

## SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE DIFUSÃO DE NÊUTRONS EM GEOMETRIA RETANGULAR PELA TÉCNICA DA DIAGONALIZAÇÃO DE MATRIZES

**Claudio Z. Petersen, Celina Ceolin, Marcelo Schramm, Marco T. M. B. de Vilhena e  
Bardo E. J. Bodmann**

*Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul,  
Rua Sarmento Leite, 425 – 2º Andar, Porto Alegre - RS, Brasil, claudiopetersen@yahoo.com.br,  
celina.ce@hotmail.com, marceloschramm@hotmail.com, vilhena.mat@ufrgs.br,  
bodmann-bejbodmann@gmail.com <http://www.mecanica.ufrgs.br/promec/>*

**Palavras Chave:** Difusão de nêutrons, solução analítica, diagonalização.

**Resumo.** Recentemente (Petersen et.al., *Kerntechnik*, 74:60-64 (2009)) resolveu de forma numérica as equações de difusão de nêutrons com dois grupos de energia para uma placa heterogênea utilizando o método de diferenças finitas com condições de contorno do tipo albedo. Neste trabalho nós propomos a resolução do mesmo problema, porém de forma analítica, utilizando a técnica de diagonalização de matrizes. Partindo de um fator de multiplicação prescrito ( $k_{eff}$ ), com a técnica da diagonalização nós desacoplamos o sistema de equações diferenciais e resolvemos separadamente cada equação, tanto para o fluxo rápido de nêutrons quanto para o térmico, e recalculamos o  $k_{eff}$  pelo método da potência até um critério de parada escolhido. Essas equações foram resolvidas utilizando resultados analíticos conhecidos para equações diferenciais ordinárias de segunda ordem. Para a determinação das constantes geradas foram utilizadas as condições de contorno e de continuidade de corrente e fluxo de nêutrons nas interfaces. Os resultados obtidos foram comparados com a solução numérica proposta por (Petersen et.al., *Kerntechnik*, 74:60-64 (2009)) para duas regiões.

## 1 INTRODUÇÃO

O uso de diferentes tipos de energia tem crescido nos últimos anos. Existe uma alta probabilidade da energia nuclear ser o principal caminho escolhido pelas nações, visto que está em conformidade com as metas do Protocolo de Kyoto para emissão de dióxido de carbono ( $CO_2$ ). A maior vantagem da energia nuclear é a não emissão de ( $CO_2$ ) na atmosfera. O constante crescimento da demanda mundial por energia e os esforços para garantir o seu suprimento, juntamente com o problema do aquecimento global, têm propiciado e impulsionado o desenvolvimento da indústria e da pesquisa na área nuclear no Brasil e no mundo. Um dos principais enfoques da pesquisa na área nuclear é o estudo da evolução da população de nêutrons em sistemas nucleares, o que é um grande desafio tanto físico quanto matemático e constitui um problema crucial no estudo e na análise de reatores nucleares. Nesse contexto, é de extrema importância a determinação e o acompanhamento do comportamento dessa população no período da criticalidade do reator a fim de desenvolver métodos que possam prever o comportamento da população de nêutrons no núcleo de um reator nuclear com suficiente precisão e confiabilidade, soluções analíticas são necessárias. A motivação por trás do desenvolvimento de métodos analíticos para resolver as equações de física nuclear não é apenas o desafio de desenvolver um método para resolver um conjunto de equações diferenciais acopladas, mas também uma necessidade real para prever o desempenho e avaliar a segurança de reatores nucleares de potência, tanto estes atualmente em funcionamento quanto aqueles que serão projetados para o futuro. Além da elegância matemática, a solução analítica de certa forma elimina ou pelo menos atenua a avaliação do erro exigido por métodos numéricos. A título de ilustração na literatura sobre a solução analítica, podemos citar os trabalhos de (Ceolin, 2010), (Bodmann et al., 2010), (Vilhena et al., 2008) e (Petersen et al., 2009b).

Em reatores nucleares térmicos de potência, há um balanço entre o número de nêutrons produzido pela fissão e número consumido por absorção, espalhamento ou fuga pelo contorno. Um dos problemas centrais no desenvolvimento de um reator nuclear é o cálculo do tamanho e composição do sistema requerido para manter esse balanço. Cálculos de condições necessárias para a criticalidade são carregadas utilizando a teoria de transporte de nêutrons ou a teoria da difusão de nêutrons. Tanto a teoria da difusão quanto a teoria de transporte de nêutrons envolvem o cálculo global de reatores nucleares a partir de um problema de autovalor, que fornece tanto o fator de multiplicação efetivo ( $k_{eff}$ ), definido como o autovalor dominante, quanto a distribuição do fluxo de nêutrons durante o tempo de vida do núcleo. Então, o problema de encontrar o fator de multiplicação efetivo e a distribuição do fluxo de nêutrons consiste em resolver o problema de autovalor usando a independência temporal nas equações dos modelos matemáticos da teoria de transporte e difusão. Dentro desse contexto este trabalho se enquadra com o objetivo de resolver em forma analítica as equações de difusão de nêutrons estacionária em uma geometria retangular heterogênea com 2 grupos de energia pela técnica de diagonalização de matrizes. Para isso, nós reescrevemos a equação de difusão de nêutrons para dois grupos de energia numa forma matricial. Usando o fato que a matriz dos parâmetros nucleares possui os autovalores distintos, nós podemos decompô-la em uma forma do tipo  $A = PDP^{-1}$ , na qual  $P$  é a matriz dos autovetores de  $A$ ,  $D$  é a matriz diagonal dos autovalores de  $A$  e  $P^{-1}$  é a matriz inversa dos autovetores de  $A$ . Com isso podemos resolver a equação matricial como um sistema de equações diferenciais ordinárias de segunda ordem desacopladas.

## 2 FORMULAÇÃO MATEMÁTICA

O modelo mais utilizado no estudo do comportamento do estado estacionário da teoria de difusão de nêutrons multigrupo de energia a coeficientes constantes e sem fonte externa é dada pela seguinte equação para uma região  $r$  e para um grupo  $g$  de energia Lamarsh (1965) e (Duderstadt e Hamilton, 1976):

$$-D_g^r \phi_g^r(X)'' + \Sigma_{Rg}^r \phi_g^r(X) = \frac{1}{k_{eff}} \chi_g \sum_{g'=1}^G \nu \Sigma_{fg}^r \phi_{g'}^r(X) + \sum_{g'=1; g' \neq g}^G \Sigma_{gg'}^r \phi_{g'}^r(X), \quad (1)$$

em que  $0 \leq X \leq L$ , na qual:

$L$  é o limite do domínio;

$r$  é a região ( $r = 1 : V$ ), sendo  $V$  o número total de regiões;

$g$  é a energia dos grupos ( $g = 1 : G$ ), sendo  $G$  o número total de grupos de energia;

$\phi_g^r(X)$  é o fluxo escalar de nêutrons para o grupo  $g$  de energia na região  $r$ ;

$D_g^r(X)$  é o coeficiente de difusão de nêutrons para o grupo  $g$  de energia na região  $r$ ;

$\Sigma_{Rg}^r(X)$  é a seção de choque de remoção macroscópica do grupo  $g$  de energia na região  $r$ ;

$\Sigma_{gg'}^r(X)$  é a seção de choque de espalhamento macroscópica do grupo  $g$  para o grupo  $g'$  de energia na região  $r$ ;

$\Sigma_{fg}^r(X)$  é a seção de choque de fissão macroscópica do grupo  $g$  de energia na região  $r$ ;

$k_{eff}$  é o fator de multiplicação efetivo;

$\nu$  é o número médio de nêutrons liberado por fissão;

$\chi_g$  é o espectro integrado de fissão do grupo  $g$  de energia.

Neste trabalho, consideramos as condições de contorno clássicas utilizadas em física de reatores (Lamarsh, 1965), sendo a condição reflexiva em  $x = 0$  e a distância extrapolada em  $x = L$ :

$$\begin{aligned} \frac{d\phi_g^1}{dx}(0) &= 0, \\ \frac{d\phi_g^V}{dx}(L) &= -\frac{\phi_g^V(L)}{d}, \end{aligned} \quad (2)$$

na qual  $d$  é a distância extrapolada [Lamarsh, 1966]. A equação (1) pode ser escrita na forma matricial como:

$$\phi^r(X)'' + A^r \phi^r(X) = 0, \quad (3)$$

para  $r = 1 : V$ . Aqui,  $A^r$  é uma matriz quadrada de ordem  $2G$ . Se considerarmos dois grupos de energia ( $G = 2$ ) e que os parâmetros nucleares não variam no espaço, ou seja, são constantes por região, ficamos com a seguinte matriz:

$$A^r = \begin{pmatrix} a^r & b^r \\ c^r & d^r \end{pmatrix}, \quad (4)$$

com

$$a^r = \frac{-\Sigma_{R1}^r}{D_1^r} + \frac{\nu\Sigma_{f1}^r}{k_{eff}D_1^r};$$

$$b^r = \frac{\nu\Sigma_{f1}^r}{k_{eff}D_1^r};$$

$$c^r = \frac{\Sigma_{12}^r}{D_2^r};$$

$$d^r = \frac{-\Sigma_{R2}^r}{D_2^r}.$$

Como a matriz  $A^r$  possui autovalores distintos, podemos representá-la como  $A^r = P^r D^r (P^r)^{-1}$ , em que  $P^r$  é a matriz dos autovetores de  $A^r$ ,  $D^r$  é a matriz diagonal dos autovalores de  $A^r$  e  $(P^r)^{-1}$  é a matriz inversa dos autovetores de  $A^r$ . Então podemos reescrever o sistema matricial (3) como:

$$\phi^r(X)'' + P^r D^r (P^r)^{-1} \phi^r(X) = 0, \quad (5)$$

para  $r = 1 : V$ . Multiplicando a equação (5) por  $(P^r)^{-1}$  ficamos com

$$(P^r)^{-1} \phi^r(X)'' + D^r (P^r)^{-1} \phi^r(X) = 0, \quad (6)$$

para  $r = 1 : V$ . Considerando

$$Z^r(X) = (P^r)^{-1} \phi^r(X), \quad (7)$$

podemos reescrever (6) como

$$Z^r(X)'' + D^r Z^r(X) = 0. \quad (8)$$

Com esta fatoração da matriz, transformamos o sistema original (1) em um conjunto de equações diferenciais ordinárias desacopladas de ordem  $2GV$ . A solução dá-se por soluções formais de equações diferenciais ordinárias de segunda ordem. Resolvido o sistema de equações (8) basta reconstruir o fluxo de nêutrons por (7). Assim, podemos recalculer o  $k_{eff}$  a partir do método da potência (Petersen et al., 2009a) e, novamente, recalculer o fluxo até um critério de parada. Para a determinação das constantes geradas pela solução das equações diferenciais, utilizamos, além das condições de contorno originais, as condições de continuidade de fluxo e corrente de nêutrons nas interfaces, dados por:

$$\phi_g^r = \phi_g^{r+1}, \quad (9)$$

$$D_g^r (\phi_g^r)' = D_g^{r+1} (\phi_g^{r+1})'. \quad (10)$$

Com isto, ficamos com um sistema determinado de equações algébricas e sua resolução dá-se por métodos clássicos de soluções de sistemas lineares, como por exemplo eliminação Gaussiana.

### 3 RESULTADOS

Para os resultados numéricos consideramos o caso de uma placa com duas regiões: uma região combustível e outra refletora. Os parâmetros nucleares utilizados encontram-se na tabela (1) e são os mesmos utilizados por (Petersen et al., 2009a): O problema consiste em uma placa de 100 cm de comprimento composta por duas regiões, sendo a região 1 (combustível)  $0 \leq$

Parâmetros nucleares	Grupos de Energia(g)	
	1	2
$D_g^1 [cm]$	1.438	0.3976
$D_g^2 [cm]$	1.87142	0.283409
$\Sigma_{rg}^1 [cm^{-1}]$	0.02935	0.10490
$\Sigma_{rg}^2 [cm^{-1}]$	0.035411	0.031579
$\Sigma_{gg'}^1 [cm^{-1}]$	0.01563	0
$\Sigma_{gg'}^2 [cm^{-1}]$	0.034340	0
$\Sigma_{fg}^1 [cm^{-1}]$	0.000242	0.155618
$\Sigma_{fg}^2 [cm^{-1}]$	0	0

Tabela 1: Parâmetros nucleares para o caso teste.

$X \leq 25$  e a região 2 (refletor)  $25 \leq x \leq 100$ . As condições de contorno foram reflexiva em  $X = 0$  e distância extrapolada em  $X = L$ . A potência prescrita do reator é de 100 MW. Utilizamos como critério de parada para o cálculo do  $k_{eff}$  um  $\epsilon = 10^{-5}$ .

Calculamos o fluxo de nêutrons rápido (g=1) e térmico (g=2) em diferentes pontos e comparamos com o método de diferenças finitas proposto por (Petersen et al., 2009a). Os resultados são apresentados nas tabelas (2) e (3).

X [cm]	Solução Analítica [ $N/cm^2s$ ]	Diferenças finitas [ $N/cm^2s$ ]	Desvio Relativo
0	$8,285371 * 10^{-1}$	$8,26674 * 10^{-1}$	0,002
15	$5,992905 * 10^{-1}$	$5,944578 * 10^{-1}$	0.008
25	$2,185256 * 10^{-1}$	$2,166754 * 10^{-1}$	0.008
50	$1,764552 * 10^{-3}$	$1,748671 * 10^{-3}$	0.009
75	$1,424749 * 10^{-5}$	$1,4105151 * 10^{-5}$	0.01

Tabela 2: Comparação dos resultados para fluxo rápido.

X [cm]	Solução Analítica [ $N/cm^2s$ ]	Diferenças finitas [ $N/cm^2s$ ]	Desvio Relativo
0	$1,222560 * 10^{-1}$	$1,185579 * 10^{-1}$	0,003
15	$8,865854 * 10^{-2}$	$7,9492716 * 10^{-2}$	0,009
25	$7,879975 * 10^{-2}$	$7,170777 * 10^{-2}$	0,009
50	$2,814598 * 10^{-3}$	$2,5612841 * 10^{-3}$	0,009
75	$2,326346 * 10^{-5}$	$2,298429 * 10^{-5}$	0,012

Tabela 3: Comparação dos resultados para o fluxo térmico.

Pode-se observar nos resultados apresentados nas tabelas que obtivemos uma boa concordância em praticamente todos os pontos tanto para o fluxo rápido quanto para o fluxo térmico. Obtivemos um desvio relativo inferior a 0,013. Com isto acreditamos que a solução obtida possa ser estendida para demais regiões e servir de referência para soluções numéricas, uma vez que a solução obtida é de caráter analítico.

Por fim, os seguintes gráficos ilustram o comportamento dos fluxos de nêutrons rápidos e térmicos, respectivamente.

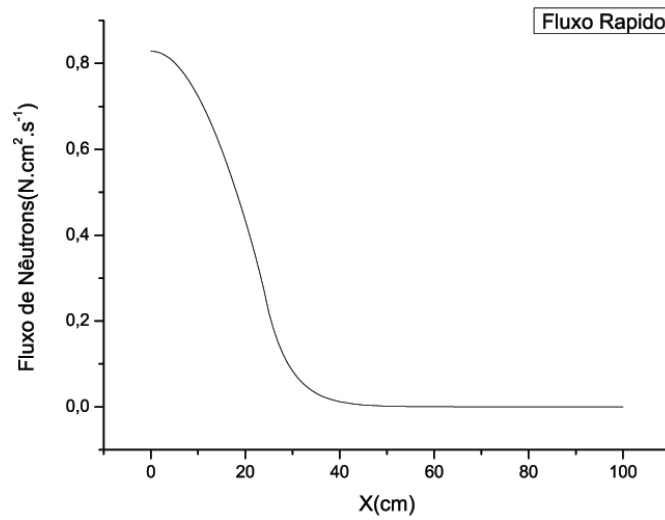


Figura 1: Fluxo de Nêutrons Rápido

Os dois gráficos para o fluxo de nêutrons apresentam o resultado esperado; fluxo máximo no início da placa e tendendo a zero no final, ou seja, satisfazendo as condições de contorno.

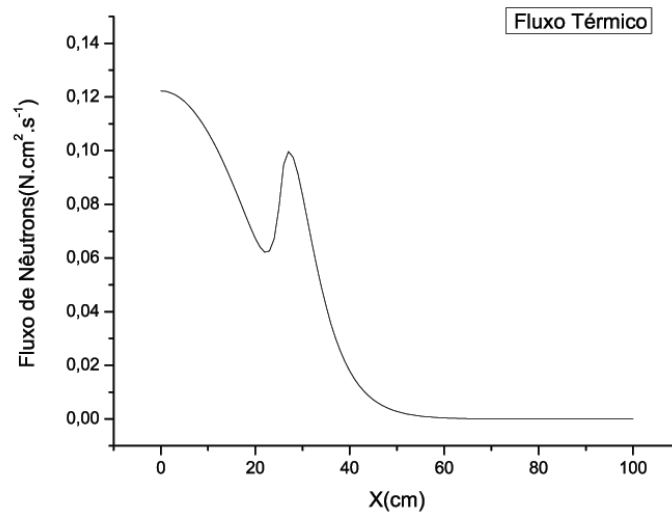


Figura 2: Fluxo de Nêutrons Térmico

#### 4 CONCLUSÕES

Neste trabalho, apresentamos uma solução analítica para a equação de difusão de nêutrons para uma placa heterogênea, considerando dois grupos de energia. O caráter analítico da solução, além da elegância matemática e dependência explícita dos parâmetros, permite diminuir o erro referente ao método de solução da equação associada ao modelo. Este fato contribui para uma melhor avaliação da validade do modelo físico. Devido aos bons resultados que obtivemos para duas regiões podemos inferir que a solução possa ser estendida para mais regiões, lembrando somente que a ordem do sistema linear para determinação das constantes é de  $2GV$ . Neste sentido, uma investigação de métodos de resolução de sistemas lineares de ordem maior, tal como decomposição LU devem ser considerados. Cabe salientar também que esta solução pode ser combinada com transformadas integrais para resolução de problemas multidimensionais, uma vez que ao aplicar as transformadas integrais recaímos numa equação diferencial ordinária semelhante à resolvida neste trabalho. Portanto, isso ressalta a importância deste trabalho e suas contribuições no estudo de soluções analíticas em física de reatores.

#### AGRADECIMENTOS

Este trabalho tem o suporte do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq - Brasil).

#### REFERÊNCIAS

- Bodmann B., Vilhena M.T., Ferreira L.S., e Bardaji J.B. Analytical solver for the multi-group two dimensional neutron-diffusion equation by integral transform techniques. *Il Nuovo Cimento della Società Italiana di Fisica*, 1:1–10, 2010.
- Ceolin C. *Solução Analítica da Equação Cinética de Difusão Multigrupo de Nêutrons em Geometria Cartesiana Unidimensional pela Técnica da Transformada Integral*, volume M. Sc. dissertation. PROMEC/UFRGS, 2010.
- Duderstadt J.J. e Hamilton L.J. *Nuclear Reactor Analysis*, volume 1. Sons, New York, 1976.
- Lamarsh J.R. *Introduction to Nuclear Reactor Theory*, volume 1. Addison-Wesley Publishing

Company, 1965.

Petersen C.Z., Vilhena M.T., e Barros R. Application of the laplace transform method for the albedo boundary conditions in multigroup neutron diffusion eigenvalue problems in slab geometry. *Kerntechnik*, 74:60–64, 2009a.

Petersen C.Z., Vilhena M.T., Dulla S., e Ravetto P. An analytical solution of the point kinetics equations with time variable reactivity by the decomposition method. *International Nuclear Atlantic Conference*, 2009b.

Vilhena M.T., Heinen I.R., e Bodmann B. An analytical solution for the general perturbative diffusion equation by integral transform techniques. *Annals of Nuclear Energy*, 35:2410–2413, 2008.