modales y coeficientes de vibración de la placa ortótropa maciza E-E-SA-SA

La Figura 4, muestra las formas modales de una placa ortótropa similar  $\left( a/b = 3/2, D_2 = D_k = D_1/2, \nu_2 = 3/10 \right)$  con un orificio central rectangular  $\left( c/d = 3/2, \text{ con } c = 0.30 a \right)$ . Ver Figura 2(b).

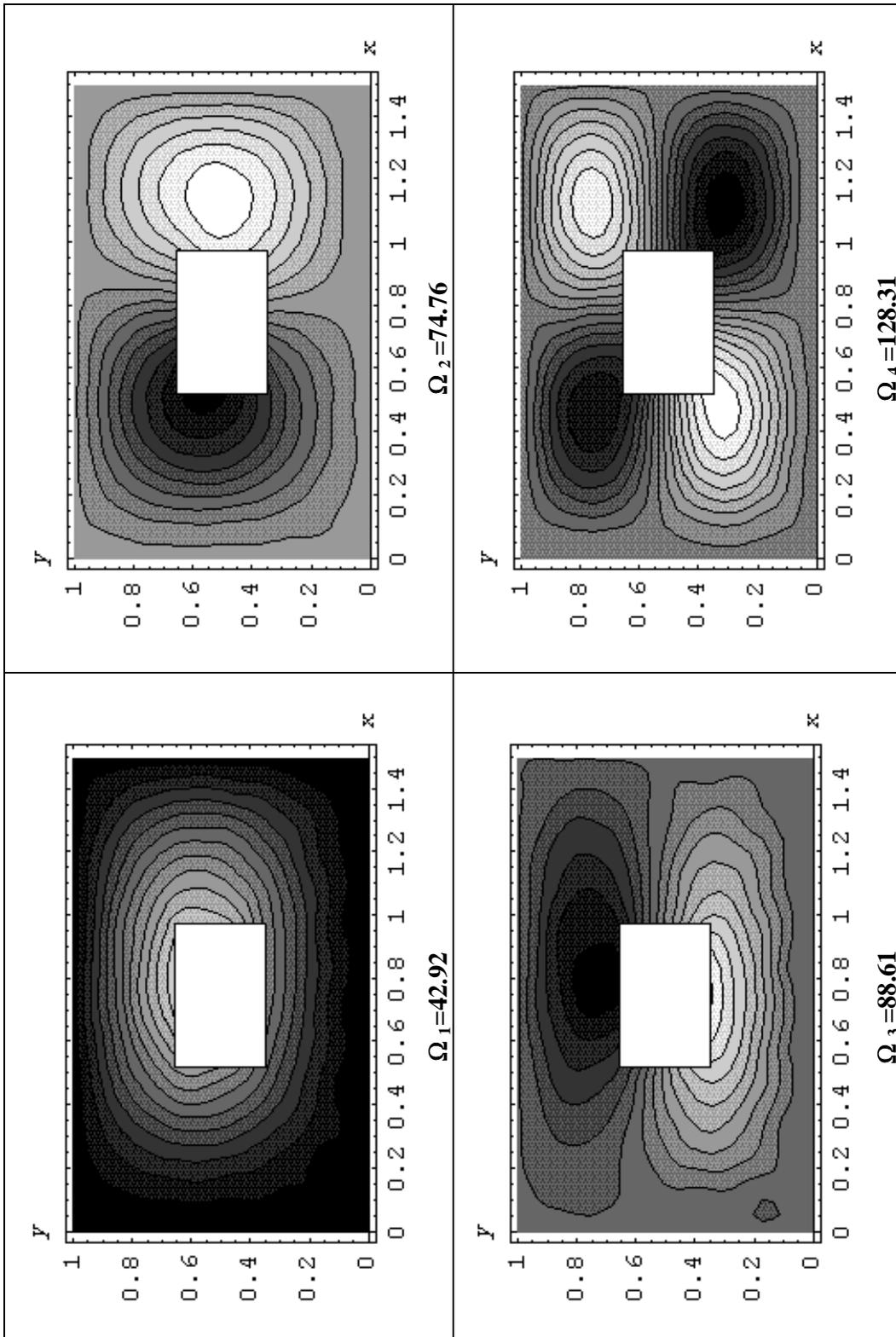


Figura 4 continúa-

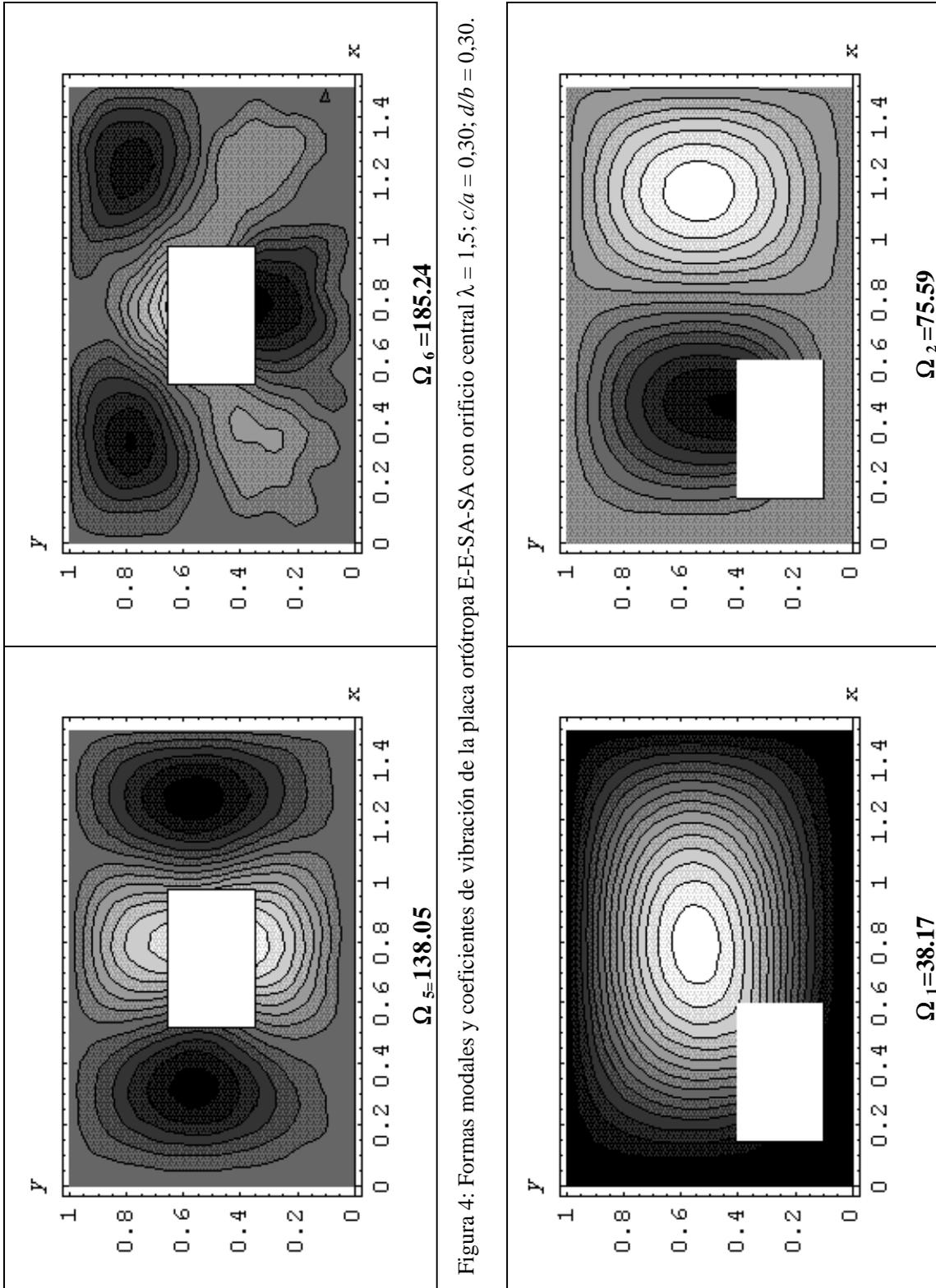


Figura 5 continúa-

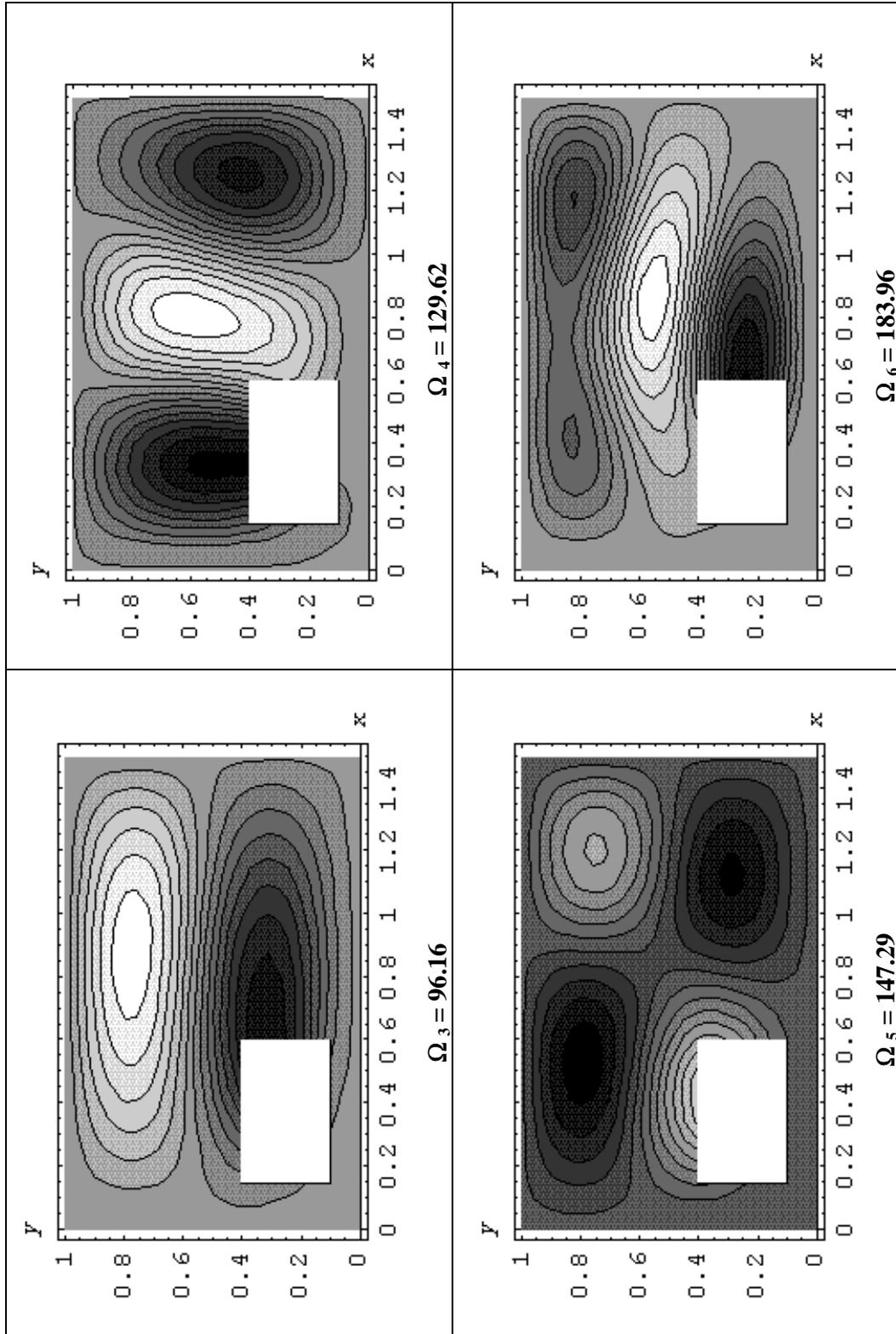


Figura 5: Formas modales y coeficientes de vibración de la placa ortótropa E-E-SA-SA,  $\lambda = 1,5$ , con orificio en  $x_1 = 0,1 a, y_1 = 0,1 b$ ;  $c/a = 0,30$ ;  $d/b = 0,30$ .

Observando las Figuras 3, 4 y 5, puede apreciarse como la presencia de un orificio del orden del 9% de la superficie de la placa produce variaciones en las formas modales sin cambiar significativamente los coeficientes de frecuencia correspondientes.

Incluso, nótese que el hueco central (Figura 4) altera el orden de las formas modales correspondientes a la cuarta y quinta frecuencia.

En la Figura 6 se muestra como el tamaño de un orificio central produce alteraciones en los valores de los seis coeficientes de frecuencia natural.

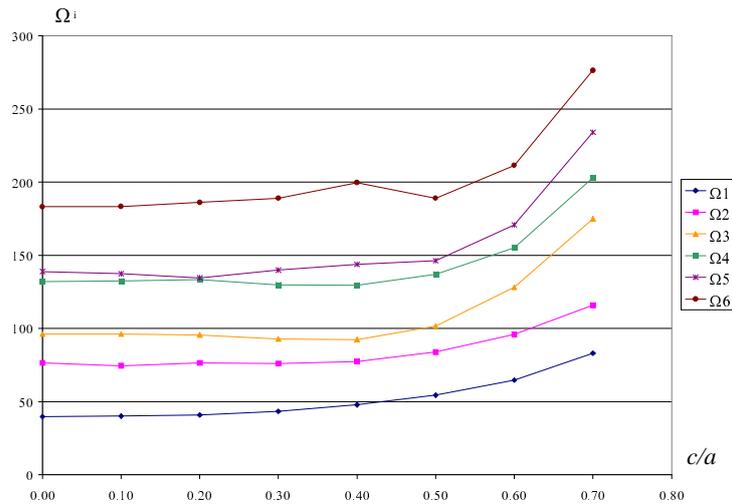


Figura 6: Variación de los primeros 6 coeficientes de frecuencia naturales en una placa ortótropa E-E-SA-SA, con un orificio centrado, en función de las dimensiones del orificio. Con  $\lambda=a/b=1.5$ .

La Figura 7 muestra el efecto del tamaño de un orificio ubicado en 0,1  $a$  y 0,1  $b$ .

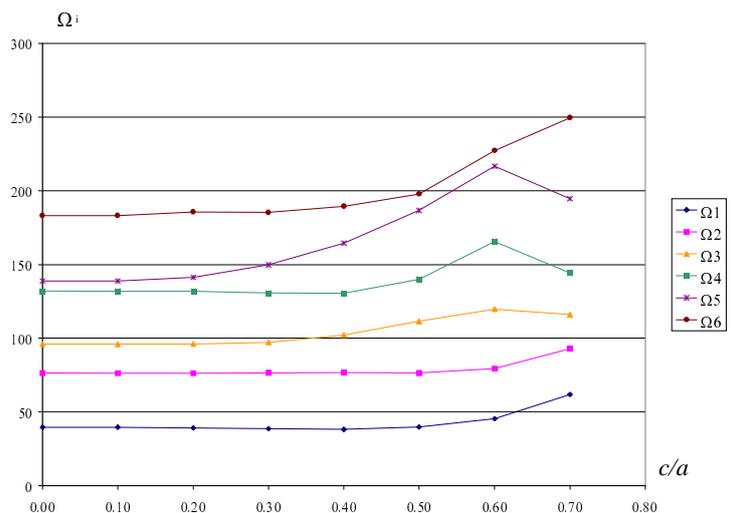


Figura 7: Variación de los primeros 6 coeficientes de frecuencia naturales en una placa ortótropa E-E-SA-SA, con un orificio descentrado, en función de las dimensiones del orificio. Con  $\lambda=a/b=1.5$ .

En un segundo análisis se consideró la placa rectangular ortótropa E-SA-SA-L, con  $\lambda = 1,5$ . -Figura 8- y con las siguientes variantes:

- a) placa ortótropa maciza;
- b) placa ortótropa con orificio central: con  $c/a = 0,30$  y  $d/b = 0,30$
- c) placa ortótropa con orificio excéntrico, en  $x_1 = 0,10a$  e  $y_1 = 0,10b$  con  $c/a = 0,30$  y  $d/b = 0,30$

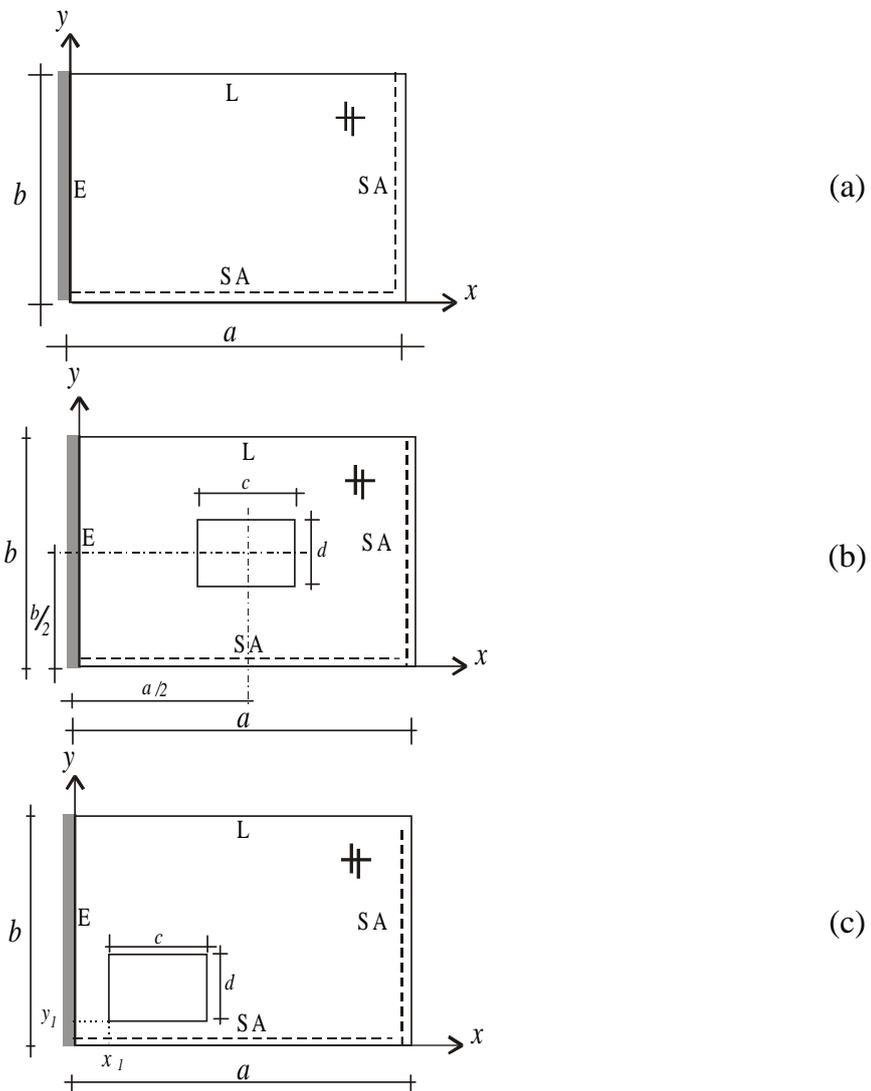


Figura 8: Placa ortótropa rectangular E – SA – SA – L  $a/b = 1.5$

En la Figura 9 se presentan las formas modales de la placa maciza Figura (8a) y los valores de los coeficientes de frecuencia de los primeros seis modos de vibración.

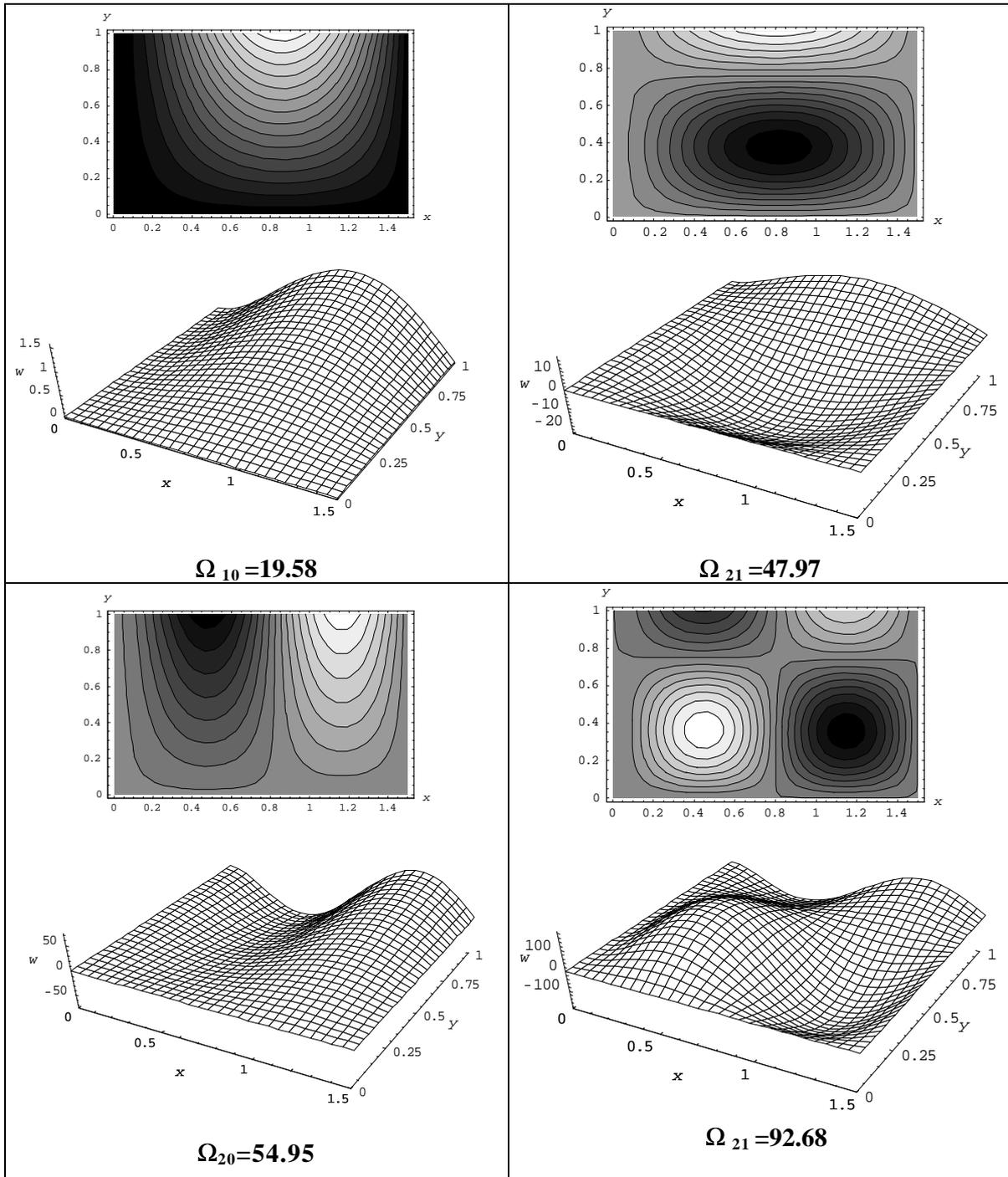


Figura 9: Formas modales y coeficientes de vibración de la placa ortótropa maciza E-E-SA-L

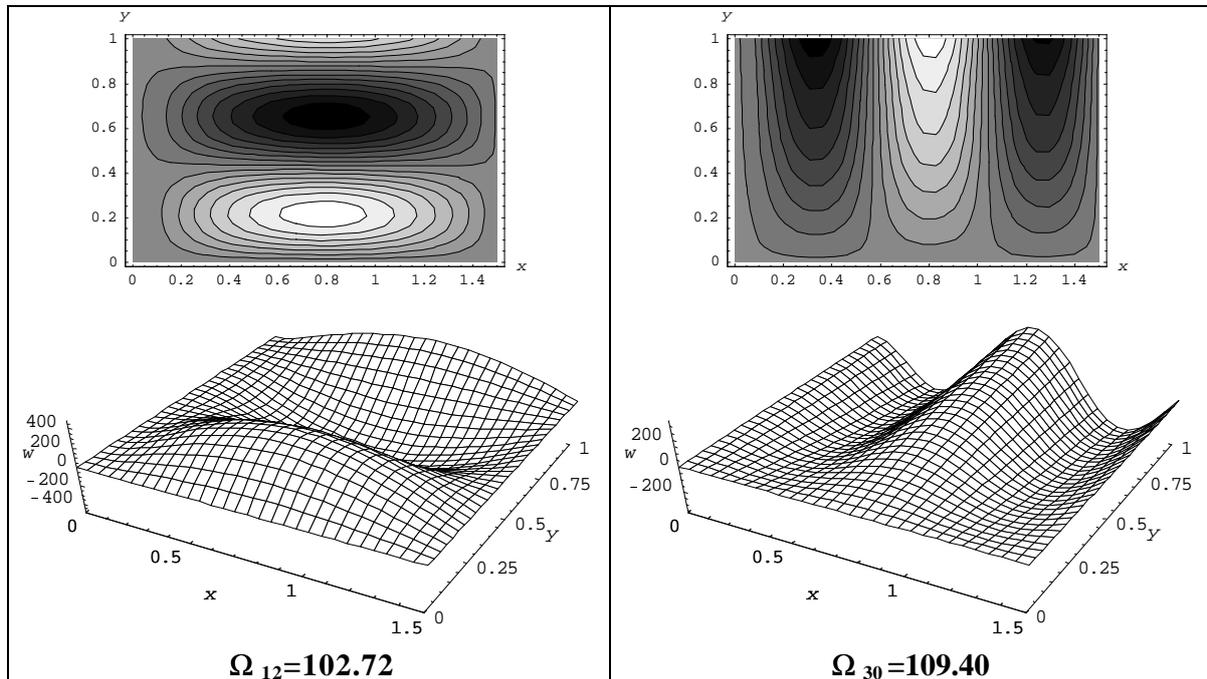


Figura 9 cont. : Formas modales y coeficientes de vibración de la placa ortótropa maciza E-E-SA-L

En las Figuras sucesivas 10 y 11 se indican las formas modales correspondientes a la placa con orificio, -Figura 8(b y c)- y en las Figuras 12 y 13 se muestran sendos gráficos que indican la variación de los seis primeros coeficientes de frecuencia en función del tamaño del orificio de la placa ortótropa E-SA-SA-L.

#### AGRADECIMIENTOS

El presente estudio ha sido auspiciado por la Secretaría de Ciencia y Tecnología de la Universidad Nacional del Sur (24/J/024 y 24/J/038) y por el CONICET (PIP 02152)

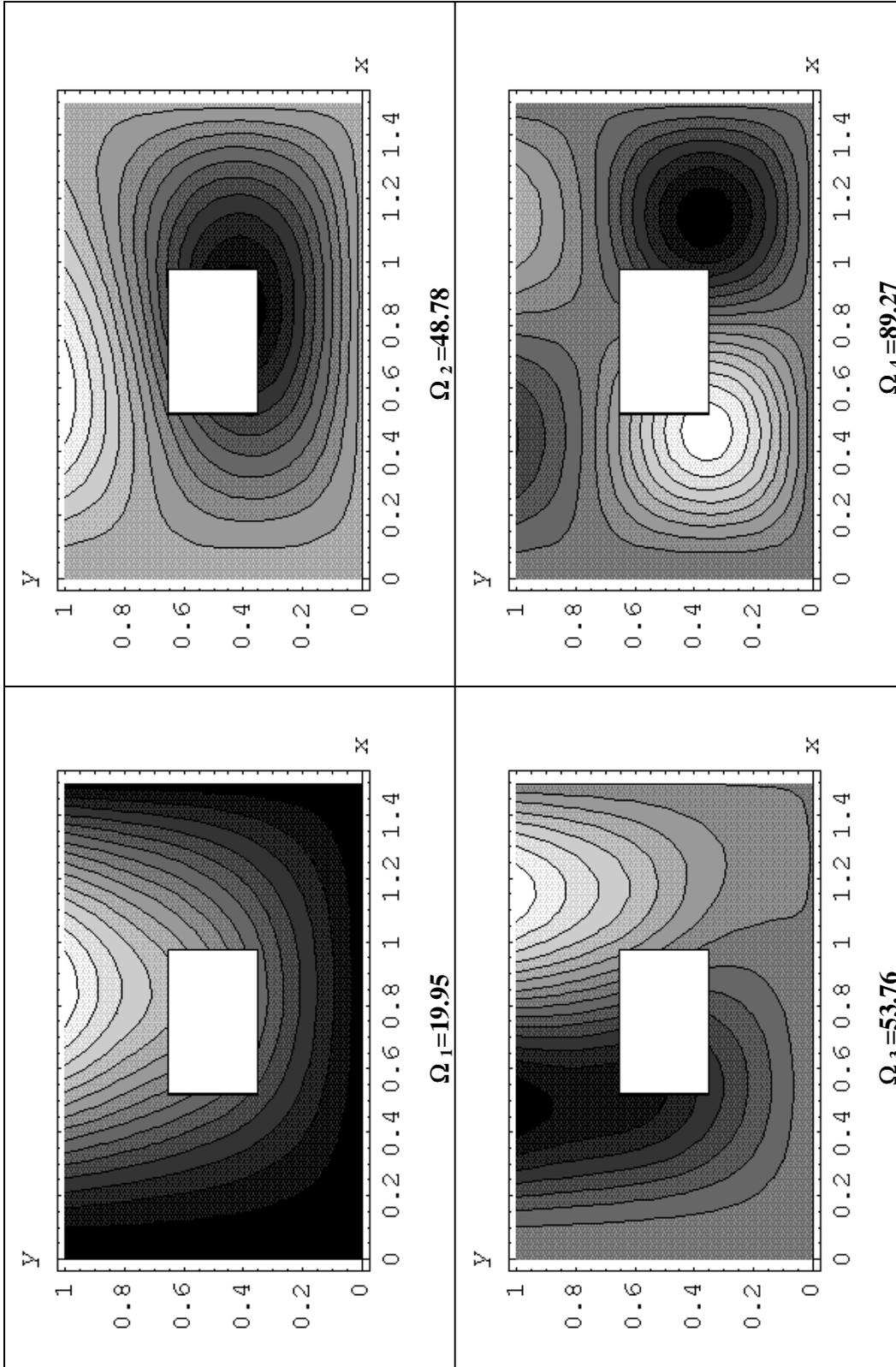


Figura 10:continúa-

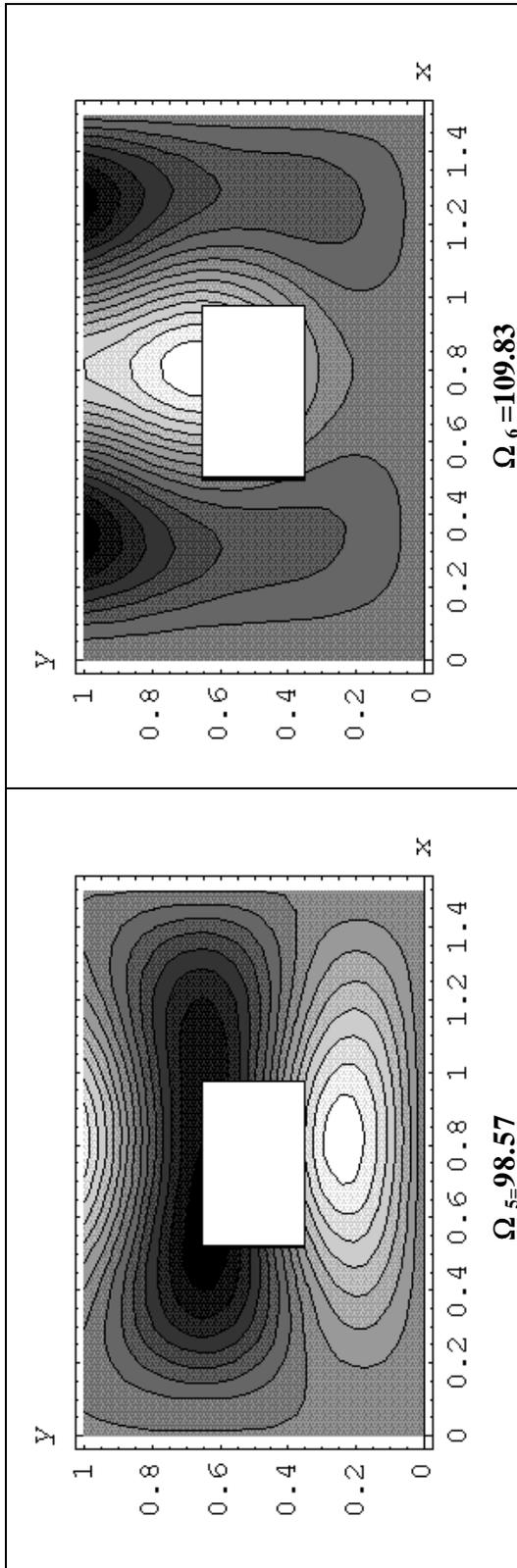


Figura 10: Formas modales y coeficientes de vibración de la placa ortótropa E-SA-SA-L con orificio central  $\lambda=1,5$ ;  $c/a = 0,30$ ;  $d/b = 0,30$ .

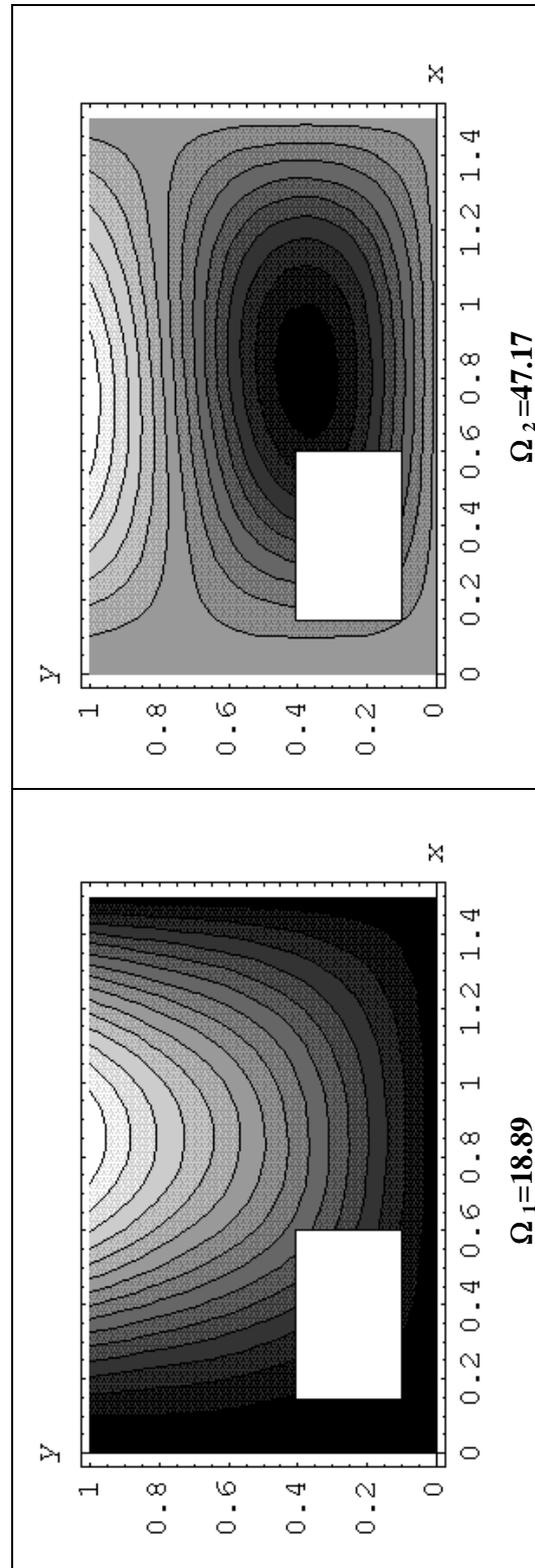


Figura 11: continúa-

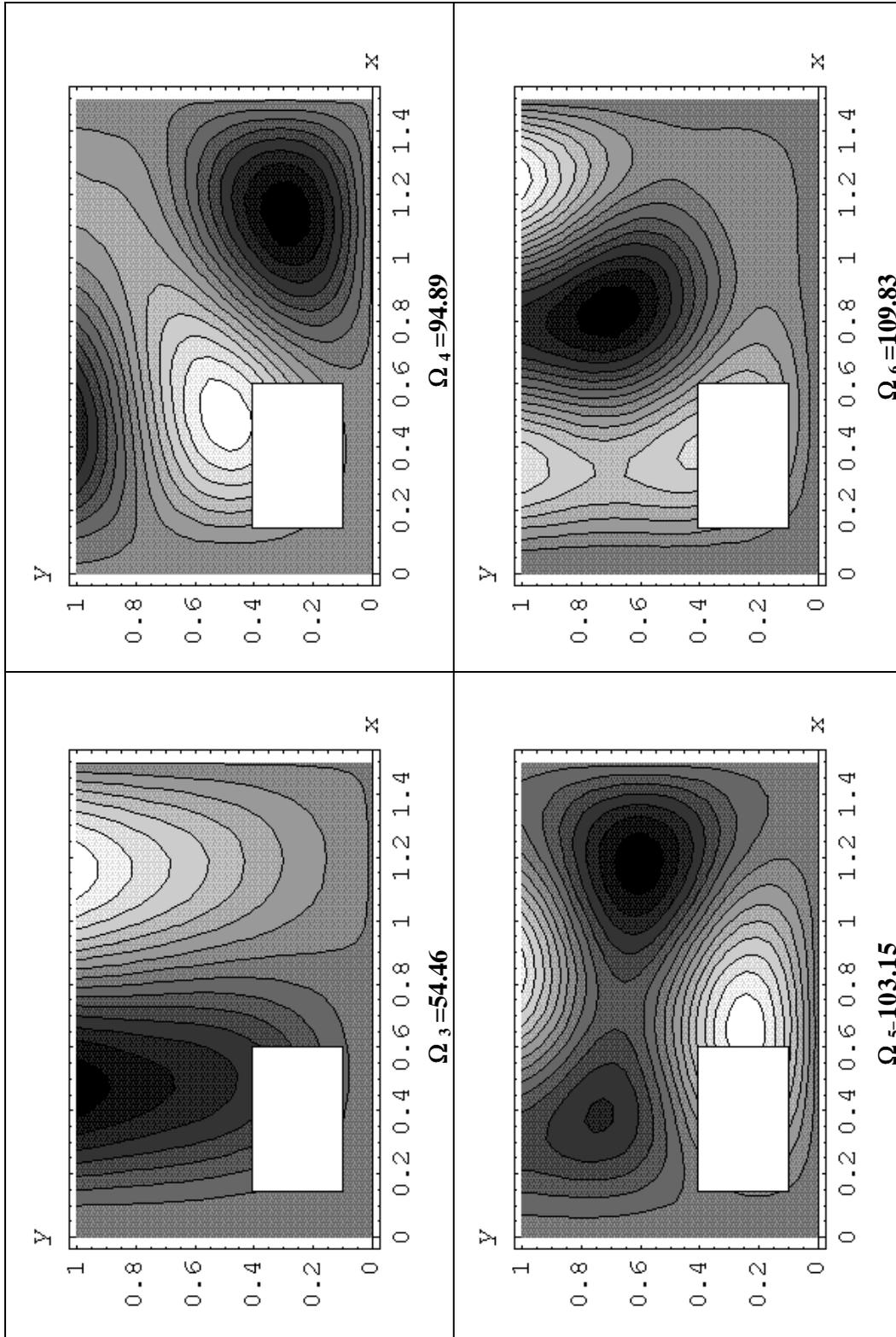


Figura 11. Formas modales y coeficientes de vibración de la placa ortótropa E-SA-SA-L.  $\lambda = 1,5$ , con orificio en  $x_1 = 0,1$ ,  $y_1 = 0,1$   $a, y_1 = 0,1$   $b; c/a = 0,30$ ;  $d/b = 0,30$

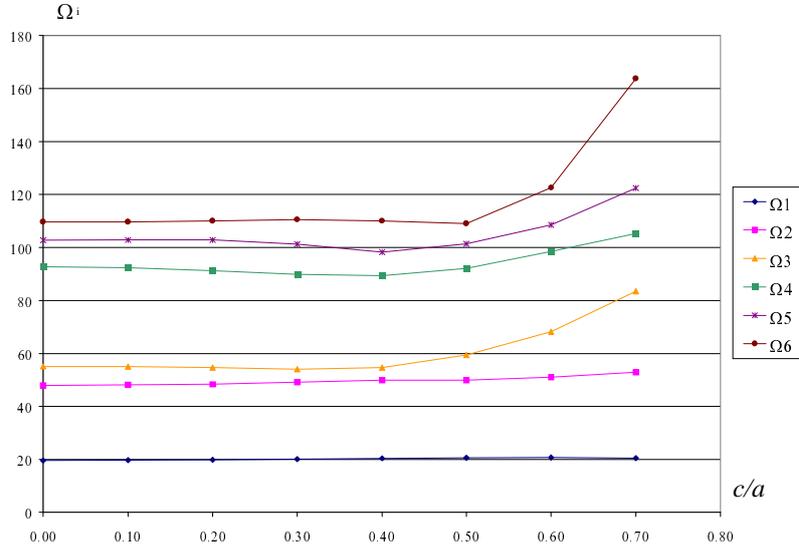


Figura 12: Variación de los primeros 6 coeficientes de frecuencia naturales en una placa ortótropa E-SA-SA-L, con un orificio centrado, en función de las dimensiones del orificio. Con  $\lambda=a/b=1.5$ .

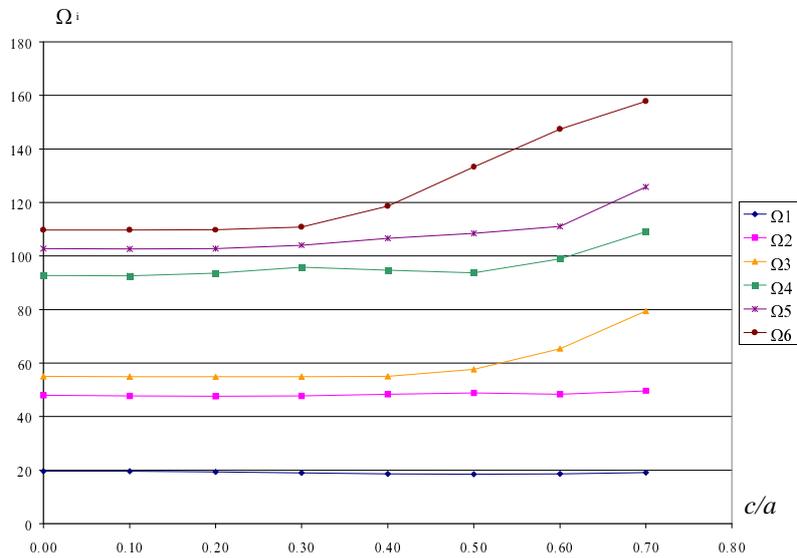


Figura 13: Variación de los primeros 6 coeficientes de frecuencia naturales en una placa ortótropa E-SA-SA-L, con un orificio descentrado, en función de las dimensiones del orificio. Con  $\lambda=a/b=1.5$ .

## REFERENCIAS.

- [1] P. A. A. Laura, E. Romanelli y R. E. Rossi. "Transverse vibrations of simple supported rectangular plates with rectangular cutouts". *Journal of Sound and Vibration* 202, 275-283. 1997.
- [2] P. A. A. Laura, D. R. Avalos, H. A. Larrondo y R. E. Rossi. "Numerical experiments on the Rayleigh-Ritz method when applied to doubly connected plates in the case of free edge holes". *Ocean Engineering* Vol. 25, 7, 585-589. 1998.
- [3] R. H. Gutiérrez, P. A. A. Laura y J. L. Pombo. "Higher frequencies of transverse vibration of rectangular plates elastically restrained against rotation at the edges and with a central free hole". *Journal of Sound and Vibration* 11, 202-206. 1987.
- [4] P. A. A. Laura, R. H. Gutiérrez, L. Ercoli, J. C. Utjes y R. Carnicer. "Free vibrations of rectangular plates elastically restrained against rotation with circular or square free openings". *Ocean Engineering* 144, 285-293. 1987.
- [5] L. G. Nallim y R. O. Grossi. "Natural frequencies of edge restrained tapered isotropic and orthotropic rectangular plates with a central free hole". *Applied Acoustics* 62, 3, 289-305. 2001.
- [6] R. D. Blevins. *Formulas for Natural Frequency and Modal Shape*. Van Nostrand Reinhold Company, New York. 1979
- [7] G. Aksu and R. Ali. "Determination of dynamic characteristics of rectangular plates with cut-outs using finite difference formulation". *Journal of Sound and Vibration* 44, 147-158. 1976.
- [8] K. Y. Lam, K. C. Hung. "Vibration analysis of plates with cutouts by the modified Rayleigh-Ritz method". *Applied Acoustics* 28, 49-60. 1989.
- [9] K. M. Liew, K.M., S. Kitipornchai, A. Y. T. Leung y C. W. Lim. "Analysis of the free vibration of rectangular plates with central cut-outs using the discrete Ritz method". *International Journal of Mechanical Sciences* 45, 941-959. 2003.