

## MÉTODO DE ESTABILIZAÇÃO SUBMALHA DIFUSÃO DINÂMICA APLICADO NA SIMULAÇÃO DE ESCOAMENTO MISCÍVEL

Suzi L. Werner<sup>a</sup>, Lucia Catabriga<sup>a</sup> e Isaac P. Santos<sup>a,b</sup>

<sup>a</sup>Laboratório de Computação de Alto Desempenho, Universidade Federal do Espírito Santo,  
suzilara@gmail.com e luciac@lcad.inf.ufes.br, <http://www.lcad.inf.ufes.br>

<sup>b</sup>Centro Universitário Norte do Espírito Santo, Universidade Federal do Espírito Santo,  
isaac@ceunes.ufes.br, <http://www.ceunes.ufes.br>

**Palavras-Chaves:** Difusão Dinâmica, Elementos Finitos, escoamento em meios porosos.

**Resumo.** Este trabalho apresenta uma implementação do método de elementos finitos para resolver o problema de escoamento miscível em um reservatório de petróleo usando o método de estabilização submalha Difusão Dinâmica na equação de concentração. Este método é uma metodologia para resolver problemas de transporte predominantemente convectivos, baseada em uma decomposição multi-escala da variável de interesse e do campo de velocidade em escalas resolvidas e não-resolvidas. Um operador dissipativo não linear é adicionado à formulação clássica do método de Galerkin adicionando uma viscosidade artificial em todas as escalas da discretização. A quantidade de viscosidade é determinada pela solução da escala resolvida a nível do elemento conduzindo a metodologia a procedimento alto adaptativo e livre de parâmetro. A pressão é determinada pelo método de Galerkin padrão e para o campo de velocidade é considerado uma técnica de pós-processamento. Para validar a metodologia adotada são analisados um problema de injeção de traçadores e um problema de injeção contínua bidimensional, sendo realizadas comparações com a formulação estabilizada SUPG com CAU.

## 1 INTRODUÇÃO

A simulação computacional de escoamento de fluidos em meios porosos é de grande interesse para estudos em diversas áreas, tais como: exploração de petróleo, contaminação de lençóis freáticos, extração de águas subterrâneas, entre outros. Torna-se cada vez mais necessário que os resultados obtidos nessas simulações tenham grande precisão e representem uma solução fisicamente real.

O modelo matemático do escoamento miscível em um meio poroso pode ser descrito por um sistema de equações diferenciais, originadas da Lei de Conservação da mistura, da Lei de Darcy e de uma equação de advecção-convecção predominantemente convectiva expressando a conservação do fluido injetado (Peaceman, 1986). As grandezas físicas de interesse são pressão, velocidade e concentração da mistura. Em geral o método de Galerkin é empregado para a aproximação da equação da pressão e em seguida a velocidade é calculada através da lei de Darcy. A obtenção do campo de velocidade requer um cuidado especial uma vez que seu cálculo influencia o cálculo da concentração da mistura. Técnicas de pós-processamento para recuperação de campos de velocidades mais precisos consistindo em primeiro resolver a equação da pressão e posteriormente computar uma aproximação para a velocidade considerando uma forma residual da lei de Darcy com a pressão conhecida, combinada com a equação de balanço de massa foram desenvolvidas por Malta et al. (1995, 1998); Loula et al. (1999); Malta et al. (2000). Este procedimento fornece melhores taxas de convergência na aproximação de soluções regulares, com ganho de precisão.

Na equação da concentração podem ocorrer fenômenos de propagação de frente de concentração do fluido, gerando regiões de fortes gradientes de concentração em várias partes da malha. Este fenômeno traz dificuldades numéricas que podem resultar em perda de exatidão da solução, estimativa imprecisa do tempo de chegada do fluido injetado, e conseqüentemente influencia na recuperação do óleo. Formulações estabilizadas vem sendo aplicadas já que o deslocamento é predominantemente convectivo. A formulação *Streamline Upwind Petrov Galerkin* (SUPG) (Brooks e Hughes, 1982) enriquecida com o operador de captura de descontinuidade, denominado *Consistent Approximate Upwind* (CAU) (Galeão e do Carmo, 1988) vem sendo utilizada com sucesso na equação da concentração Ney (2002); Coutinho e Alves (1999); Barbosa et al. (2009).

Recentemente, o método de estabilização submalha Difusão Dinâmica (DD) foi introduzido por Arruda et al. (2010). O método DD é um método com duas escalas para problemas de transporte que adiciona a formulação de Galerkin um operador dissipativo não-linear agindo isotropicamente em todas as escalas. A quantidade de difusão artificial é determinada pela solução na escala resolvida a nível do elemento, sendo portanto um método auto-adaptativo e livre de parâmetros de estabilização.

Neste trabalho introduzimos o método de estabilização submalha Difusão Dinâmica (DD) no problema de escoamento miscível de fluido incompressível em meios porosos aplicado a equação da concentração. Empregamos uma formulação semi-discreta estabilizada do método dos elementos finitos (Brooks e Hughes, 1982), onde a equação da pressão é resolvida pela formulação clássica de Galerkin, a velocidade é calculada utilizando a estratégia de pós-processamento introduzida por Malta et al. (1995) e na equação da concentração aplicamos o método submalha DD. Os experimentos foram realizados para duas classes de problemas: injeção de traçadores e injeção contínua. Os resultados obtidos com o método de estabilização Difusão Dinâmica são comparados com os resultados obtidos pelo método SUPG+CAU.

O restante deste trabalho está organizado como a seguir. O modelo matemático do problema

e suas peculiaridades são apresentados na Seção 2. A formulação variacional semi-discreta da pressão, da velocidade com pós-processamento e da concentração com SUPG+CAU são descritas na seção 3. Na Seção 4, apresentamos a formulação variacional semi-discreta para equação da concentração utilizando o método de estabilização Difusão Dinâmica. Na Seção 5 estão os experimentos numéricos realizados para validar a formulação estabilizada adotada e na última seção apresentamos as principais conclusões.

## 2 MODELO MATEMÁTICO DO PROBLEMA

O modelo matemático que governa o escoamento de fluido miscível incompressível em meios porosos é formado pela equação da pressão, lei de Darcy e equação da concentração. Essas equações formam um sistema não linear, fortemente acoplado, com característica elíptica, que é descrito por

$$\nabla \cdot (A(c)\nabla p) + q = 0 \quad \text{em } \Omega \times [0, T]; \quad (1)$$

$$v = -A(c)\nabla p \quad \text{em } \Omega \times [0, T]; \quad (2)$$

$$\phi \frac{\partial c}{\partial t} + v \cdot \nabla c - \nabla \cdot (\mathbf{D}(v)\nabla c) = 0 \quad \text{em } \Omega \times [0, T], \quad (3)$$

com condições de contorno

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} &= 0 \quad \text{em } \Gamma_n, \forall t \in [0, T]; \\ \mathbf{D}(v)\nabla c \cdot \mathbf{n} &= 0 \quad \text{em } \Gamma_n; \\ c(x, t) &= \tilde{c} \quad \text{em } \Gamma_i \end{aligned} \quad (4)$$

e condições iniciais

$$\begin{aligned} p(x, 0) &= p_0 \quad \text{em } \Omega; \\ c(x, 0) &= c_0(x) \quad \text{em } \Omega; \\ v(x, 0) &= 0 \quad \text{em } \Omega. \end{aligned} \quad (5)$$

Neste modelo,  $v$  é a velocidade de Darcy,  $p$  é a pressão do fluido,  $q$  representa os termos de fonte e sumidouro,  $\phi$  é a porosidade do meio,  $c$  é a concentração da mistura dos fluidos,  $\mathbf{n}$  é o vetor normal à fronteira  $\Gamma$  do domínio  $\Omega$  e  $\Gamma_n$  e  $\Gamma_i$  são partes do contorno de  $\Omega$ . O tensor  $A(c)$  é dado por

$$A(c) = \frac{1}{\mu(c)} \mathbf{K}, \quad (6)$$

onde  $\mathbf{K}$  é o tensor de permeabilidade e  $\mu(c)$  é a viscosidade da mistura. A viscosidade  $\mu(c)$  apresenta um comportamento não linear, tornando o modelo bastante acoplado. O comportamento dessa viscosidade pode ser obtida por leis empíricas, como por exemplo a equação apresentada por Young (1981):

$$\mu(c) = (1 - c + M^{0,25}c)^{-4} \mu_r, \quad (7)$$

onde  $c$  é a concentração,  $M$  a mobilidade e  $\mu_r$  a viscosidade do fluido residente. A mobilidade é dada pela razão entre a viscosidade do fluido residente ( $\mu_r$ ) e a viscosidade do fluido deslocante ( $\mu_d$ ),

$$M = \frac{\mu_r}{\mu_d}. \quad (8)$$

Quando  $M > 1$  os efeitos convectivos e da não linearidade do modelo podem resultar em instabilizações na solução numérica. Quanto maior o valor de  $M$ , maior o acoplamento do sistema [referencia]. O tensor de difusão-dispersão  $\mathbf{D}(v)$  é dado por

$$\mathbf{D}(v) = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix}, \quad (9)$$

onde

$$\begin{aligned} d_{11} &= \frac{1}{|v|}(\alpha_m|v| + \alpha_t|v|^2 + (\alpha_l - \alpha_t)v_x v_x); \\ d_{12} &= \frac{1}{|v|}(\alpha_l - \alpha_t)v_x v_y; \\ d_{21} &= \frac{1}{|v|}(\alpha_l - \alpha_t)v_x v_y; \\ d_{22} &= \frac{1}{|v|}(\alpha_m|v| + \alpha_t|v|^2 + (\alpha_l - \alpha_t)v_y v_y), \end{aligned}$$

sendo  $v_i$  a velocidade do componente  $i$  na fase e  $(\alpha_m)$ ,  $(\alpha_t)$ ,  $(\alpha_l)$  os coeficientes de difusão molecular, de dispersão transversal e de dispersão longitudinal, respectivamente, conforme considerado em Ney (2002). O deslocamento miscível é caracterizado tanto pelo processo de difusão, quanto pelo de dispersão. A difusão é governada pela Lei de Fick e a dispersão é obitida pela lei de dispersão (Barbosa (2009)). Normalmente a dispersão é uma grandeza fisicamente mais importante que a difusão molecular e geralmente  $\alpha_l > \alpha_t$  (Malta e Loula (1998)).

### 3 FORMULAÇÃO NUMÉRICA POR ELEMENTOS FINITOS

Utilizamos uma formulação variacional estabilizada semi-discreta, que consiste em uma discretização de elementos finitos no espaço e uma discretização de diferenças finitas no tempo. A Equação (1) da pressão é resolvida via método de Galerkin padrão, pois apresenta um comportamento predominantemente difusivo. A formulação de Galerkin para esta equação é dada por

$$\int_{\Omega} \nabla w_p^h A(c^h) \nabla p^h d\Omega = \int_{\Omega} w_p^h q d\Omega, \quad (10)$$

onde  $w_p^h$  é a função peso para a pressão,  $c^h$  e  $p^h$  são as aproximações de  $c$  e  $p$ , respectivamente. Para a Equação (2) da velocidade usamos a formulação clássica de Galerkin juntamente com o esquema de pós-processamento apresentado por Malta et al. (1998). A utilização dessa técnica é necessária, pois todas as grandezas envolvidas no processo de solução do problema devem ter a mesma ordem de precisão. A formulação de Galerkin com a técnica de pós-processamento para a equação da velocidade é dada por

$$\int_{\Omega} \mathbf{w}^h \cdot (A(c^h)^{-1} \mathbf{v}^h + \nabla p^h) d\Omega + \sum_{e=1}^{nel} \delta_{pp}^e \int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{w}^h (\nabla \cdot \mathbf{v}^h - q) = 0 \quad (11)$$

onde  $\mathbf{w}^h$  é a função peso para a velocidade,  $nel$  é o número de elementos da malha e  $\delta_{pp}^e = M^{\frac{1}{2}} \frac{h^e}{2}$ .

Como a equação de concentração é predominantemente convectiva, é necessário recorrer aos métodos estabilizados para se obter bons resultados. O método SUPG (Stream-line Upwind

Petrov Galerkin) (Brooks e Hughes (1982)) com CAU (Consistent Approximate Upwind) (Galeão e do Carmo (1988)) é uma formulação bastante utilizada neste tipo e problema. O método SUPG acrescenta uma difusão artificial, ponderada pelo resíduo da equação a nível de elemento, na direção do escoamento. Quando as vizinhanças das regiões com alto gradiente são suscetíveis de soluções descontínuas, a formulação SUPG isolada não consegue evitar tais oscilações; assim, é necessário suavizar a solução nessas regiões através de um operador de captura de discontinuidades, como o operador CAU. A formulação de Galerkin, juntamente com o SUPG e CAU para a equação da concentração é dada por

$$\begin{aligned}
 & \underbrace{\int_{\Omega} w^h \phi \frac{\partial c^h}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega} w^h \mathbf{v}^h \cdot \nabla c^h d\Omega + \int_{\Omega} \nabla w^h \cdot \mathbf{D} \nabla c^h d\Omega}_{\text{GALERKIN}} + \\
 & \underbrace{\sum_{e=1}^{nel} \tau^e \left( \int_{\Omega^e} \mathbf{v}^h \cdot \nabla w^h \phi \frac{\partial c^h}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega^e} \mathbf{v}^h \cdot \nabla w^h \mathbf{v}^h \cdot \nabla c^h d\Omega - \int_{\Omega^e} \nabla(\mathbf{v}^h \cdot \nabla w^h) \cdot \mathbf{D} \nabla c^h d\Omega \right)}_{\text{PETROV-GALERKIN}} \\
 & + \underbrace{\sum_{e=1}^{nel} \int_{\Omega^e} \delta_{cau}^e \nabla w^h \nabla c^h d\Omega}_{\text{CAU}} = 0 \quad (12)
 \end{aligned}$$

onde  $w^h$  é a função peso para a concentração. O parâmetro de estabilização SUPG é calculado conforme a equação

$$\tau^e = \frac{1}{2\|\mathbf{v}\|} h^e \min\left(\frac{Pe}{3}, 1.0\right),$$

com  $h = \sqrt{2A^e}$  e  $Pe$  o número de Peclet dado por

$$Pe = \frac{1}{2} h \frac{\|\mathbf{v}\|^3}{(\mathbf{v})^T \mathbf{D}(\mathbf{v})}.$$

O parâmetro de estabilização do método CAU  $\delta^e$  pode ser definido como em (Coutinho et al. (2004); Ney (2002)):

$$\delta_{cau}^e = \frac{1}{2} h \min\left(\frac{Pe_p}{3}, 0.7\right) \frac{|L(c^h)|}{\|\nabla c^h\|}$$

$$Pe_p = \frac{1}{2} h^e \frac{\|\mathbf{v}_p\|^3}{(\mathbf{v}_p^T) \mathbf{D}(\mathbf{v}_p)}$$

$$\mathbf{v}_p = \frac{\mathbf{v} \cdot \nabla c^h}{\|\nabla c^h\|^2} \nabla c^h$$

onde  $Pe_p$  é o número de Peclet correspondente a  $\mathbf{v}_p^h$ , que é a velocidade projetada na direção paralela ao gradiente da solução  $\nabla c^h$  e

$$L(c^h) = \left(\phi \frac{\partial c^h}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla c^h - \nabla \cdot (\mathbf{D}(\mathbf{v}) \nabla c^h)\right).$$

Neste trabalho comparamos a performance do esquema SUPG+CAU com o método Difusão Dinâmica (DD) na estabilização da equação de concentração. O método DD é apresentado na próxima seção. As Equações (10), (11) e (12) conduzem a um conjunto de Equações Diferenciais Ordinárias Não Lineares, dadas por

$$\mathbf{K}\mathbf{p} = \mathbf{Q}; \quad (13)$$

$$\bar{\mathbf{M}}\mathbf{v} = \mathbf{F}; \quad (14)$$

e

$$\tilde{\mathbf{M}}\mathbf{a} + \tilde{\mathbf{C}}\mathbf{c} = 0; \quad (15)$$

em que (13), (14) e (15) estão associadas às equações da pressão, velocidade e concentração, respectivamente, sendo  $\mathbf{p}$  o vetor de incógnita das pressões,  $\mathbf{v}$  o vetor de incógnita das velocidades,  $\mathbf{c}$  o vetor de incógnita das concentrações e  $\mathbf{a} = \frac{\partial \mathbf{c}}{\partial t}$  o vetor que contém os valores da derivada de  $\mathbf{c}$ . Como as matrizes  $\mathbf{K}$ ,  $\bar{\mathbf{M}}$ ,  $\tilde{\mathbf{M}}$  e  $\tilde{\mathbf{C}}$  possuem esparsidade aleatória, utilizamos a estratégia elemento-por-elemento (EBE).

A discretização temporal é feita por diferenças finitas. Utilizamos o método Preditor/Multicorretor que é amplamente adotado na resolução de problemas de escoamento (Coutinho e Alves (1999, 1996); Dias (2001); Mendonça (2003); Ney (2002)). O algoritmo pode se resumido nas seguintes etapas:

**Bloco 1:** Resolve a equação da pressão

$$\mathbf{K}(\mathbf{c}_{n+1}^i) \mathbf{p}_{n+1}^{i+1} = \mathbf{Q}_{n+1} \quad (16)$$

**Bloco 2:** Calcula o campo de velocidade

$$\bar{\mathbf{M}}(\mathbf{c}_{n+1}^i) \mathbf{v}_{n+1}^{i+1} = \mathbf{F}(\mathbf{p}_{n+1}^{i+1}) \quad (17)$$

**Bloco 3:** Resolve a equação da concentração

$$\mathbf{M}_{n+1}^* \Delta \dot{\mathbf{c}}_{n+1}^{i+1} = \mathbf{G}(\mathbf{p}_{n+1}^{i+1}, \mathbf{v}_{n+1}^{i+1}, \mathbf{c}_{n+1}^i)_{n+1} \quad (18)$$

com

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_{n+1}^{i+1} &= \mathbf{c}_{n+1}^i + \alpha \Delta t \Delta \dot{\mathbf{c}}_{n+1}^{i+1} \\ \dot{\mathbf{c}}_{n+1}^{i+1} &= \dot{\mathbf{c}}_{n+1}^i + \Delta \dot{\mathbf{c}}_{n+1}^{i+1}. \end{aligned}$$

onde

$$\mathbf{M}_{n+1}^* = \tilde{\mathbf{M}} + \alpha \Delta t \tilde{\mathbf{C}}$$

e

$$\mathbf{G}_{n+1} = -\tilde{\mathbf{M}}(\dot{\mathbf{c}}_{n+1}^i) \dot{\mathbf{c}}_{n+1}^i - \tilde{\mathbf{C}}(\mathbf{v}_{n+1}^{i+1}, \mathbf{p}_{n+1}^{i+1}, \mathbf{c}_{n+1}^i) \mathbf{c}_{n+1}^i$$

O processo ocorre até que critérios de convergência pré-determinados sejam satisfeitos. Esses critérios são detalhados em (Coutinho e Alves (1996); Ney (2002)).

#### 4 MÉTODO DE ESTABILIZAÇÃO DIFUSÃO DINÂMICA

A Equação (3) de concentração apresenta um comportamento convectivo e dessa forma, o método de elementos finitos de Galerkin clássico não é adequado para resolver este tipo de problema, apresentando soluções não física conhecidas como instabilidades numéricas (Donea e Huerta (2003)). Soluções estáveis de problemas predominantemente convectivos podem ser obtidas via métodos estabilizados ou métodos multiescalas, tais como SUPG, GLS, RFB, VMS e SGS (Brooks e Hughes (1982); Hughes et al. (1989); Brezzi et al. (2003); Hughes et al. (2004); Guermond (2001)). Neste trabalho, utilizamos o método multiescala Difusão Dinâmica proposto por Arruda, Almeida and Dutra do Carmo (to appear) para problemas de transportes estacionários, que consiste em adicionar difusão artificial não-linear em todas escalas da discretização.

Considere o seguinte enriquecimento do espaço de aproximação  $C^h$  (espaço de aproximação associado à equação de concentração):

$$\tilde{C} = C^h \oplus C^B,$$

onde

$$C^h = \{u \in H_0^1(\Omega) \text{ tal que } c|_T \in \mathbb{P}_1, \forall T \in \mathcal{T}_h\},$$

com  $\mathbb{P}_1$  denotando o espaço de polinômios lineares e o espaço de funções bolhas  $C^B$  (ver Figura 1) é dado por

$$C^B = \{v \text{ tal que } v|_T \in H_0^1(T), \forall T \in \mathcal{T}_h\}.$$

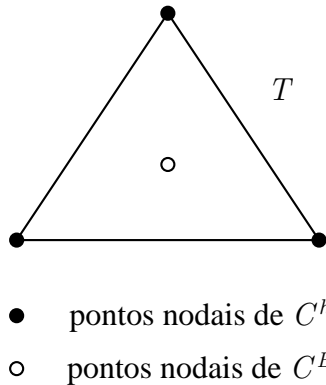


Figura 1: Representação do espaço bolha

O método de estabilização Difusão Dinâmica para a Equação (3) é dado por

$$\text{Achar } \tilde{c} = c^h + c^b \in \tilde{C} \text{ com } c^h \in C^h, c^b \in C^B \text{ tal que}$$

$$\int_{\Omega} \tilde{w} \phi \frac{\partial \tilde{c}}{\partial t} d\Omega + a(\tilde{w}, \tilde{c}) + \sum_T \int_T \nabla \tilde{w} \cdot \xi(c^h) \nabla \tilde{c} d\Omega = 0, \quad \forall \tilde{w} \in \tilde{C}, \quad (19)$$

onde

$$a(\tilde{w}, \tilde{c}) = \int_{\Omega} (\nabla \tilde{w} \cdot \mathbf{D}(\mathbf{v}) \nabla \tilde{c} + \tilde{w} \mathbf{v} \cdot \nabla \tilde{c}) d\Omega,$$

$$\xi(c^h) = \begin{cases} \frac{1}{2} \mu(h) \frac{|R(c^h)|}{|\nabla c^h|}, & \text{if } |\nabla c^h| \neq 0; \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (20)$$

com  $\mu(h)$  denotando o parâmetro característico submalha e

$$R(c^h) = \phi \frac{\partial c^h}{\partial t} - \nabla \cdot (\mathbf{D}(\mathbf{v}) \nabla c^h) + \mathbf{v} \cdot \nabla c^h \quad \text{sobre } T.$$

O método é resolvido através de um processo iterativo cuja solução inicial é obtida com  $\xi(c^h) = \sqrt{\text{meas}T}$ . O processo iterativo é definido por: dado  $\tilde{c}^{n-1}$ , achar  $\tilde{c}^n$  satisfazendo

$$\int_{\Omega} \tilde{w} \phi \frac{\partial \tilde{c}^n}{\partial t} d\Omega + a(\tilde{w}, \tilde{c}^n) + \sum_T \int_T \nabla \tilde{w} \cdot \xi(c^{h;n-1}) \nabla \tilde{c}^n d\Omega = 0, \quad \forall \tilde{w} \in \tilde{C}, \quad (21)$$

com  $\xi(c^{h;n-1}) = \theta_b^n \mu(h)$ , onde

$$\theta_b^n = \begin{cases} \frac{1}{2} \frac{|R(c^{h;n-1})|}{|\nabla c^{h;n-1}|}, & \text{se } |\nabla c^{h;n-1}| \neq 0; \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (22)$$

e

$$\mu(h) = \begin{cases} 2\sqrt{\text{meas}T}, & \text{if } T \cap T_+ \neq \emptyset; \\ \sqrt{\text{meas}T}, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (23)$$

Em cada elemento  $T$ , tem-se

$$\int_T \nabla \tilde{w} \cdot \xi(c^{h;n-1}) \nabla \tilde{c}^n d\Omega = \int_T \nabla w^h \cdot \xi(c^{h;n-1}) \nabla c^h d\Omega + \int_T \nabla w^b \cdot \xi(c^{h;n-1}) \nabla c^b d\Omega.$$

Assumimos que as sub-escalas são quase-estáticas (Juanes (2003); Codina (2002)), isto é,  $\frac{\partial c^b}{\partial t} \approx 0$  e usando como função teste em (19)  $w^h \in C^h$  e  $w^b \in C^B$ , obtém-se

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} w^h \phi \frac{\partial c^{h;n}}{\partial t} d\Omega + a(w^h, c^{h;n}) + \sum_T \int_T \nabla w^h \cdot \xi(c^{h;n-1}) \nabla c^{h;n} d\Omega + a(w^h, c^{b;n}) &= 0, \forall w^h \in C^h; \\ \int_{\Omega} w^b \phi \frac{\partial c^{h;n}}{\partial t} d\Omega + a(w^b, c^{h;n}) + a(w^b, c^{b;n}) + \sum_T \int_T \nabla w^b \cdot \xi(c^{h;n-1}) \nabla c^{b;n} d\Omega &= 0, \forall w^b \in C^B. \end{aligned}$$

Essas equações em cada elemento  $T$  geram um sistema local  $4 \times 4$ . É feito uma condensação estática na variável associada ao ponto nodal interno de  $T$ , gerando um problema local estabilizado  $3 \times 3$ . Essa formulação conduz a um conjunto de equações do tipo (13), (14) e (15) que são resolvidas conforme metodologia apresentada na seção anterior.

## 5 EXPERIMENTOS NUMÉRICOS

Considere um reservatório de petróleo hipotético de geometria quadrada constituído por um poço produtor localizado no centro do reservatório e quatro poços injetores dispostos nos vértices do reservatório. Neste arranjo, o escoamento é simétrico com relação às duas direções; portanto, o domínio computacional pode ser representado apenas por um quarto do domínio.

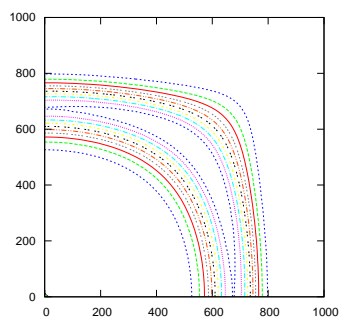
Em nossas simulações, o lado do reservatório mede  $L = 1000.0ft$ , o poço injetor está localizado no canto inferior esquerdo ( $x = y = 0$ ) e o poço produtor no canto superior direito ( $x = y = 1000$ ). O meio poroso é homogêneo com permeabilidade  $\mathbf{K} = k\mathbf{I}$ , sendo  $k = 100mD$ , e possui porosidade  $\phi = 0.1$ . A viscosidade do fluido residente é  $\mu(1) = 1.0cP$ .



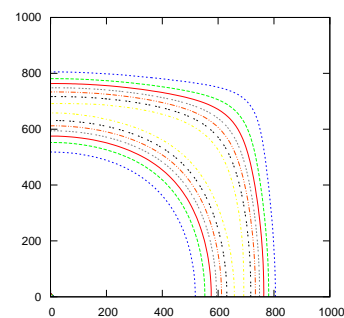
## 5.1 Injeção de Traçadores

A injeção de traçadores, no contexto de engenharia de petróleo, visa monitorar o movimento do fluido com o intuito de se obter informações relevantes sobre as propriedades do reservatório. A injeção de traçadores ocorre por um período de tempo determinado e, posteriormente, há a sua interrupção. Nos experimentos realizados um volume de traçador é injetado no poço injetor que é movimentado pelo escoamento de água sendo retirado no poço produtor. No exemplo, o volume do traçador injetado é de 0,25% do volume poroso ( $250 ft^3$ ) o que equivale a uma injeção realizada por um período de 5 dias a uma taxa de  $200 ft^2/dia$ . A viscosidade do traçador é a mesma do fluido residente ( $M = 1$ ), logo não existem instabilidades oriundas da não-linearidade.

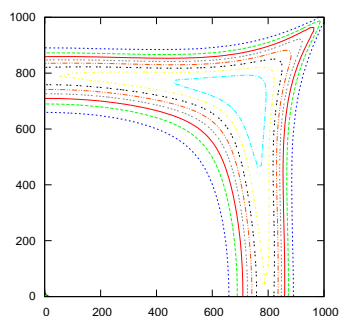
O comportamento do traçador foi observado em 800 e 1200 dias com dois níveis de dispersão  $\alpha_l = 10.0$ ,  $\alpha_t = 1.0$  (Fig. 2) e  $\alpha_l = 1.0$ ,  $\alpha_t = 0.0$  (Fig. 3). Os resultados a direita das duas figuras correspondem a formulação SUPG+CAU e os resultados a esquerda correspondem a formulação DD. Podemos observar que os resultados são bastante similares e condizem com aqueles apresentados por Dias (2001); Ney (2002); Malta et al. (1998).



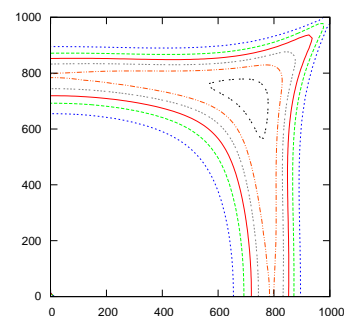
(a) 800 dias - SUPG+CAU



(b) 800 dias - DD

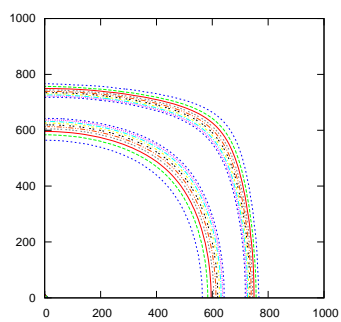


(c) 1200 dias - SUPG+CAU

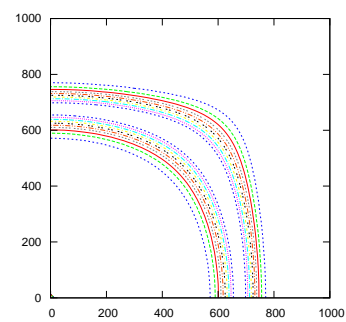


(d) 1200 dias - DD

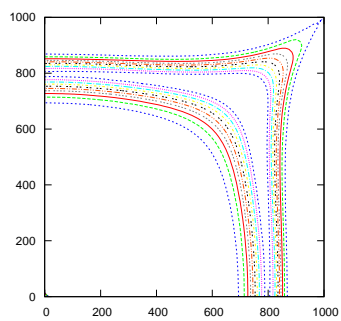
Figura 2: Curvas de concentração para os níveis de dispersão,  $\alpha_l = 10.0$  e  $\alpha_t = 1.0$  - Problema do traçador.



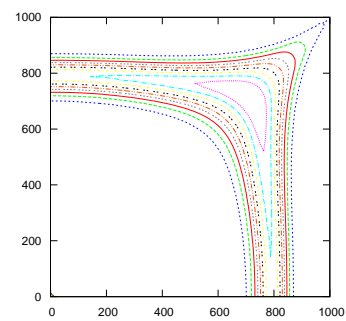
(a) 800 dias - SUPG+CAU



(b) 800 dias - DD



(c) 1200 dias - SUPG+CAU



(d) 1200 dias - DD

Figura 3: Curvas de concentração para os níveis de dispersão,  $\alpha_l = 1.0$  e  $\alpha_t = 0.0$  - Problema do traçador.

## 5.2 Injeção Contínua

A natureza dos fluidos que preenchem um reservatório de petróleo depende fortemente do estágio da recuperação do óleo. Em um estágio, muito inicial, o reservatório contém essencialmente um tipo de fluido, tal como gás ou óleo (a presença de água pode ser normalmente negligenciada) (Chen et al., 2006). Muitas vezes a pressão nesse estágio é muito alta, o que faz com que o óleo seja produzido pela decomposição natural, sem a necessidade de utilização de técnicas avançadas de recuperação. Após essa etapa, é necessária a introdução de energia secundária. Isso é alcançado com a injeção de fluidos no reservatório, cuja finalidade é deslocar o fluido residente até o poço produtor, ocupando o espaço deixado por ele.

Existem dois tipos de recuperação que utilizam essa técnica, a recuperação secundária e a recuperação terciária. Na recuperação secundária, o deslocamento é imiscível, composto por duas fases, água (por exemplo) e óleo, não ocorrendo transferência de massa entre as fases. Esse fato pode ocasionar altas tensões nas interfaces entre os fluidos, reduzindo a capacidade do fluido injetado de deslocar o óleo. Na recuperação terciária existe o envolvimento de complexos químicos e efeitos térmicos. Nesse estágio o óleo é recuperado injetando-se materiais que normalmente não estão presentes em um reservatório de petróleo. O objetivo principal das técnicas avançadas de recuperação é alcançar miscibilidade e dessa maneira eliminar a saturação do óleo residual. Essa miscibilidade é alcançada com o aumento da temperatura ou injeção de outra espécie química como  $CO_2$  (Chen et al., 2006).

O escoamento miscível não possui tensões interfaciais, pois o fluido injetado tem a capacidade de se misturar com o fluido residente, formando uma única fase. Quando o fluido residente possui a mesma viscosidade que o fluido deslocante ( $M = 1$ ) não existem instabilidades numéricas causadas pela não-linearidade. A Figura 4 apresenta a trajetória da mistura para 250, 500, e 1000 dias com o nível de dispersão  $\alpha_l = 10.0$ ,  $\alpha_t = 1.0$ , sendo que as figuras da direita correspondem a formulação SUPG+CAU e as figuras da esquerda correspondem a formulação DD. Podemos observar que os resultados são bastante similares e condizem com aqueles apresentados por Dias (2001); Malta et al. (1998); Barbosa (2009).

A simulação de injeção contínua envolvendo mobilidade adversa, ou seja, quando o fluido residente possui viscosidade maior que o fluido deslocante ( $M > 1$ ) é um dos tópicos mais importantes da classe de problemas envolvendo recuperação terciária. Os fluidos injetados provocam reações que alteram o comportamento dos fluidos residentes, o que afeta diretamente na forma de produção do reservatório. Deslocamento miscível com razão de mobilidade adversa, frequentemente resulta em oscilações espúrias, sensibilidade a orientação da malha e surgimento de fingers formados a partir de aproximações instáveis e imprecisas, além de apresentar um elevado custo computacional para elevados valores de  $M$  (Ney, 2002).

A Figura 5 apresenta a trajetória da mistura para 250, 500, e 1000 dias com o nível de dispersão  $\alpha_l = 10.0$ ,  $\alpha_t = 1.0$ , sendo que as figuras da direita correspondem a formulação SUPG+CAU e as figuras da esquerda correspondem a formulação DD. Podemos observar que as soluções obtidas pela formulação DD apresentam um comportamento superior aquelas observadas para a formulação SUPG+CAU. Destacamos que, embora não apresentado nesse artigo, o tempo computacional do método DD foi em torno de 40% mais rápido.

## 6 CONCLUSÃO

Neste trabalho introduzimos o método de estabilização submalha Difusão Dinâmica (DD) no problema de escoamento miscível de fluido incompressível em meios porosos aplicado à equação da concentração. Empregamos uma formulação semi-discreta estabilizada do método

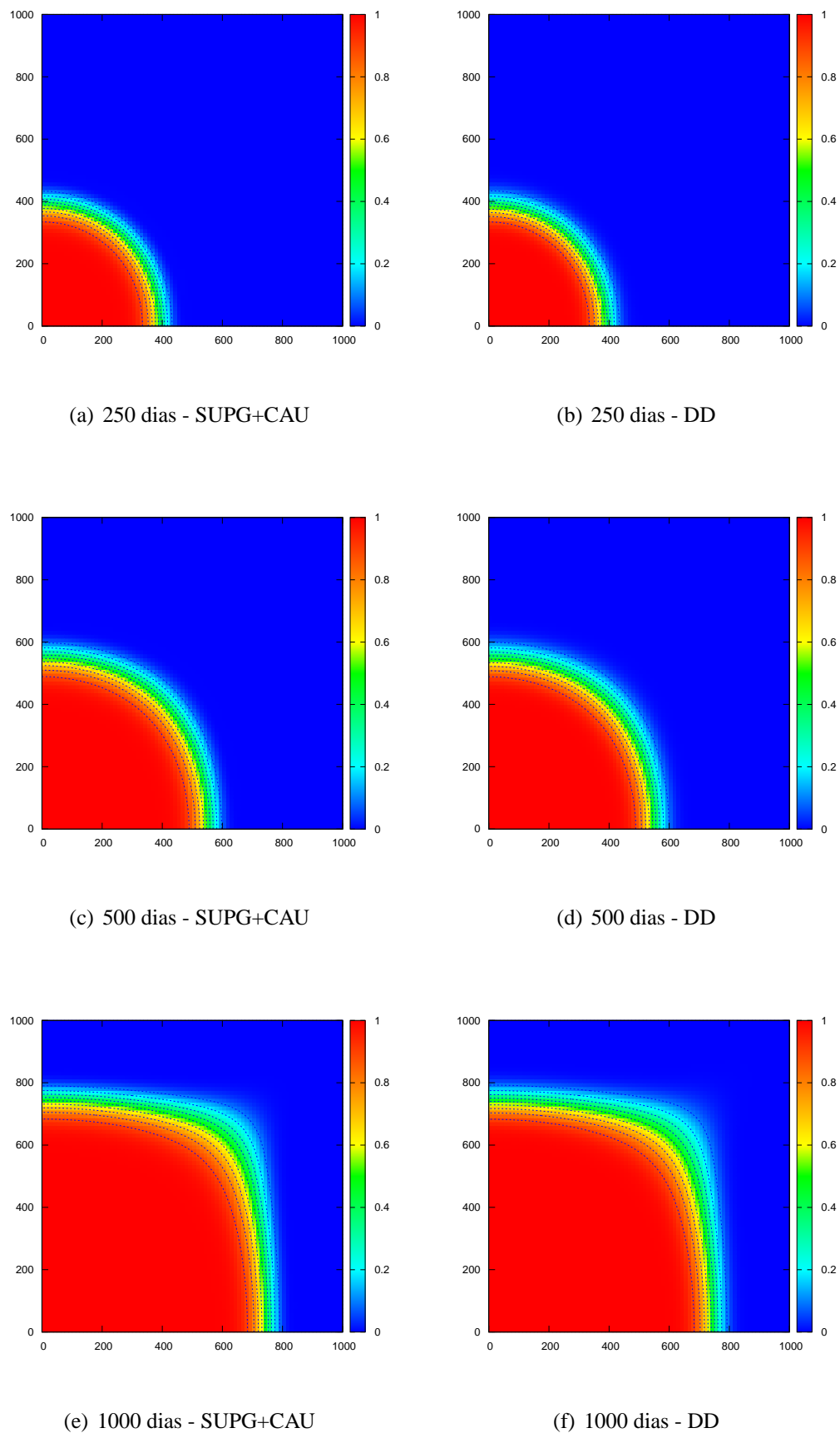
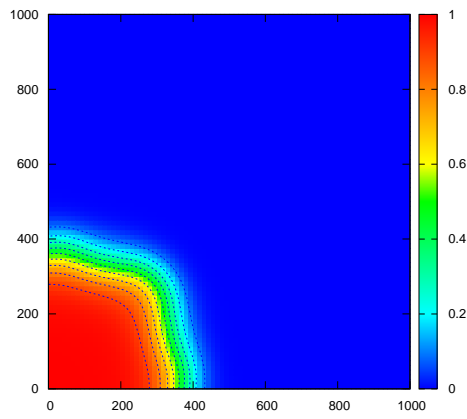
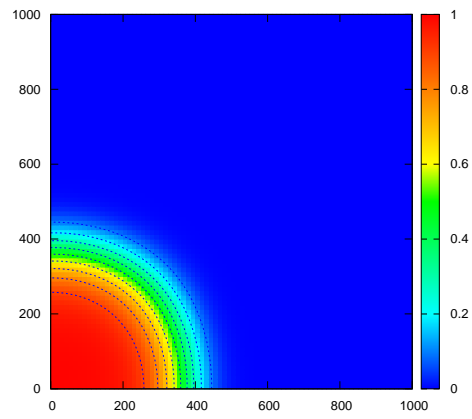


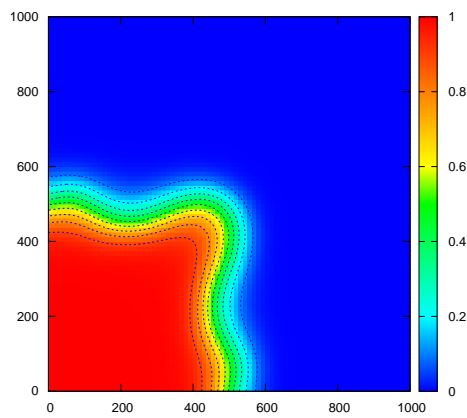
Figura 4: Curvas de concentração do deslocamento miscível com razão de mobilidade unitária.



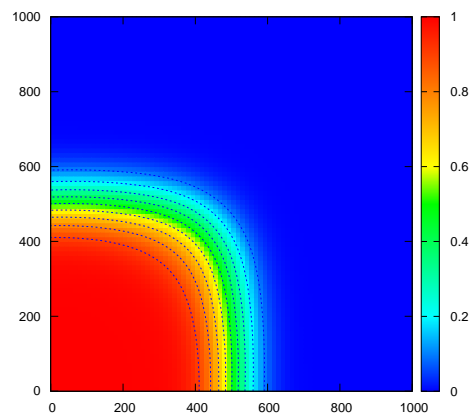
(a) SUPG+CAU - 250 dias



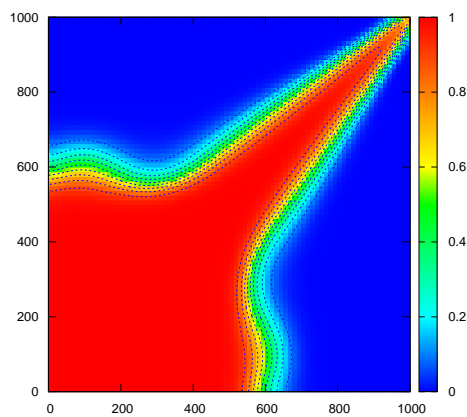
(b) DD - 250 dias



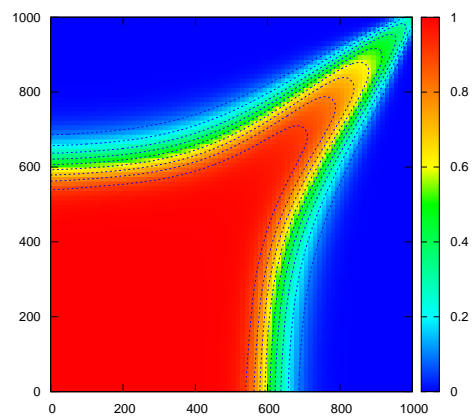
(c) SUPG+CAU - 500 dias



(d) DD - 500 dias



(e) SUPG+CAU - 1000 dias



(f) DD - 1000 dias

Figura 5: Curvas de concentração do deslocamento miscível com razão de mobilidade  $M = 20$ .

dos elementos finitos, onde a equação da pressão é resolvida pela formulação clássica de Galerkin, a velocidade é calculada utilizando uma estratégia de pós-processamento e na equação da concentração aplicamos o método submalha DD. Os experimentos foram realizados para duas classes de problemas: injeção de traçadores e injeção contínua.

Os experimentos numéricos demonstram que o método de estabilização Difusão Dinâmica é capaz de descrever o comportamento predominantemente convectivo dos escoamentos miscíveis testados em um tempo de processamento menor que o método SUPG+CAU.

## AGRADECIMENTOS

A primeira autora agradece a Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pela bolsa de mestrado concedida. Os demais autores agradecem ao CNPq pelo apoio recebido dentro do escopo dos Projetos CNPq 620185/2008-2 e 309172/2009-8.

## REFERÊNCIAS

- Arruda N.C.B., Almeida R.C., e do Carmo E.G.D. Dynamic viscosity formulations for advection dominated transport problems, 2010. In preparation for *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*.
- Barbosa A., Catabriga L., Valli A., e Souza A.D. Evaluation of parallel simulations on multi-core clusters of miscible displacement applications. In *XXX Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering*. Búzios, Rio de Janeiro, 2009.
- Barbosa A.C. *Implementação em paralelo do método dos elementos finitos empregando estrutura de dados por aresta para simulação em cluster multi-core de escoamento miscível em meios porosos*. Master's thesis (in portuguese), Universidade Federal do Espírito Santo - UFES, 2009.
- Brezzi F., Marini L.D., e Sangalli G. Link-cutting bubbles for the stabilization of convection-diffusion-reaction problems. *Mathematical Models and Methods in Applied Science*, 13:445–461, 2003.
- Brooks A.N. e Hughes T.J.R. Streamline upwind Petrov-Galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 32:199–259, 1982.
- Chen Z., Huan G., e Ma Y. *Computational Methods for Multiphase Flows in Porous Media*. SIAM, 2006.
- Codina R. Stabilized finite element approximation of transient incompressible flows using orthogonal subscales. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191:4295–4321, 2002.
- Coutinho A. e Alves J. Parallel finite element simulation of miscible displacement in porous media. *SPE Journal*, 4(1):487–500, 1996.
- Coutinho A. e Alves J. Finite element simulation of nonlinear viscous fingering in miscible displacement with anisotropic dispersion and nonmonotonic viscosity profiles. *Computational Mechanics*, 423:108–116, 1999.
- Coutinho A., Dias C., e Alves J. Stabilized methods and post-processing techniques for miscible displacement. *Computational Mechanics*, 193:1421–1436, 2004.
- Dias M.C. *Técnicas de integração reduzida para simulação de problemas não-lineares de transporte pelo método dos elementos finitos*. Tesis de Doutorado, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, 2001.
- Donea J. e Huerta A. *Finite Element Methods for Flow Problems*. John Wiley and Sons, Ltd,

2003.

- Galeão A.C. e do Carmo E.G.D. A consistent approximate upwind Petrov-Galerkin method for convection-dominated problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 68:83–95, 1988.
- Guermond J.L. Subgrid stabilization of galerkin approximations of linear monotone operators. *IMA Journal of Numerical Analysis*, 21:165–197, 2001.
- Hughes T.J.R., Franca L.P., e Hulbert G.M. A new finite element formulation for computational fluid dynamics: Viii. the galerkin-least-squares method for advective-diffusive equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 73:173–189, 1989.
- Hughes T.J.R., Scovazzi G., e Franca L.P. *Multiscale and Stabilized Methods, Encyclopedia of Computational Mechanics*. John Wiley & Sons, Ltd., 2004.
- Juanes R. *Displacement theory and multiscale numerical modeling of three-phase flow in porous media*. Phd thesis, Engineering - Civil and Environmental Engineering, University of California, Berkeley, 2003.
- Loula A., Coutinho A., e Garcia E. Miscible displacement simulation by finite element methods in distributed memory machines. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 174:339–354, 1999.
- Malta S. e Loula A. Numerical analysis of finite element method for miscible displacements in porous media. *Numerical Methods in Partial Differential Equations*, 14:519–548, 1998.
- Malta S., Loula A., e Garcia E. A post-processing technique to approximate the velocity filed in miscible displacement simulations. *Matemática contemporânea*, 8:239–268, 1995.
- Malta S., Loula A., e Garcia E. Numerical analysis of a stabilized finite element method for tracer injection simulations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 187:119–136, 1998.
- Malta S., Loula A., e Garcia E. Numerical analysis of a stabilized finite element method for tracer injection simulations. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 187:119–136, 2000.
- Mendonça A.L. *Simulação numérica de escoamentos incompressíveis bifásicos de fluidos não-newtonianos e imiscíveis em meios porosos via método dos elementos finitos*. Tesis de Doutorado, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, 2003.
- Ney W.G. *Um estudo comparativo sobre formulações estabilizadas e adaptatividade na simulação de desolcamento miscíveis em meios pororos pelo método dos elementos finitos*. Master's thesis (in portuguese), COPPE/UFRJ, 2002.
- Peaceman D. *Survey of problems in numerical reservoir simulation*. SIAM, Philadelphia, 1986.
- Young L. A finite element method for reservoir simulation. *Society of Petroleum Engineers, SPE*, 4, 1981.