

TRANSPORTE DE MASSA EM SÓLIDOS COM FORMA ARBITRÁRIA VIA MÉTODO INTEGRAL BASEADO EM GALERKIN USANDO CONDIÇÃO DE CONTORNO CONVECTIVA

Ivonete B. dos Santos^{a,b}, Leonardo P. de L. Silva^b, Alex A. Silva^b e Antonio G. B de Lima^b

^a*Departamento de Física, Universidade Estadual da Paraíba, Av. das Baraúnas, 351 - Bairro Universitário, Cep 58429-500, Campina Grande, Paraíba, Brasil.*

ivoneetbs@gmail.com

^b*Unidade Acadêmica de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Campina Grande, Campus I, Rua Aprígio Veloso, 882, Bodocongó, Cep 58429-900, Campina Grande, Paraíba, Brasil. gilson@dem.ufcg.edu.br*

Palavras Chave: Secagem, método GBI, simulação.

Resumo. A secagem é um processo que envolve a transferência simultânea de calor, massa e quantidade de movimento linear, sendo, que o transporte de umidade do interior para a superfície do material, pode ocorrer na forma de líquido e/ou vapor, dependendo do tipo de produto e do percentual de umidade presente no mesmo. Para descrever teoricamente o processo de secagem de forma mais precisa, é importante considerar o fator forma do corpo no desenvolvimento do modelo matemático, de modo a descrever o fenômeno físico, de forma mais real, e elevar o nível de confiança do modelo proposto. Dessa forma, o presente trabalho objetiva desenvolver um modelo matemático e sua solução analítica para o problema de secagem em sólidos com forma arbitrária, usando a teoria da difusão líquida, via método integral baseado em Galerkin considerando propriedades termo-físicas constantes e condição de contorno de 3ª espécie (fluxo convectivo ou condição de Robin). Resultados da distribuição do teor de umidade de sólidos com geometria arbitrária e sua respectiva cinética de secagem são apresentados e analisados. Observa-se que à medida que o número de Fourier aumenta há uma queda nos níveis do teor de umidade, e que com o aumento do número de Biot, o processo de secagem é mais rápido.

1 INTRODUÇÃO

A secagem de sólidos é um dos processos mais antigos usados em indústrias agrícolas, cerâmicas, químicas, alimentícias, farmacêuticas, de celulose, mineral e de polímeros. Por ser um processo que envolve transferência simultânea de calor, massa e quantidade de movimento linear no sólido, gera a necessidade de modelos efetivos para simulação do processo (Menon e Mujumdar, 1987).

A secagem é a remoção de uma substância volátil (não exclusivamente água) que promove a conservação de produtos orgânicos por muito mais tempo, concentrando o sabor e mantendo o valor nutritivo dos mesmos, além de facilitar o transporte, manipulação, preparo e armazenagem. Devido à crescente necessidade de métodos mais eficientes e rápidos, foram surgindo uma série de novos métodos de secagem. Métodos complexos de secagem começaram a ser propostos no final do século 19, como por exemplo, patentes de secador a radiação térmica e secador à vácuo. Tais inovações foram gradualmente sendo proliferadas e incorporadas pela indústria, Keey (1972).

Em relação a outras técnicas de separação, a secagem se diferencia devido à retirada das moléculas que, neste caso, é obtida por uma movimentação do líquido, provocada por uma diferença de pressão parcial do vapor d'água entre a superfície do produto a ser secado e o ar que o envolve. No caso dos alimentos, a remoção de água do material úmido é realizada até um nível onde a deterioração provocada por microorganismos possa ser minimizada (Lima et al., 2004). O processo de secagem deve ocorrer de maneira controlada, para que ela possa ocorrer de maneira uniforme, evitando elevados gradientes de umidade e temperatura no interior do material que podem provocar a perda da qualidade do produto. Sabendo-se que os efeitos da secagem alteram as propriedades físicas e químicas do produto e estas por sua vez afetam o processo de transferência de calor e massa é fundamental conhecer os seus efeitos e o controle dos mesmos.

Na tentativa de melhor elucidar os processos de secagem, várias teorias sobre a secagem de sólidos foram propostas e vários modelos matemáticos foram desenvolvidos, sendo quase todos os modelos baseados na teoria da difusão líquida. No entanto outras teorias também têm sido usadas, por exemplo, as teorias de Fortes e Okos e de Luikov.

Ao se considerar geometrias uni e bidimensionais para descrever processos de secagem de sólidos com forma arbitrária, algumas discrepâncias, na cinética de secagem e distribuição do teor de umidade, bem como na temperatura no interior do sólido são encontradas, quando comparadas com resultados experimentais. Isto ocorre tendo em vista os modelos matemáticos não representarem fielmente a geometria do corpo. Neste contexto, é importante considerar o fator forma do corpo no desenvolvimento dos modelos matemáticos, de modo a descrever o fenômeno físico, de forma mais real, e elevar o nível de confiança do modelo proposto. Ao considerar a influência de tal parâmetro, espera-se que os desvios entre os resultados

teóricos e experimentais sejam minimizados.

Soluções analíticas ou numéricas da equação de difusão com condições de contorno constante ou do tipo convectiva e coeficientes difusivos constante ou variável, para diversas geometrias como paralelepípedo, cilindro e esfera, podem ser encontradas na literatura de Carslaw e Jaeger (1959); Luikov e Mikhailov (1965); Luikov (1968); Skelland (1974); Crank (1992); Gebhart (1993). E para corpos de forma elíptica podem ser citados Niven (1880); Normiton e Blackwell (1964); Haji-Sheikh e Sparrow (1966); Haji-Sheikh e Sparrow (1967); Smith et al. (1967); Smith et al. (1968); Smith e Nelson (1969); Zienkiewicz e Parekh (1970); Sokhansanj (1980); Wrobel e Brebbia (1981); Payne et al (1986); Elvira (1990); Haghighi et al (1990); Lu e Siebenmorgen (1992); Sarker et al (1994); Lima et al. (1999), além de outras. No entanto, existem poucos estudos científicos que reportam a difusão aplicados a geometrias arbitrarias. Diante do exposto o presente trabalho objetiva estudar teoricamente o processo de secagem de sólidos com forma arbitrária via método integral baseado em Galerkin. E, para descrever teoricamente o processo de secagem de forma mais precisa, considerou-se como aplicação, neste trabalho, um sólido esferoidal prolato (forma muito comum na natureza que corresponde a diversos produtos agrícolas) considerando propriedades termo-físicas constantes e a condição de contorno de 3ª espécie (fluxo convectivo ou condição de Robin).

2 MODELAGEM MATEMÁTICA

Baseando-se na teoria da difusão líquida, que enuncia que a movimentação de líquido dentro de um sólido poroso tem como principal agente a existência de um gradiente de concentração de umidade, a segunda Lei de Fick vem sendo utilizada como modelo matemático na descrição de tal fenômeno (Brooker et al., 1992). A mesma é dada por:

$$\frac{\partial M}{\partial t} = \nabla \cdot (D \nabla M) \quad (1)$$

onde D é o coeficiente de difusão e M é o teor de umidade do sólido que varia com o tempo.

Afim de possibilitar a solução do problema físico, as seguintes considerações foram adotadas:

- (a) O sólido é homogêneo e isotrópico;
- (b) A distribuição de umidade no interior do sólido é uniforme no início do processo;
- (c) Propriedades termofísicas são constantes durante todo o processo;
- (d) O sólido é constituído de matéria seca e água na fase líquida;
- (e) O fenômeno de secagem ocorre por difusão de água no interior do sólido e por evaporação da água na superfície do mesmo.

Sendo assim, a solução da Equação (1) pode ser escrita da seguinte forma (Payne et al., 1986):

$$M = \sum_{n=1}^N C_n \Psi_n e^{-\gamma_n t} + M_e \quad (2)$$

onde M_e é o teor de umidade de equilíbrio. Quando se substitui a Equação (2) na Equação (1), obtém-se:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\sum_{n=1}^N C_n \Psi_n e^{-\gamma_n t} + M_e \right] = \nabla \cdot \left[D \nabla \left(\sum_{n=1}^N C_n \Psi_n e^{-\gamma_n t} + M_e \right) \right] \quad (3)$$

Considerando que C_n, γ_n, M_e e D são constantes e Ψ_n é independente do tempo, pode-se escrever:

$$\sum_{n=1}^N C_n \Psi_n \frac{\partial}{\partial t} (e^{-\gamma_n t}) = \sum_{n=1}^N C_n e^{-\gamma_n t} \nabla \cdot (D \nabla \Psi_n) \quad (4)$$

Desenvolvendo a derivada parcial do primeiro membro da Equação (4), pode-se escrever:

$$\sum_{n=1}^N C_n \Psi_n e^{-\gamma_n t} (-\gamma_n) = \sum_{n=1}^N C_n e^{-\gamma_n t} \nabla \cdot (D \nabla \Psi_n) \quad (5)$$

Colocando os termos comuns da Equação (5) em evidência, obtém-se:

$$\sum_{n=1}^N [\gamma_n \Psi_n + \nabla \cdot (D \nabla \Psi_n)] C_n e^{-\gamma_n t} = 0 \quad (6)$$

Como não se está interessado numa solução trivial que seria C_n igual a zero, e por saber que sendo $t \geq 0$ a exponencial jamais terá valor nulo, tem-se que a solução procurada é obtida pela resolução da equação:

$$[\gamma_n \Psi_n + \nabla \cdot (D \nabla \Psi_n)] = 0 \quad (7)$$

onde Ψ_n é uma a função própria, obtida através da combinação linear de um conjunto de funções de base corretamente selecionado, onde f_j é um elemento do conjunto de funções de base e os d_{nj} são constantes que devem ser determinadas. Esta função é dada por:

$$\Psi_n = \sum_{j=1}^N d_{nj} f_j \quad (8)$$

Então, tem-se que o conjunto adequado de funções de base é aquele em que os seus membros são linearmente independentes, satisfazem as condições de contorno homogêneas e seus elementos não são nulos no interior do sólido. Substituindo a Equação (8) na Equação (7), tem-se:

$$\sum_{j=1}^N d_{nj} [\gamma_n f_j + \nabla \cdot (D \nabla f_j)] = 0 \quad (9)$$

Agora usando o procedimento de Galerkin, que consiste em multiplicar a Equação (9) por $f_i dV$ e integrar sobre o volume (Kantorovich e Krylov, 1960), obtém-se:

$$\int_V \sum_{j=1}^N d_{nj} [\gamma_n f_j + \nabla \cdot (D \nabla f_j)] f_i dV = 0 \quad (10)$$

Escrevendo de outra maneira a Equação (10), obtém-se:

$$\sum_{j=1}^N d_{nj} \left[\int_V \gamma_n f_i f_j dV + \int_V f_i \nabla \cdot (D \nabla f_j) dV \right] \quad (11)$$

Escrevendo a Equação (11) na forma matricial, tem-se:

$$(\bar{A} + \gamma_n \bar{B}) \bar{d}_n = 0 \quad (12)$$

onde \bar{A} e \bar{B} são matrizes quadradas de $N \times N$ elementos. Os elementos \bar{A} e \bar{B} são calculados através das seguintes equações:

$$a_{ij} = \int_V f_i \nabla \cdot (D \nabla f_j) dV \quad (13.a)$$

$$b_{ij} = \int_V f_i f_j dV \quad (13.b)$$

Assim, após a determinação das matrizes \bar{A} e \bar{B} , determina-se os valores de γ_n e \bar{d}_n .

A fim de aplicar as condições de contorno ao problema usa-se a identidade:

$$\int_V f_i \nabla \cdot (D \nabla f_j) dV = \int_V \nabla \cdot (D f_i \nabla f_j) dV - \int_V D \nabla f_i \nabla f_j dV \quad (14)$$

Considerando D constante, pode-se escrever:

$$\int_V f_i \nabla \cdot (D \nabla f_j) dV = \int_S D f_i \nabla f_j \bar{n}_i \cdot \omega - \int_V D \nabla f_i \nabla f_j dV \quad (15.a)$$

ou ainda,

$$\int_V f_i \nabla \cdot (D \nabla f_j) dV = \int_S D f_i \left(\frac{\partial f_j}{\partial \bar{n}} \right) dS - \int_V D \nabla f_i \nabla f_j dV \quad (15.b)$$

Ao tratar-se de condições homogêneas de 1ª espécie (M prescrito) tem-se que $f_j = 0$ e para as condições homogêneas de 2ª espécie (fluxo de umidade prescrito) tem-se que $\frac{\partial f_j}{\partial \bar{n}} = 0$. Assim, o primeiro termo do segundo membro da equação é

zero e o segundo termo é sempre simétrico. Para as condições de contorno homogêneas de 3ª espécie faz-se uso da Equação (13.a), onde as matrizes \bar{A} e \bar{B} obtidas com essa condição de contorno também são simétricas. Nesta última condição de contorno, $-D \frac{\partial f_j}{\partial \vec{n}} = hf_j$.

Para que se obtenham os coeficientes C_n da Equação (2), usa-se a condição inicial em $t = 0$. Neste caso, $M = M_0$, com isso obtêm-se a equação:

$$M_0 = \sum_{n=1}^N C_n \Psi_n + M_e \quad (16)$$

Usando mais uma vez o procedimento de Galerkin, multiplicando a Equação (16) por $f_i dV$ e integrando sobre o volume (Kantorovich e Krylov, 1960), obtêm-se:

$$\int_V f_i (M_0 - M_e) dV = \int_V f_i \sum_{n=1}^N C_n \Psi_n dV \quad (17)$$

A solução da Equação (17) será um conjunto de N equações algébricas lineares que permitirá encontrar os C_n e assim completando a solução do problema.

O valor médio do teor de umidade do sólido é dado por:

$$\bar{M} = \frac{1}{V} \int_V M dV \quad (18)$$

onde V é o volume do sólido em estudo.

3 APLICAÇÃO

Para o estudo teórico da secagem de sólido com geometria arbitrária, considerou-se um esferóide prolato conforme Figura 1.

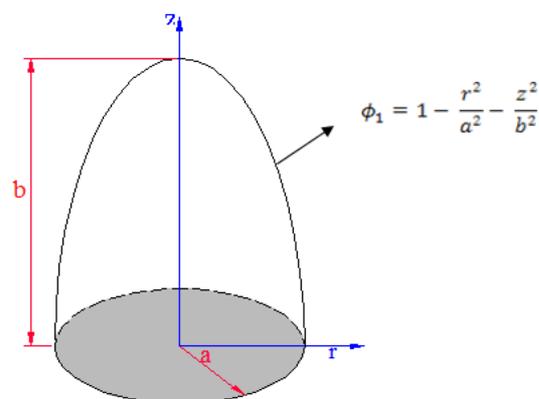


Figura 1: Esferóide prolato e suas características.

Neste caso o volume do sólido que é ilustrado na Figura 1 é dado por:

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^a \int_0^{b\sqrt{1-r^2/b^2}} r dz dr d\theta \quad (19.a)$$

ou,

$$V = \frac{2}{3} \pi a^2 b \quad (19.b)$$

Assim sendo, usando as Equações (13.a) e (13.b), pode-se escrever:

$$a_{ij} = \int_0^{2\pi} \int_0^a \int_0^{b\sqrt{1-r^2/b^2}} f_i \nabla \bullet (D \nabla f_j) r dz dr d\theta \quad (20.a)$$

$$b_{ij} = \int_0^{2\pi} \int_0^a \int_0^{b\sqrt{1-r^2/b^2}} f_i f_j r dz dr d\theta \quad (20.b)$$

onde os valores de C_n para esferóide prolato são calculados através da seguinte equação:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^a \int_0^{b\sqrt{1-r^2/b^2}} f_i (M_o - M_e) r dz dr d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^a \int_0^{b\sqrt{1-r^2/b^2}} f_i \sum_{n=1}^N C_n \Psi_n r dz dr d\theta \quad (21)$$

As funções de base de 1ª espécie são determinadas a partir da primeira função de base, que é dada por:

$$f_1 = \emptyset_1 \emptyset_2 \emptyset_3 \dots \emptyset_n \quad (22)$$

onde $\emptyset = 0$ é uma equação que descreve uma das superfícies do corpo, e n é o número de superfícies que definem o corpo que se deseja estudar.

Assim um conjunto de funções de base de 1ª espécie é definido, por exemplo, com segue:

$$f_j^1 = f_1 r^{m_j} z^{n_j} \quad (23)$$

onde, $j = 0, 1, 2, 3, \dots$, $m_j = 0, 2, 4, 6, \dots$ e $n_j = 0, 2, 4, 6, \dots$. Para esferóide prolato, $\emptyset_1 = 1 - r^2/a^2 - z^2/b^2$ e $f_1 = \emptyset_1$.

As funções de base de segunda espécie são definidas por (Beck et al., 1992):

$$f_j^{(2)} = f_j^{(1)} (\emptyset_1 H - 1) \quad (24)$$

onde:

$$H = \frac{\nabla f_j^{(1)} \cdot \nabla \phi_1}{f_j^{(1)} \cdot \nabla \phi_1 \cdot \nabla \phi_1} \Big|_{\phi_1=0} \quad (25)$$

Para algumas geometrias, como é o caso do esferóide prolato, as funções de base para condição de contorno de 2ª espécie podem ser definidas numa forma polinomial, como segue:

$$f_j^{(2)} = r^{m_j} \cdot z^{n_j} (B_1 r^2 + B_2 z^2 + B_3) \quad (26)$$

onde as constantes B_1 , B_2 e B_3 podem ser determinadas através da expressão $\nabla f_j^{(1)} \cdot \nabla \phi_1 = 0$, avaliada na fronteira do sólido. Com isso obtém-se:

$$B_1 = \left[\frac{-\left(\frac{m_j}{a^2} + \frac{n_j}{b^2}\right) \cdot \left(\frac{m_j}{a^2} + \frac{n_j+2}{b^2}\right) \frac{b^2}{a^2}}{\left(\frac{m_j}{a^2} + \frac{n_j+2}{b^2}\right) b^2 \cdot \left(\frac{m_j+2}{a^2} + \frac{n_j}{b^2}\right)} \right] \quad (27.a)$$

$$B_2 = \frac{-\left(\frac{m_j}{a^2} + \frac{n_j}{b^2}\right)}{\left[\left(\frac{m_j}{a^2} + \frac{n_j+2}{b^2}\right) b^2\right]} \quad (27.b)$$

$$B_3 = 1 \quad (27.c)$$

As funções de base de 3ª espécie são definidas por:

$$f_j^{(3)} = f_j^{(2)} \left(\phi_1 H - \frac{D}{h} \right) \quad (28)$$

onde,

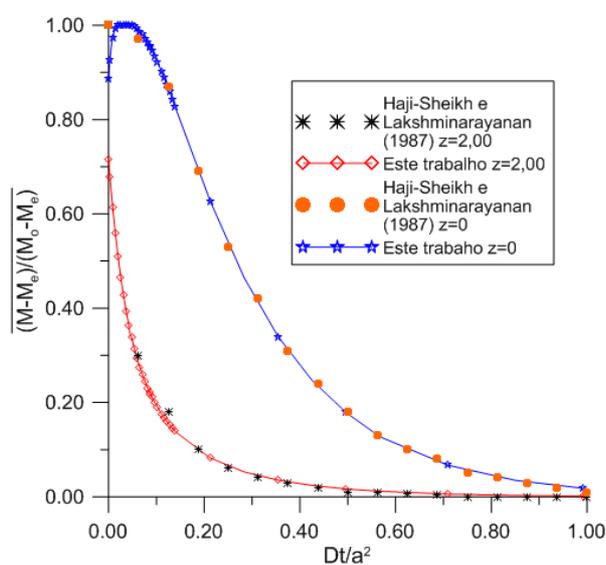
$$H = \frac{1}{\frac{\partial \phi_1}{\partial \vec{n}}} \quad (29)$$

Para simular a secagem de um sólido com geometria arbitrária (esferóide prolato), foi desenvolvido um código computacional na plataforma Mathematica[®], versão 7.0 (Wolfram, 2009). Todo o trabalho foi desenvolvido no Laboratório Computacional de Térmica e Fluidos, LCTF, da Unidade Acadêmica de Engenharia Mecânica do CCT/UFCG.

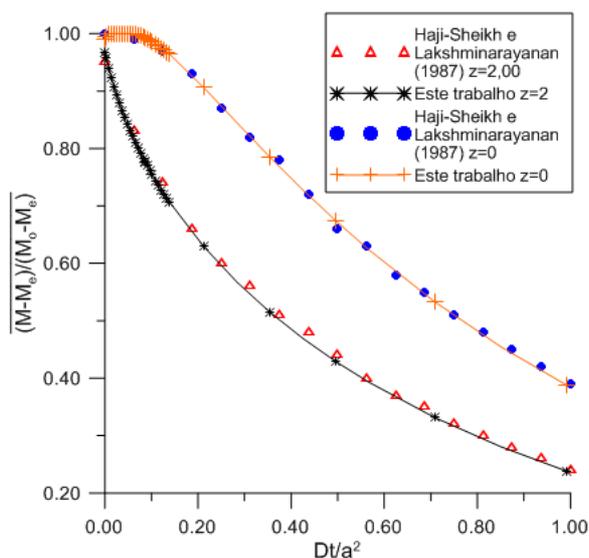
4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

As Figuras 2(a) e 2(b), utilizadas para validar a metodologia e os resultados obtidos no presente trabalho com dados da literatura, mostra a cinética de secagem do esferóide prolato de razão de aspecto $b/a = 2,00$ em dois pontos sobre a linha de simetria com coordenadas $z = 2,00$ e $z = 0$, obtida neste trabalho e comparada com resultados reportados por Haji-Sheikh e Lakshminarayanan (1987). Analisando as Figura 2, percebe-se uma boa concordância com os resultados nos dois casos

apresentados, comprovando assim, que este trabalho apresenta resultados coerentes.



(a)



(b)

Figura 2: Comparação entre os resultados do teor de umidade no centro de um esferóide com razão de aspecto de 2,00 para: (a) Biot 4,00 e (b) Biot = 0,50 sobre a linha de simetria ($r = 0$), obtidos neste trabalho e os reportados na literatura.

A Figura 3 mostra como se comporta o teor de umidade médio no interior do sólido ao se variar o número de Fourier ($Fo = Dt/a^2$) e o número de Biot ($Bi = ha/D$), para uma razão de aspecto igual a 2,00 (esferóide prolato). Analisando o gráfico percebe-se que para o mesmo número de Fourier, o teor de umidade adimensional

dependerá do número de Biot, sendo esse último inversamente proporcional ao teor de umidade. Assim quanto maior o número de Biot, menor será o teor de umidade adimensional, no interior do sólido, para um mesmo número de Fourier.

De acordo com a Figura 3, as maiores alterações nas curvas de secagem ocorrem para os primeiros números de Biot. Vale salientar que, ao se variar o número de Biot para valores acima de 2,00, as curvas de secagem passam a apresentar apenas pequenas variações em sua forma evidenciando que as mesmas apresentam cinéticas de secagem semelhantes. Esse fato se torna mais expressivo ao se analisar as curvas de secagem para números de Biot igual a 4,00 e 5,00; essa pequena variação na velocidade de secagem mostra que a cinética de secagem para um Biot igual a 5,00 já se aproxima do comportamento de secagem que teria para uma situação de Biot infinito. Assim, a partir desse ponto, esforços que visem aumentar a velocidade de secagem produziram alterações irrelevantes no teor de umidade do sólido.

Ainda observando a Figura 3, tem-se que para um $Bi=0,10$, a secagem ocorre de maneira muito lenta, sendo recomendada apenas para secagem de objetos frágeis, uma vez que se esses fossem submetidos a elevadas taxas de secagem (altos gradientes de concentração), seria induzido o surgimento de elevadas tensões térmicas, hídricas e mecânicas no interior do sólido o que, devido a sua fragilidade, poderia gerar o aparecimento de trincas ou distorções no produto vindo a comprometer a qualidade do produto final.

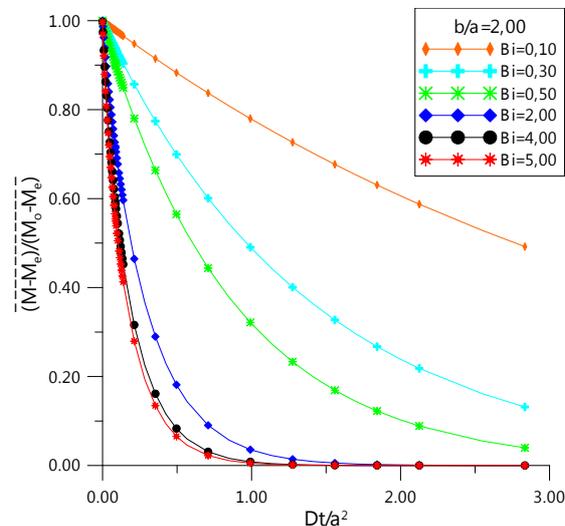


Figura 3: Teor de umidade médio adimensional em função do número de Fourier para vários números de Biot em um esferóide prolato com razão de aspecto $b/a=2,00$.

A Figura 4 mostra como se comporta o teor de umidade médio no interior do sólido ao se variar o número de Fourier e a razão de aspecto de um esferóide para um número de Biot igual a 4,00. Pelo gráfico percebe-se que para um mesmo número de Fourier, o teor de umidade adimensional no interior do sólido, varia para diferentes razões de aspectos, sendo as maiores taxa observadas para um esferóide

oblato de razão de aspecto 0,10. Isso confirma o fato de que a forma e/ou razão de aspecto apresenta influência direta na cinética de secagem, comportamento que está diretamente ligado a relação área/volume do sólido. Uma vez que o esferóide oblato apresenta maior relação área/volume, pode-se afirmar que quanto maior for a relação área/volume maior será a velocidade de secagem. Observação que está de acordo com trabalhos já existentes na literatura (Lima, 1999; Carmo, 2000; Farias, 2002).

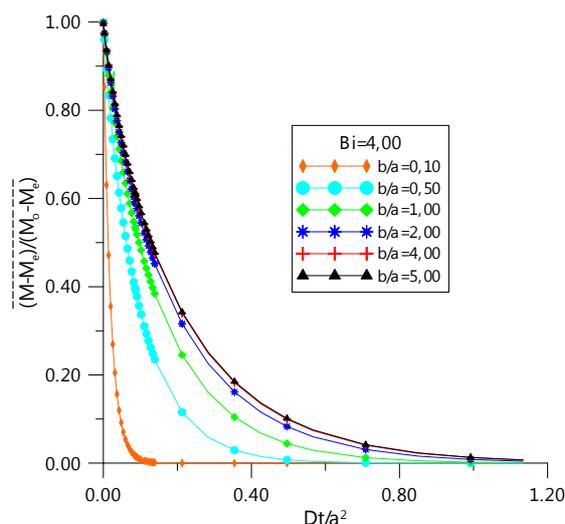


Figura 4: Teor de umidade médio em função do número de Fourier para várias razões de aspectos em esferóides para número de Biot=4,00.

Percebe-se ainda, na Figura 4, que as alterações nas razões de aspecto produzem alterações mais significativas nas curvas de secagem quando se está trabalhando com razões de aspecto menores que 1 (esferóide oblato). Também vale observar que as curvas para razões de aspecto de valores 4,00 e 5,00 são praticamente iguais, o que mostra que para razões de aspecto próximas a 5,00, o esferóide prolato apresenta um comportamento de secagem semelhante ao de um cilindro infinito.

Na Tabela 1 observa-se a área, o volume e a relação área/volume de vários esferóides para as razões de aspecto mostradas na Figura 4.

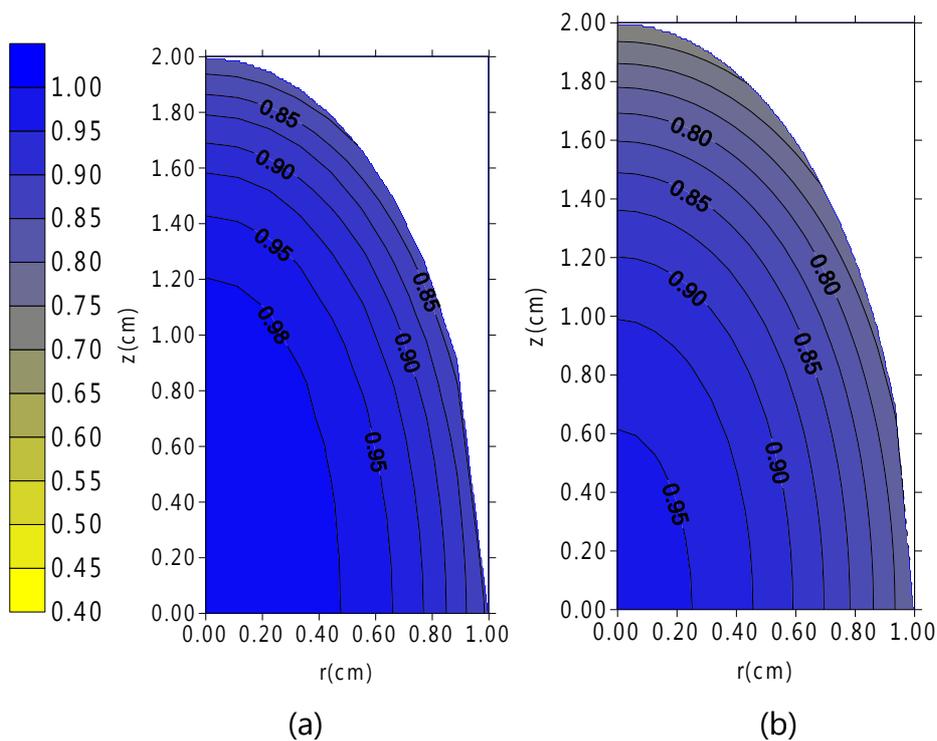
	a	b	V	S	S/V
Prolato	1,00	5,00	20,9440	50,1425	2,3965
	1,00	4,00	16,7552	40,4975	2,4170
	1,00	2,00	8,3776	21,4784	2,5638
Esfera	1,00	1,00	4,1888	12,5664	3,0000
Oblato	1,00	0,50	2,0944	8,6719	4,1405
	1,00	0,10	0,4189	6,4722	15,4505

Tabela 1: Volume, área e relação área/volume de esferóides para várias razões de aspectos, para $Bi=4,00$.

As Figuras 5 e 6 apresentam a distribuição do teor de umidade adimensional

dentro de um esferóide prolato com razão de aspecto $b/a=2,00$, para números de Biot igual 0,50 e 4,00, respectivamente, para alguns números de Fourier.

Observando as Figuras 5 e 6, pode-se verificar a existência de gradientes de concentração durante o processo de secagem e que os mesmos são maiores nos tempos iniciais para os dois números de Biot 0,50 e 4,00. Entretanto observa-se que esses gradientes de umidade são maiores no sólido que apresenta um maior número de Biot (Biot = 4,00), o que está de acordo com a Figura 3, uma vez que maiores gradientes de umidade terão por consequência uma maior movimentação de líquido no interior do sólido, fazendo com que o mesmo seque mais rápido do que um sólido que possui um número de Biot menor. Isto é ratificado ao se comparar a concentração de umidade no mesmo ponto em cada sólido para um mesmo Fourier. Ver-se que o sólido que possui um maior número de Biot apresenta uma concentração menor de umidade nesse ponto. Assim pode-se afirmar que o número de Biot exerce influência na cinética de secagem e que o mesmo é diretamente proporcional a velocidade de secagem.



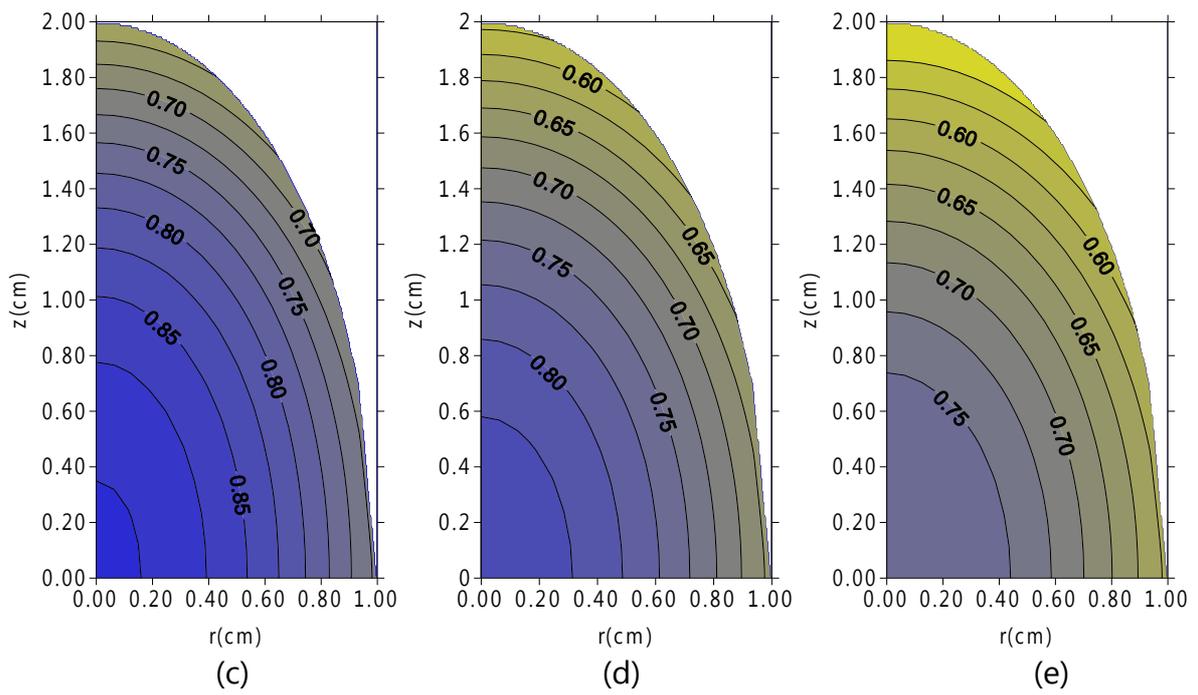
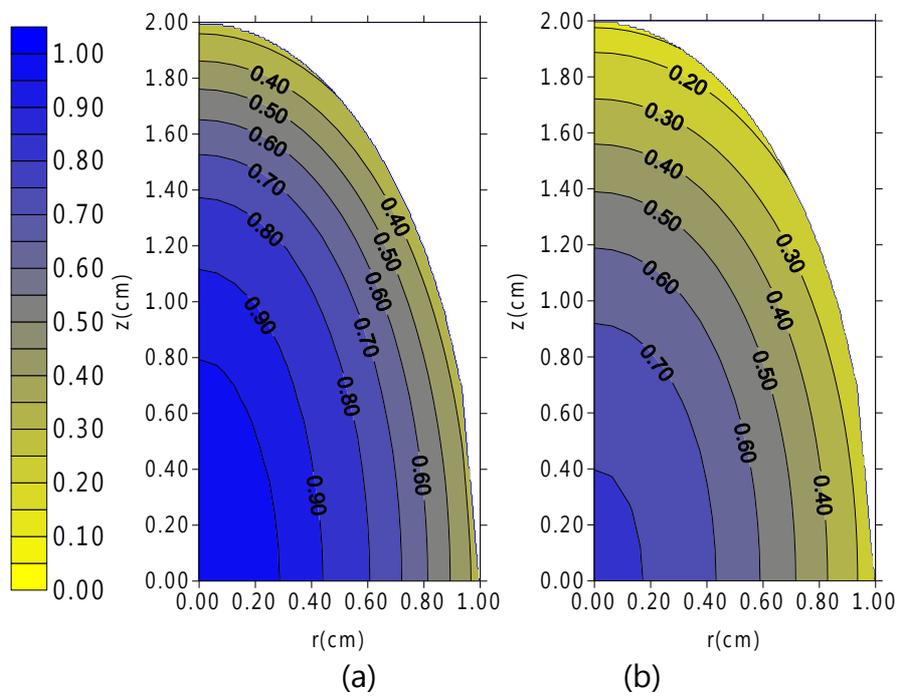


Figura 5 : Distribuição do teor de umidade adimensional no interior de um esferóide prolato para os tempos:

a) $Fo=0,0708617$, b) $Fo=0,141723$, c) $Fo= 0,212585$, d) $Fo= 0,283447$, e) $Fo= 0,354308$.



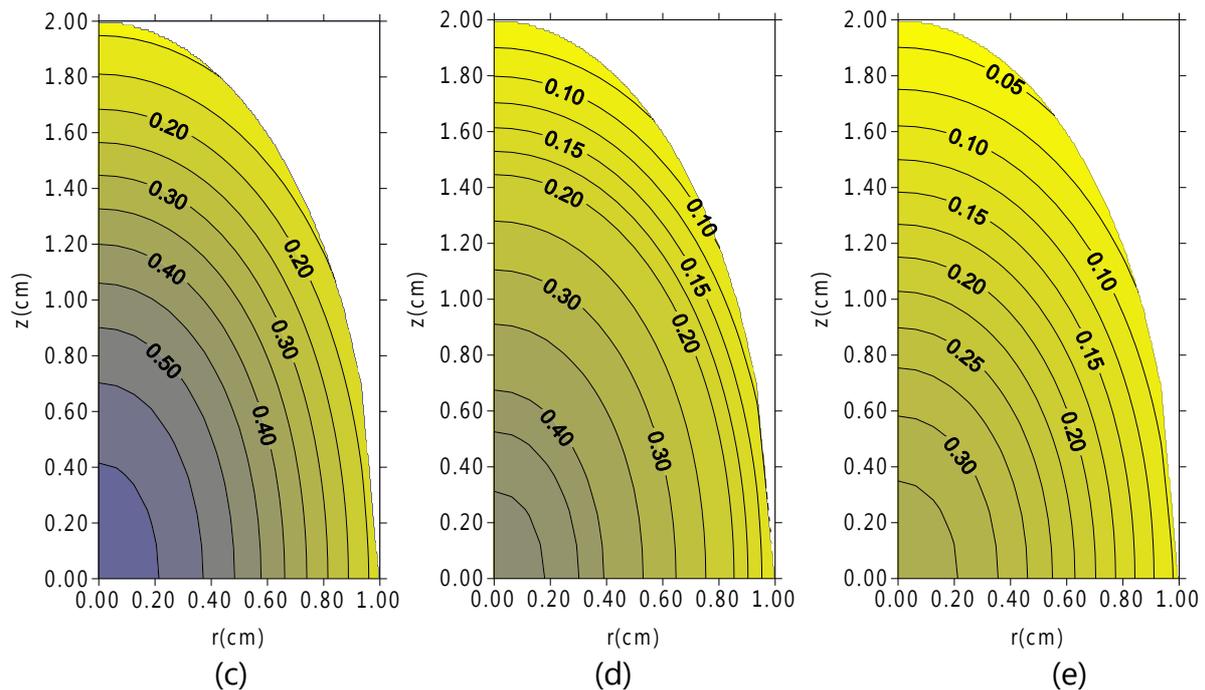


Figura 6: Distribuição do teor de umidade adimensional no interior de um esferóide prolato para os tempos:

a) $Fo = 0,0708617$, b) $Fo = 0,141723$, c) $Fo = 0,212585$, d) $Fo = 0,283447$, e) $Fo = 0,354308$.

Vale-se também salientar que, para ambos os casos ($Bi=0,50$ e $Bi=4,00$), os gradientes de concentração são maiores na direção do eixo radial, sendo menores no centro do sólido e máximo na superfície. Outro fenômeno presente em ambos os sólidos é o fato de os maiores gradientes de concentração ocorrerem em suas pontas, nas proximidades de $z=2,00$. Percebe-se que essa região é a que apresenta as menores concentrações de umidade para todos os tempos e em ambos os sólidos, assim, a mesma é a região que está submetida aos maiores gradientes de concentração. Assim, se por acaso a velocidade de secagem for tal que venha a provocar uma fratura ou um empenamento na peça, há uma grande probabilidade que tais efeitos ocorram nessa região da ponta. Por esse motivo vários autores fazem menção a esse efeito de ponta (Nascimento, 2002; Oliveira, 2001).

Pelas Figuras 5 e 6, observa-se a presença de linhas de iso-concentração, que tem a mesma forma do esferóide e também que as concentrações de umidade são maiores no interior do sólido assim evidenciando que a movimentação de líquido se dá de dentro pra fora do esferóide.

5 CONCLUSÕES

Após o término deste trabalho e análise dos resultados, chegou-se as seguintes conclusões:

- A modelagem matemática utilizada para a obtenção da solução analítica do problema foi adequada. Assim a mesma também é adequada para a obtenção

de solução para problemas transientes tais como resfriamento, aquecimento ou umidificação.

- Verificou que o número de Biot tem influência direta na cinética de secagem, sendo o mesmo diretamente proporcional a velocidade com a qual o processo ocorre.
- Verificou-se que a razão de aspecto exerce grande influência sobre a velocidade de secagem do sólido, uma vez que esse parâmetro está diretamente ligado a relação área/volume do corpo.
- Verificou-se que os maiores gradientes de umidade ocorrem na ponta do esferóide prolato, sendo essa região a mais afetada por tensões termo-hidro-mecânicas, assim estando mais susceptíveis ao surgimentos de defeitos, como trincas.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem a CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior), ao CNPq (Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico) e a Universidade Estadual da Paraíba pelo apoio financeiro.

REFERENCES

- Beck, J. V., Cole, K. D., Haji-Sheikh, A., e Litkouhi, B., *Heat conduction using green's functions*. Hemispheric Publishing Corporation, New York, USA, Chapter Ten: Galerkin-based green's functions and solutions, 293-334, 1992.
- Brooker, D. B., Bakker-Arkema, F. W., e Hall, C. W., *Drying and storage of grains and oilseeds*. New York: AVI Book, 450 p, 1992.
- Carlsaw, H. S.; Jaeger, J. C., *Conduction of heat in solids*. Oxford University Press, New York, USA, 1959.
- Carmo, J. E. F., *Difusão em sólidos esferoidais oblatos: modelagem e simulação*. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica). Universidade Federal da Paraíba, Campina Grande, PB. 2000.
- Crank, J., *The mathematics of diffusion*. Oxford Science Publications, New York, USA, 1992.
- Elvira, C., *The Diffusion process modelling in elliptic shaped bodies*. In: International Congress Engineering and Food. Proceedings... London, 1: 456-464, 1990.
- Farias, S. N., *Secagem de sólidos esferoidais usando o método de Galerkin*. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica). Universidade Federal de Campina Grande, Campina Grande, PB. 2002.
- Fortes, M. e Okos, M. R., *A non-equilibrium thermodynamics approach to transport phenomena in capillary porous media*. Transactions of the ASAE, 24: 756-760, 1981.
- Fortes, M., *Um estudo fundamental das equações de transporte de massa e energia em meios capilares porosos*. Tese (Livro Docência). Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, 1982.

- Gebhart, B., *Heat conduction and mass diffusion*, New York: McGraw-Hill, Inc., 1993.
- Haghighi, K., Irudayaraj, J., Strohshine, R. L. e Sokhansanj, S., *Grain kernel drying simulation using the finite element method*. Transaction of the ASAE, 33: 1957-1965, 1990.
- Haji-Sheikh, A. e Sparrow, E. M., *The solution of heat conduction problems by probability methods*. Transactions of the ASAE: Journal of Heat transfer, 89 series C, n. 2, May 1967.
- Haji-Sheikh, A. e Sparrow, E. M., *Transient heat conduction in a prolate spheroidal solid*. Transactions of the ASME: Journal of Heat Transfer, 88: 331-333, 1966.
- Haji-Sheikh, A. e Lakshminarayanan, R., *Integral Solution of Diffusion Equation: Part 2 – Boundary Conditions of Second and Third Kinds*. Journal of Heat Transfer. 109: 557 - 652, 1987.
- Kantorovich, L. V. e Krylov, V. I., *Approximate methods of higher analysis*. Advanced Calculus, Wiley, New York, USA, 1960.
- Key, R. B., *Drying: principles and practice*. Oxford: Pergamon Press, 1972.
- Lima, D. R., Farias, S. N., e Lima, A. G. B., *Mass transport in spheroids using the Galerkin method*. Brazilian Journal of Chemical Engineering, 21: 667-680, 2004.
- Lima, A. G. B., *Fenômeno de difusão em sólidos esferoidais prolatos. Estudo de caso: secagem de banana*. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica). Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP, 1999.
- Luikov, A. V., Mikhailov, Y. A., *Theory of energy and mass transfer*. Oxford: Pergamon Press Ltd., 1965.
- Luikov, A. V., *Analytical heat diffusion theory*. London, England: Academic Press, Inc. Ltd., 1968.
- Lu, R., Siebenmorgen, T. J., *Moisture diffusivity of long-grain in rice components*. Transactions of the ASAE, 35: 1955-1961, 1992.
- Menon, A. S., Mujumdar, A. S., *Drying of solids: principles, classification, and selection of dryers*. In: Mujumdar, A. S. Handbook of Industrial Drying. New York: Marcel Dekker Inc., Cap. 9, 295-326, 1987.
- Nascimento, J. J. S., *Fenômenos de difusão transiente em sólidos paralelepípedos. Estudo de caso: secagem de materiais cerâmicos*. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica). Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, PB, 2002.
- Niven, C., *On the conduction of heat in ellipsoids of revolution*. London, England: Philosophical transactions Royal Society, 1880.
- Norminton, E. J., Blackwell, J. H., *Transient heat flow from constant temperature spheroids and the thin circular disk*. The Quarterly Journal of Mechanics and applied mathematics, v. XVII, Part 1, 1964.
- Oliveira, V. A. B., *Difusão em sólidos esferoidais prolatos: uma solução analítica*. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica). Universidade Federal da Paraíba, Campina Grande, PB, 2001.

- Payne, F. R., Corduneanu, C. C., Haji-Sheikh, A. e Huang, T., *Integral methods in science and engineering*. Chapter: On solution of parabolic partial differential equations using Galerkin functions. Hemisphere Publishing Corporation, New York, USA, 1986.
- Sarker, N. N., Kunze, O. R., Stroubolis, T., *Finite element simulation of rough rice drying*. Drying Technology, 12: 761-775, 1994.
- Skelland, A. H. P., *Diffusional mass transfer*. New York: John Wiley & Sons, 1974.
- Smith, R. E., Nelson, G. L., *Transient heat transfer in solids: theory versus experiment*. Transactions of the ASAE, 12: 833-844, 1969.
- Smith, R. E., Nelson, G. L., Henrickson, R. L., *Analyses on transient heat transfer from anomalous shapes*. Transactions of the ASAE, 10: 236-245, 1967.
- Smith, R. E., Nelson, G. L., Henrickson, R. L., *Application of geometry analysis on anomalous shapes to problems in transient heat transfer*. Transactions of the ASAE, 11: 296-302, 1968.
- Sokhansanj, S., *Prediction of heat and mass transfer within a grain kernel – a finite element application*, In: International Drying Symposium (IDS'80), Montreal: Proceeding... Montreal, 2: 229-232, 1980.
- Wolfram, S., *The Mathematica® Book*. Cambridge University Press, New York, 2009.
- Wrobel, L. C., Brebbia, C. A., *A formulation of the boundary element method for axisymmetric transient heat conduction*. International Journal Heat and Mass Transfer, 24: 843-850, 1981.
- Zienkiewicz, O. C., Parekh, C. J., *Transient field problems: two-dimensional and three-dimensional analysis by isoparametric finite elements*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2: 61-71, 1970.