

SOLUCION DE LAS ECUACIONES DE NAVIER-STOKES USANDO COLOCACION LOCAL DE FUNCIONES DE BASE RADIAL

Félix Movilla^a, Gail Gutiérrez^a y Jorge Guíñez^b

^a*Grupo de Investigación en Simulación y Control de Procesos, Universidad Popular del Cesar,
Campus Hurtado, Of. 205 Valledupar, Colombia, felixmovilla@unicesar.edu.co,
<http://www.unicesar.edu.co>*

^b*Centro de Investigación en Matemática Aplicada (CIMA). Universidad del Zulia, Av.
Universidad, No. 15C-169. Edificio FOBECA, Maracaibo, Venezuela, joguinez@hotmail.com,
<http://www.luz.edu.ve>*

Palabras Claves: Métodos "Meshless", Interpolación con Funciones de Base Radial, Ecuaciones diferenciales parciales, Solución Manufacturada.

Resumen. Este trabajo muestra una solución numérica de las Ecuaciones de Navier-Stokes (ENS) en formulación velocidad-vorticidad bidimensional, utilizando una estrategia Meshless basada en la colocación local de Funciones de Base Radial (FBR). Se analiza la eficiencia computacional del método mediante la verificación con soluciones exactas manufacturadas con y sin singularidades, obteniéndose un alto nivel de exactitud al recuperar dichas soluciones. Los resultados permiten orientar el método hacia la búsqueda de soluciones numéricas a problemas más complejos en la dinámica de fluidos.

1 INTRODUCCION

Las ecuaciones de Navier-Stokes ([Constantin and Foias, 1998](#); [Quartapelle, 1993](#); [Shell and You, 2002](#)) son un conjunto de Ecuaciones en Derivadas Parciales (EDP) no lineales que describen el movimiento de un fluido. Estas ecuaciones resultan de aplicar los principios de conservación de la mecánica y la termodinámica a un volumen de control. Para este conjunto de ecuaciones, no se dispone de un método analítico general que permita encontrar una solución exacta ([Nigro and Storti, 2005](#)), salvo ciertos tipos de flujo y situaciones muy concretas; por lo que en muchas ocasiones se ha de recurrir al análisis numérico para determinar una solución.

En razón a esto, el presente trabajo muestra un estudio analítico de las ENS, basado en una teoría matemática del análisis funcional y operacional ([Shell and You, 2002](#)), que permite proponer soluciones exactas manufacturadas ([Roache, 2002](#)), con el propósito de aportar a la verificación de estrategias numéricas que calculen soluciones aproximadas a este sistema de ecuaciones diferenciales. Vale decir que dichas soluciones tienen como propósito la verificación de la exactitud de códigos numéricos y no la modelación del fenómeno físico correspondiente.

Como elemento práctico del trabajo, se desarrolla una estrategia numérica denominada Método Meshless Basado en la Colocación Local de FBR ([Chantasiriwan, 2007](#); [Chinchapatnam et al. 2007](#); [Gutierrez and Florez, 2008](#)), estrategia que es implementada computacionalmente en un lenguaje de alto nivel.

2. LAS ECUACIONES DE NAVIER-STOKES

En general las leyes de conservación son modeladas por ecuaciones diferenciales parciales de la forma difusión-convección ([Knabner and Angermann, 2003](#))

$$\partial_t u - \nabla \cdot (K \nabla u - cu) = Q \quad (1)$$

donde K es un campo escalar, c representa la convección y Q es un campo que depende de u y contiene los términos fuentes. Enmarcadas en este modelo se encuentran las ENS, que en su formulación primitiva para un flujo viscoso e incompresible se expresa ([Shell and You, 2002](#); [Streeter et al., 2003](#))

$$\begin{aligned} \partial_t u + (u \cdot \nabla)u - \nu \Delta u + \nabla p &= f \\ \nabla \cdot u &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

Donde $u = u(x, t)$ es un campo vectorial que representa la velocidad del fluido en un punto $x \in \Omega$, en el instante t . El campo escalar $p = p(x, t)$ representa la presión, es obvio que se requiere que la presión p esté en un espacio donde el gradiente ∇p tenga sentido. Aquí no se le imponen condiciones a p . La función de entrada f representa un campo vectorial de fuerzas. Los coeficientes ν y ρ son constantes

positivas que representan la viscosidad cinética y la densidad del fluido, respectivamente.

Como se puede notar el sistema de ecuaciones dado en (1) es no lineal y desacoplado, hecho este que dificulta su tratamiento numérico y es pertinente desacoplarlo introduciendo el concepto de vorticidad w para un campo de velocidades u en una región abierta Ω de R^3 definida como $w = \nabla \times u$. Si $u = u(x, t)$ es una solución de (2) en Ω , entonces $\nabla \cdot w = 0$ y w es una solución de

$$\partial_t w - \nu \Delta w + (u \cdot \nabla)w - (w \cdot \nabla)u = \nabla \times f \quad (3)$$

Para una región abierta Ω de R^2 , la vorticidad es $w = D_1 u_2 - D_2 u_1$, siendo $D_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}$ y $D_2 = \frac{\partial}{\partial x_2}$. Luego la ecuación (3) asume la forma

$$\partial_t w - \nu \Delta w + (u \cdot \nabla)w = D_2 f_1 - D_1 f_2 \quad (4)$$

Si de la ecuación (4) eliminamos el término inercial y la consideramos en estado estacionario, obtenemos el problema armónico (Chantasiriwan, 2007; Young et al., 2004) que corresponde a un problema clásico conocido como Flujo Stokes en formulación velocidad – vorticidad

$$\begin{aligned} \Delta w &= f \\ \Delta u &= -\nabla \times w \end{aligned} \quad (5)$$

Es importante notar la relación dimensional entre el campo de velocidades y la vorticidad, pues el modelo de Navier-Stokes, independiente de la formulación, es válido en cualquier dimensión (Renardy and Rogers, 1993). Es así, por ejemplo, que cuando $u \in R^2$ se tiene que $w \in R$ y cuando $u \in R^4$ se tiene que $w \in R^6$.

No obstante que el sistema dado en (2) está desacoplado, es posible garantizar la existencia de una solución única, tal como lo establece el siguiente teorema

Teorema 1. Sea Ω un dominio abierto en R^d de clase C^2 . Entonces existe una constante $c > 0$ tal que, para todo $f \in H^2(\Omega) \cap V$ existen únicas funciones $u \in H^2(\Omega) \cap V$ y $p \in H^1(\Omega, R)$ que satisfacen el sistema Flujo Stokes en estado estacionario. Con $\int_{\Omega} p dx = 0$ y

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} + \|\nabla p\|_{L^2(\Omega)} \leq c \|f\|_{L^2(\Omega)} \quad (6)$$

Aquí los espacios V y H se definen

$$H \stackrel{\text{def}}{=} Cl_{L^2(\Omega)} Z_0^\infty(\Omega) \quad \text{y} \quad V \stackrel{\text{def}}{=} Cl_{H^1(\Omega)} Z_0^\infty(\Omega) \quad (7)$$

Z_0^∞ es una colección de campos vectoriales de divergencia nula y soporte compacto

en Ω .

3. LA ESTRATEGIA NUMÉRICA

El método de colocación local con FBR es una estrategia numérica "meshless" (Chantasiriwan, 2007; Chinchapatnam et al. 2007; Gutierrez and Florez, 2008), consistente en la interpolación con funciones de forma $\psi = \psi(r_j)$, donde $r_j = \|x - x_j\|$ es la norma Euclidea que determina la distancia entre un punto de entrada x y el centro x_j .

Las FBR más utilizadas son las mostradas en la tabla 1. Siendo m un número entero.

$r^{2m-2} \log r$	Placa Delgada Generalizada	TPS
$(r^2 + c^2)^{\frac{m}{2}}$	Multicuadrática Generalizada	MQ
$e^{-\beta r}$	Gaussiana Generalizada	GS

Tabla 1. Funciones de base radial

En un problema típico de interpolación con FBR se tienen N puntos en la data; $\{(x_j, F_j)\}_{j=1}^N$ que son asumidos como valores de alguna función desconocida F . Podemos resolver este problema asumiendo que la función desconocida es una combinación lineal de un conjunto de N funciones. Los coeficientes de la combinación lineal son obtenidos resolviendo un sistema lineal que resulta de forzar a la combinación lineal a tomar los valores dados en los N puntos, es decir

$$f(x) \cong \sum_{j=1}^N \lambda_j \psi(r_{ij}) + P_{m-1}(x) \quad x \in R^2, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (8)$$

en el sentido que

$$F(x_i) = \sum_{j=1}^N \lambda_j \psi(\|x_i - x_j\|) + P_{m-1}(x), \quad (9)$$

con la restricción

$$\sum_{j=1}^N \lambda_j P_k(x_j) = 0 \quad 1 \leq k \leq m - 1 \quad (10)$$

Aquí los números λ_j , $j = 1, \dots, N$, son coeficientes reales que serán determinados al resolver el sistema (10) y ψ es una FBR. P es un polinomio que, aunque no es estrictamente necesario, es adicionado para mejorar la exactitud de los resultados y aumentar la estabilidad en algunas FBR. Agregar este polinomio no puede ser arbitrario. Adicionar un polinomio de bajo grado permite a menudo garantizar la no singularidad de la matriz del sistema, por ejemplo, cuando se usa MQ, agregar un polinomio lineal asegura una matriz invertible (Liu and Gu, 2005; Young et al., 2004).

La interpolación del problema anterior conduce a la formulación matricial $Ax = b$ con

$$A = \begin{pmatrix} \psi & P_{m-1} \\ P_{m-1}^T & 0 \end{pmatrix} \quad (11)$$

$x^T = (\lambda, \beta)$, $b^T = (F, 0)$, β son los coeficientes del polinomio y A es una matriz no singular (Liu and Gu, 2005).

La Figura 1 muestra una distribución nodal uniforme para un cuadrado de longitud uno, identificándose dos tipos de moléculas computacionales de cuatro y ocho vecinos, tanto para nodos internos como para nodos en el borde.

Para el caso de la implementación computacional, la discretización se hace con ayuda de un software que existe en el mercado y que permite hacer la ubicación de los puntos de colocación y con ayuda de un programa adicional, que impone un criterio de conectividad entre los puntos vecinos, se construye la molécula computacional.

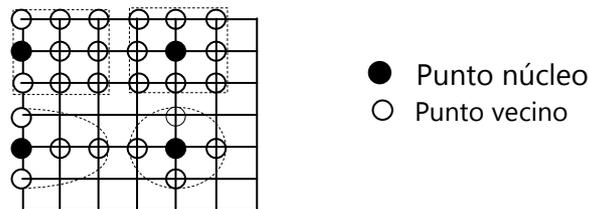


Figura 1. Molécula computacional

Para la interpolación se usó una función multicuadrática de la forma $\psi = (r^2 + c^2)^{\frac{1}{2}}$. La velocidad y la vorticidad son extendidas globalmente por la colocación de todos los puntos a lo largo del dominio y del borde como se indica a continuación.

$$\begin{aligned} u_1 &\approx \tilde{u}_1 = \sum_{j=1}^{NI+NB} \alpha_j \psi(\|x_i - x_j\|) \\ u_2 &\approx \tilde{u}_2 = \sum_{j=1}^{NI+NB} \beta_j \psi(\|x_i - x_j\|) \\ w &\approx \tilde{w} = \sum_{j=1}^{NI+NB} \gamma_j \psi(\|x_i - x_j\|) \end{aligned} \quad (12)$$

donde NI y NB son los números totales de puntos Ω y $\partial\Omega$ respectivamente y $\alpha_j, \beta_j, \gamma_j$ son los coeficientes de la FBR ψ que serán determinados al resolver el sistema de ecuaciones algebraico.

La discretización del sistema de ecuaciones dado en (5) queda expresado por

$$\Delta w^{k+1} = f$$

$$\begin{aligned}\Delta u_1^{k+1} &= -\frac{\partial w^k}{\partial x_2} \\ \Delta u_2^{k+1} &= \frac{\partial w^k}{\partial x_1} \\ w^k &= (\nabla \times u)^{k+1} \text{ en } \partial\Omega \\ u &= u_0 \text{ en } \partial\Omega\end{aligned}\tag{13}$$

Nótese que el procedimiento (Young et al., 2004) llevado a cabo para resolver el sistema (13) es el siguiente:

1. Se supone inicialmente un valor arbitrario para la vorticidad.
2. Se resuelven las ecuaciones de Poisson para las velocidades, calculando previamente las componentes de la vorticidad.
3. Se determinan las nuevas condiciones de borde para la vorticidad usando la definición de vorticidad.
4. Se resuelve la ecuación de Poisson para la vorticidad, calculando previamente las derivadas de la vorticidad en todos los puntos del dominio.
5. Se chequea la convergencia de las componentes de la vorticidad y de la velocidad en cada iteración, mediante el uso de un criterio de tolerancia.
6. Si el criterio de convergencia es satisfecho se detiene el proceso, en caso contrario la previa vorticidad es reemplazada por la nueva y se continúa con el paso dos.

Es muy importante notar que los coeficientes de la matriz A son fijos en todas las iteraciones del proceso y para todas las tres incógnitas del sistema, puesto que A solo depende del número de puntos de colocación. La matriz A , la cual resulta ser rala, es llenada mediante un proceso sistemático de la solución de los sistemas de ecuaciones que resultan de cada una de las moléculas computacionales. La solución del sistema grande es encontrada mediante la aplicación de un método iterativo ya existente en la literatura. Mas detalles sobre la implementación de métodos de colocación local con funciones de base radial pueden consultarse en la referencia Gutierrez, (2009).

4. IMPLEMENTACIÓN COMPUTACIONAL Y DISCUSIÓN DE RESULTADOS

A continuación se muestran dos ejemplos implementados en el código numérico que resuelve el sistema Stokes en formulación velocidad-vorticidad para un cuadrado unitario.

La figura 2 muestran los resultados obtenidos tomando 81x81 puntos de colocación, 8 vecinos y $c = 1$. La solución exacta, con condiciones de borde Dirichlet no homogénea es

$$u_1 = x_2(2x_2 - 1)(x_2 - 1)(2x_1 - 1)(x_1 - 1)^2$$

$$u_2 = -x_2^2(x_2 - 1)^2(3x_1 - 2)(x_1 - 1) \tag{14}$$

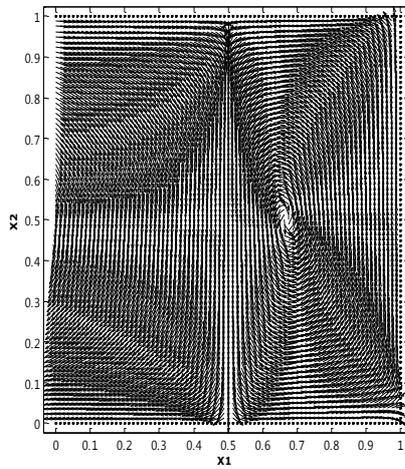


Figura 2. Campo de velocidades solución numérica sin

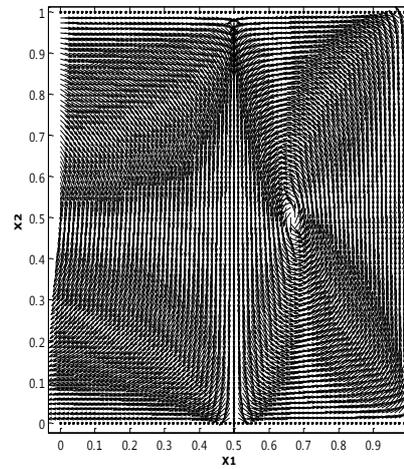


Figura 3. Campo de velocidades solución exacta sin singularidades

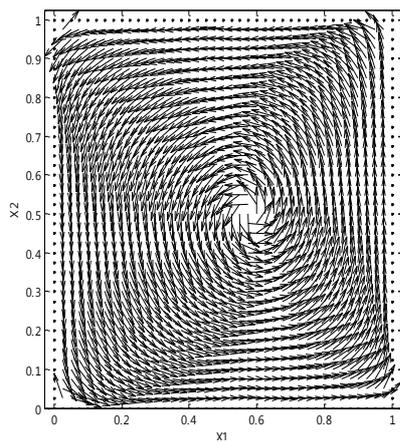


Figura 4. Campo de velocidades solución numérica con singularidades.

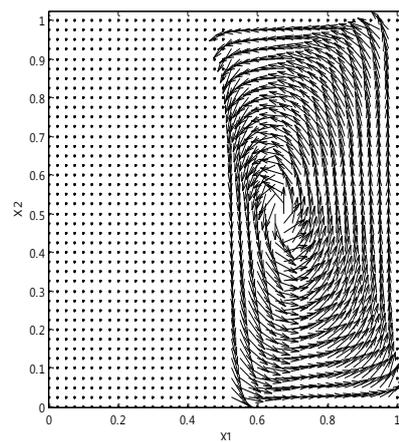


Figura 5. Campo de velocidades solución numérica con

La figura 4 muestra los resultados obtenidos al ejecutar el código numérico con 41x41 puntos de colocación, 4 vecinos y $c = 1$. La solución exacta con condiciones de borde homogéneas presenta discontinuidad en la componente vertical u_2 , aquí u representa la función escalón unitario.

$$\begin{aligned} u_1(x_1, x_2) &= x_2(2x_2 - 1)(x_2 - 1)(2x_1 - 1)(x_1 - 1)^2 u\left(x_1 - \frac{1}{2}\right) \\ u_2(x_1, x_2) &= -x_2^2(x_2 - 1)^2(3x_1 - 2)(x_1 - 1)u\left(x_1 - \frac{1}{2}\right) \end{aligned} \tag{15}$$

Como puede verse, la solución calculada se aleja sustancialmente de la solución exacta, no obstante se puede notar una aproximación importante cerca de la frontera derecha.

Vale decir que el código presenta dificultad para recuperar la solución exacta y evidencia problemas mayores en los lugares donde la solución es nula, lo cual hace pensar que existe una contaminación de la matriz del sistema que hace tomar valores al término homogéneo.

5. CONCLUSIONES

Los métodos de colocación local con FBR constituyen una estrategia numérica adecuada para la solución del Sistema Stokes, pues su eficiencia computacional y su alto nivel de exactitud al recuperar ciertas soluciones manufacturadas a si lo demuestran. No obstante las deficiencias encontradas en la recuperación soluciones exacta singulares, invitan a la realización de un estudio exhaustivo sobre las limitaciones del código, así como la formulación de otras funciones que pudieran presentar singularidades puntuales o diferenciabilidades locales.

Los resultados obtenidos en la presente investigación ponen de manifiesto hechos que sin duda alguna sirven para seguir orientando la búsqueda de soluciones numéricas a problemas más complejos en la dinámica de fluidos, en donde se tengan comportamientos singulares como discontinuidades o diferenciabilidades. Una posible solución al problema de la discontinuidad es la de aproximar en los lugares cerca de la discontinuidad con funciones de prueba de soporte compacto en el sentido de las distribuciones.

Agradecimientos. Los autores expresan sus agradecimientos al Centro de Investigación en Matemática Aplicada (CIMA) de LUZ y al Grupo de Investigación en Simulación y Control de Procesos (GISICO) que ejecuta el contrato No. 014 del 2008 en UNICESAR.

REFERENCIAS

- Chantasiriwan S. Solutions to Harmonic and Biharmonic Problems with Discontinuous Boundary Conditions by Collocation Methods Using Multiquadrics as Basis Function. *International Communications in Heat and Mass Transfer*, 34: 313 – 320, 2007.
- Constantin P. and Foias C. *Navier-Stokes Equations*. Lecture in Mathematics. Universidad Chicago Press, Chicago. 1998.
- Chinchapatnam P., Djidjeli K. and Prasanth B. RBF meshless method for the steady. incompressible Navier–Stokes equations. *International Journal of Computer Mathematics*, 84:1509-1526, 2007.
- Gutierrez G. *Meshless local radial basis function collocation methods for solving transport equations*. Ph.D Thesis. Univ. Pontificia Bolivariana. Colombia. 2009
- Gutierrez G. and Florez W. Comparison Between Global, Classical Domain Decomposition, Local, Single and Double Collocation Methods based on RBF Interpolation for solving convection-Diffusion Equation. *International Journal of*

- Modern Physics C*, 19: 1737-1751. 2008.
- Knabner P. and Angermann L. *Numerical Methods for Elliptic and Parabolic Partial Differential Equations*. Texts in Applied Mathematics. New York: Springer-Verlag. 2003.
- Liu G.R. and Gu Y.T. *An Introduction to Meshfree Methods and their Programming*. New York: Springer-Verlag. 2005.
- Mijailov V. P. *Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales*. Editorial MIR. Moscú. (1982).
- Nigro N. and Storti M. *Métodos Numéricos en Fenómenos de Transporte*. Centro Internacional de Métodos Computacionales en Ingeniería. 2005.
- Quartapelle L. *Numerical Solution of the incompressible Navier-Stokes Equations*. Birkhäuser Verlag. Berlin. 1993.
- Renardy M. and Rogers R. *Introduction to Partial Differential Equations*. Texts in Applied Mathematical. New York: Springer – Verlag. 1993.
- Roache P. Code Verification by the Method of Manufactured Solutions. *Journal of Fluids Engineering*, 124: 7-10, 2002.
- Shell G. and You Y. *Dynamics of Evolutionary Equations*. Applied Mathematical Sciences. New York: Springer – Verlag. 2002.
- Streeter V., Wylie B. and Bedford K. *Mecánica de Fluidos*. McGraw-Hill. Edición 9. Bogotá. Colombia. 2003.
- Young D., Jane S., Lin C., Chiu K. and Chen C. Solutions of 2D and 3D Stokes laws using multiquadrics method. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 28: 1233–1243, 2004.