

## UN MÉTODO DE GALERKIN PARA LAS ECUACIONES DE AGUAS POCO PROFUNDAS

Bergallo, M.\* , Faure, O.†, Spies, R.\*\*

\*Fac. de Ing. Química de la U.N. del Litoral  
Santiago del Estero 2829, S3000AOM Santa Fe, Argentina  
e-mail: bergallo@math.unl.edu.ar

†Fac. Reg. de Concepción del Uruguay, UTN  
Fac. de Ing. Química de la U.N. del Litoral  
Ing. Pereira 676, E3264BTD, C. del Uruguay, Entre Ríos, Argentina  
e-mail: ofaure@frcu.utn.edu.ar

\*\*Instituto de Matemática Aplicada del Litoral (IMAL), CONICET  
Fac. de Ing. Química de la U.N. del Litoral  
Güemes 3450, S3000GLN, Santa Fe, Argentina  
e-mail: rspies@imalpde.ceride.gov.ar

**Palabras clave:** Ecuaciones de aguas poco profundas, método de Galerkin.

**Resumen.** *Consideramos las ecuaciones de aguas poco profundas en forma adimensional, sobre un dominio rectangular con condiciones de borde periódicas. Este sistema puede escribirse como*

$$\frac{\partial U}{\partial t} + A U + G(U) = F$$

*donde  $U = (u, v, z)^T$  siendo  $u$  y  $v$  las componentes del campo de velocidades y  $z$  la altura geopotencial,  $A$  es un operador lineal y  $G$  es una función no lineal que depende de  $U$  y de sus derivadas parciales. Los campos  $u, v$  y  $z$  se expanden en series de Fourier dobles y se descomponen en modos altos y bajos. La discretización temporal se basa en un esquema semi-implícito. Se analizan las condiciones de estabilidad de Courant-Friedrichs-Levy y se presentan resultados numéricos.*

## 1 INTRODUCCIÓN - LAS ECUACIONES DE AGUAS POCO PROFUNDAS

Las ecuaciones de Navier Stokes son utilizadas para modelar el comportamiento de un fluido Newtoniano incompresible en un cierto dominio  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  con una frontera suave  $\Gamma = \partial\Omega$ :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + (U \cdot \nabla)U + \nabla p - \nu \nabla^2 U = q, \quad \nabla \cdot U = 0.$$

donde  $U(x, y, z, t) = (u(x, y, z, t), v(x, y, z, t), w(x, y, z, t))$  y  $p = p(x, y, z, t)$  denotan el campo de velocidades y la presión, respectivamente y  $q$  representa las fuerzas externas que actúan sobre el sistema.

Las ecuaciones de aguas poco profundas (SW) se distinguen de las de Navier Stokes por tres razones fundamentales. En primer lugar, en las ecuaciones de Shallow Water se supone que la longitud de onda es mucho mayor que la profundidad del fluido y por lo tanto, la velocidad y aceleración verticales son despreciables y el fluido se torna casi horizontal. En segundo lugar, la ecuación de conservación de masa es diferente. En particular no se supone que el fluido sea incompresible por lo que los métodos proyectivos utilizados usualmente para aproximar las soluciones de las ecuaciones de Navier-Stokes no pueden utilizarse para las ecuaciones de SW. En tercer lugar, estas últimas ecuaciones toman en consideración el efecto de rotación de la tierra, a través de la inclusión de las fuerzas de Coriolis.

Con estas consideraciones e integrando en la tercera dimensión las ecuaciones de Navier Stokes, se obtienen las ecuaciones de aguas poco profundas bidimensionales cuya formulación puede escribirse de la siguiente manera:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + uu_x + vv_y - v + z_x - \nu_0 \Delta u = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + uv_x + vv_y + u + z_y - \nu_0 \Delta v = 0 \tag{2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} + uz_x + vz_y + (z_0 + z)(u_x + v_y) - \kappa_0 \Delta z = F \tag{3}$$

donde  $u$  y  $v$  son las componentes del campo de velocidades y  $z$  es la altura geopotencial. Los términos  $-v$  y  $u$  en la primera y segunda ecuación, respectivamente corresponden a las componentes de la fuerza de Coriolis. Las constantes  $\nu_0$  y  $\kappa_0$  son los coeficientes de difusión y  $F = F(x, y, t)$  es un término forzante que toma en consideración todas las fuentes externas que actúan sobre el sistema y deben ser tenidas en cuenta en la ley de conservación de masa. En nuestro caso supondremos un dominio periódico bidimensional  $\Omega = [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ .

Siguiendo los lineamientos descritos por Barros y Cárdenas en<sup>1</sup>, propondremos expansiones en series de Fourier bidimensionales truncadas para el campo de velocidades y la altura geopotencial, en la forma

$$U_N(x, y, t) = \begin{pmatrix} u_N(x, y, t) \\ v_N(x, y, t) \\ z_N(x, y, t) \end{pmatrix} = \sum_{-\frac{N}{2} \leq l} \sum_{k \leq \frac{N}{2} - 1} \begin{pmatrix} \hat{u}_{k,l}(t) \\ \hat{v}_{k,l}(t) \\ \hat{z}_{k,l}(t) \end{pmatrix} e^{i(kx+ly)} \tag{4}$$

## 2 DESCRIPCIÓN DEL MÉTODO

Una de las características distintivas de las ecuaciones de SW es el hecho de que presentan soluciones con componentes de frecuencias muy dispares. Por un lado se encuentran las ondas de baja frecuencia u ondas de Rossby y por otro lado las ondas de gravedad-inercia de altas frecuencias. Aunque estas últimas poseen muy baja energía, su presencia origina serios problemas de estabilidad en los esquemas de aproximación numérica explícitos. Por lo tanto es necesario que los métodos de aproximación utilizados sean implícitos.

A continuación, se considera un método de Galerkin, (ver por ejemplo <sup>2</sup> y <sup>3</sup>), en el que las funciones incógnitas  $u, v$ , y  $z$  del sistema (1) se aproximan por su proyección sobre el espacio de dimensión finita  $\mathbb{V}_N$  definido por

$$\mathbb{V}_N \doteq \left\{ \varphi \in L^2(\Omega) \mid \varphi(x, y) = \sum_{-\frac{N}{2} \leq l, k \leq \frac{N}{2}-1} \alpha_{k,l} \exp(i(kx + ly)) \right\} \quad (5)$$

donde  $\Omega = [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$  y  $\alpha_{k,l}(t)$  son funciones escalares de  $t$ . Es decir, se aproxima  $U = (u, v, z)^T$  en cada instante de tiempo  $t$ , mediante su proyección sobre  $\mathbb{V}_N$  dada por

$$U_N \doteq \sum_{-\frac{N}{2} \leq l, k \leq \frac{N}{2}-1} \hat{U}_{k,l}(t) \exp(i(kx + ly)) \quad (6)$$

donde  $\hat{U}_{k,l}(t)$  son los coeficientes de Fourier de  $U$  en el instante  $t$ .

En primer lugar, utilizando un esquema temporal de tipo “leap-frog”, se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} u^{n+1} - \delta_t v^{n+1} + \delta_t z_x^{n+1} - \nu_0 \delta_t \Delta u^{n+1} = \mathcal{L}_1 + \mathcal{N}_1 \\ v^{n+1} + \delta_t u^{n+1} + \delta_t z_y^{n+1} - \nu_0 \delta_t \Delta v^{n+1} = \mathcal{L}_2 + \mathcal{N}_2 \\ z^{n+1} + z_0 \delta_t (u_x^{n+1} + v_y^{n+1}) - \kappa_0 \delta_t \Delta z^{n+1} = \mathcal{L}_3 + \mathcal{N}_3 \end{cases} \quad (7)$$

donde  $\delta_t$  es el incremento temporal y las expresiones  $\mathcal{L}_i$  y  $\mathcal{N}_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , agrupan los términos lineales en el instante  $t_{n-1}$  y no lineales en el instante  $t_n$ , respectivamente. Concretamente, las mismas están dadas por

$$\begin{cases} \mathcal{L}_1 = u^{n-1} + \delta_t v^{n-1} - \delta_t z_x^{n-1} + \nu_0 \delta_t \Delta u^{n-1} \\ \mathcal{L}_2 = v^{n-1} - \delta_t u^{n-1} - \delta_t z_y^{n-1} + \nu_0 \delta_t \Delta v^{n-1} \\ \mathcal{L}_3 = z^{n-1} - \delta_t z_0 (u_x^{n-1} + v_y^{n-1}) + \kappa_0 \delta_t \Delta z^{n-1} \end{cases} \quad (8)$$

y

$$\begin{cases} \mathcal{N}_1 = -2\delta_t(u^n u_x^n + v^n u_y^n) \\ \mathcal{N}_2 = -2\delta_t(u^n v_x^n + v^n v_y^n) \\ \mathcal{N}_3 = -2\delta_t[(z^n u^n)_x + (z^n v^n)_y - F] \end{cases} \quad (9)$$

Dado que la implementación de este método requiere dos pasos iniciales, es necesario una técnica de un paso para poder calcular  $U_N$  en el instante  $t_1$ . Para ello se utiliza un esquema de tipo Euler con un paso de tiempo de menor orden al utilizado en el método principal.

De la definición de  $\mathbb{V}_N$ , puede verse claramente que si  $u$  y  $v$  están en  $\mathbb{V}_N$ , entonces el producto  $uv$  no está en  $\mathbb{V}_N$  sino en  $\mathbb{V}_{2N}$ . Por esta razón en (9) cuando se desea calcular la transformada de Fourier del producto de dos funciones, se utiliza el hecho que su transformada de Fourier se obtiene a partir de la convolución de las respectivas transformadas de cada función.

Al proyectar las ecuaciones (7) sobre  $\mathbb{V}_N$  y considerar una grilla rectangular como discretización de  $\Omega$ , resultan  $N^2$  sistemas de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas para cada nivel temporal, donde dichas incógnitas son justamente los modos  $\hat{U}_{k,l}(t)$ . Cada uno de ellos tiene la forma siguiente:

$$\begin{bmatrix} 1 + \nu_0 \delta_t (k^2 + l^2) & -\delta_t & ik\delta_t \\ \delta_t & 1 + \nu_0 \delta_t (k^2 + l^2) & il\delta_t \\ ikz_0 \delta_t & ilz_0 \delta_t & 1 + \kappa_0 \delta_t (k^2 + l^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u}_{k,l}^{n+1} \\ \hat{v}_{k,l}^{n+1} \\ \hat{z}_{k,l}^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{L}_1 + \mathcal{N}_1 \\ \mathcal{L}_2 + \mathcal{N}_2 \\ \mathcal{L}_3 + \mathcal{N}_3 \end{bmatrix}$$

### 3 EJEMPLO NUMÉRICO

Se consideran las siguientes condiciones iniciales

$$u(x, y, 0) = \frac{\sin y}{100\nu_0 z_0}$$

$$v(x, y, 0) = \frac{\sin y}{100z_0}$$

$$z(x, y, 0) = \frac{\cos y}{100\nu_0 z_0}$$

y término forzante dado por  $F(x, y) = \delta_r(x)\delta_r(y)$  (ver Fig. 1) donde

$$\delta_r(s) = \begin{cases} \frac{r}{2\pi} \{1 - \cos[r(s - \pi)]\} & \text{si } |s - \pi| \leq \pi/(1 + r) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

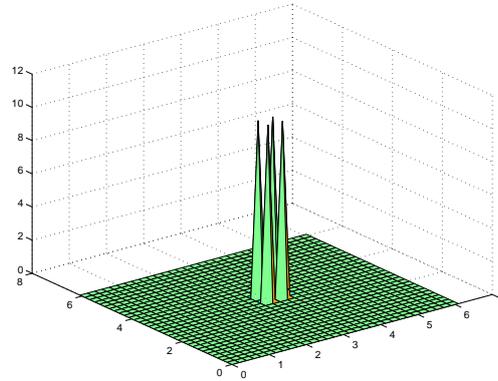


Figura 1: Término forzante

Para las constantes intervinientes se adoptaron los siguientes valores como en<sup>1</sup>:  $z_0 = 8, \nu_0 = \kappa_0 = 1/48$ .

En las Figuras 2 y 3, se exhiben las curvas de nivel de la altura geopotencial para un paso de tiempo  $\delta_t = 0.0075$ , diferentes instantes de tiempo y  $N = 32$ .

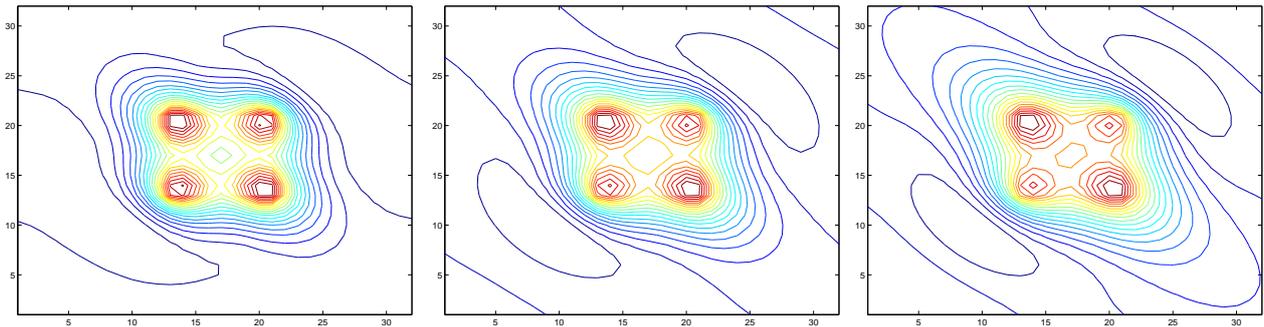


Figura 2: Curvas de nivel de  $z$  para  $n = 3000, 4500, 6000$ .

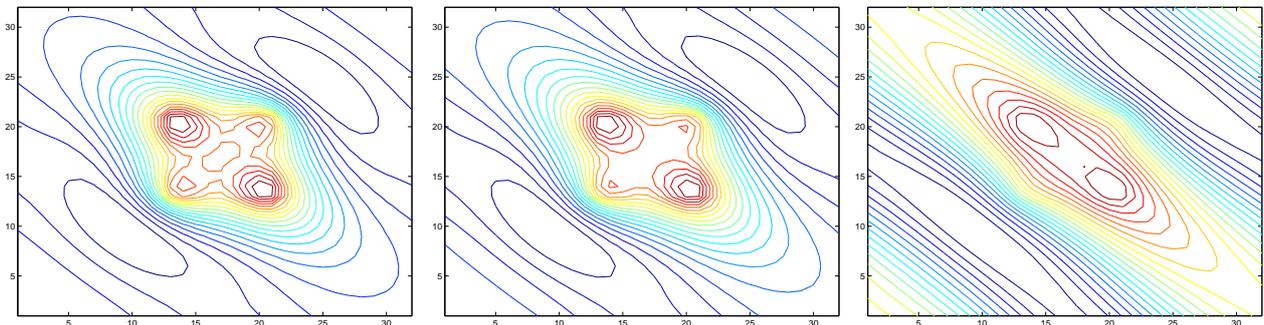


Figura 3: Curvas de nivel de  $z$  para  $n = 7500, 9000, 25500$ .

#### 4 CONDICIÓN DE ESTABILIDAD

Se presenta aquí un resultado sobre la estabilidad para el método descrito en las secciones anteriores. Para ello, se consideran separadamente el campo de velocidades  $W = (u, v)$  por un lado y la altura geopotencial  $z$  por otro. Se linealiza el sistema (7) proyectado sobre  $\mathbb{V}_N$  realizando una aproximación de los términos no lineales alrededor de un campo de velocidades constante  $U$ . Para cada instante de tiempo  $t_n$  este campo de velocidades se define como el promedio espacial  $U^n$  de  $W^n$ , es decir

$$U^n \doteq U(t_n) \doteq \frac{1}{m(\Omega)} \int_{\Omega} W^n(x, y) \, dx \, dy \doteq \frac{1}{m(\Omega)} \int_{\Omega} W(x, y, t_n) \, dx \, dy \quad (10)$$

Si se considera la norma definida por

$$\|W\|_0^2 = \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 \quad (11)$$

entonces se tiene el siguiente resultado (ver<sup>1</sup>):

**Proposición:** *Supongamos que  $\delta_t$  satisface la condición de Courant-Friedrichs-Levy, i.e.,*

$$\delta_t < \frac{1}{\sqrt{2}N|U|_{\infty}},$$

donde

$$|U|_{\infty} = \sup_{0 \leq t \leq T} |U(t)|.$$

Entonces existen dos constantes positivas  $C_1$  y  $C_2$  tales que

$$G^n \leq C_1 G^1 + C_2 T \|F_N\|_{L^2(\Omega)}^2$$

donde  $T$  es el tiempo final prefijado y  $G^n$  está dado por

$$G^n \doteq z_0 \|W_N^n\|_0^2 + z_0 \|W_N^{n-1}\|_0^2 + \|z_N^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|z_N^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

#### 5 CONCLUSIONES

En este artículo se consideraron las ecuaciones de aguas poco profundas en forma adimensional sobre un dominio rectangular con condiciones de borde periódicas. Se utilizaron series truncadas dobles de Fourier para expandir los campos de velocidades. Dichas series se descompusieron en modos altos y bajos. Se utilizó una discretización temporal basada en un esquema semi-implícito. Se presentaron resultados numéricos que ilustran la convergencia de los algoritmos así obtenidos. Finalmente se analizaron las condiciones de estabilidad de Courant-Friedrichs-Levy.

En la actualidad se está trabajando en la utilización de un algoritmo adaptativo con el objeto de mejorar la eficiencia del método utilizando un incremento temporal óptimo. Asimismo, con idéntico propósito, se está considerando la utilización de métodos no lineales, similares a los utilizados por Marion y Teman (ver<sup>3</sup>).

## REFERENCIAS

- [1] Barros, S. y Cardenas, J.W., “A Nonlinear Galerkin Method for the Shallow-Water equations on Periodic Domains”, *J. Comput. Phys.* **172**, 592, 2001.
- [2] Gottlieb, D. y Temam, R., “Implementation of the Nonlinear Galerkin Method with pseudospectral (collocation) discretization”, *Appl. Numer. Math.* **12**, 119, 1993.
- [3] Marion, M. y Temam, R., “Nonlinear Galerkin Methods”, *SIAM J. Num. Anal.* **26**, 1139, 1989.