

## ANÁLISE PLÁSTICA LIMITE APLICADA AO PROBLEMA DE ESTABILIDADE DE TALUDES

Márcio Augusto Roma Buzar<sup>a</sup>, Paul William Partridge<sup>b</sup>, Carmen Lucia Sahlit<sup>b</sup>

<sup>a</sup>Programa de Pós-graduação em Arquitetura e Urbanismo, Universidade de Brasília,  
Departamento de Tecnologia – FAU-UnB, 70910-900, Brasília, DF, Brasil, [buzar@unb.br](mailto:buzar@unb.br)

<sup>b</sup>Programa de Pós-graduação em Estruturas e Construção Civil – PECC Universidade de  
Brasília, Departamento de Engenharia Civil, 70910-900, Brasília, DF, Brasil. [paulp@unb.br](mailto:paulp@unb.br)  
[clsahlit@terra.com.br](mailto:clsahlit@terra.com.br).

**Palavras-chave:** *elementos finitos híbridos; análise plástica limite; programação matemática; geotecnia; estabilidade de taludes.*

**Resumo.** *Neste trabalho estuda-se o problema de estabilidade de taludes emprega-se o método dos elementos finitos híbridos com a formulação da análise plástica limite e a programação matemática com o objetivo final de se obter a carga de colapso plástico de problemas de estados planos de deformação. A formulação é baseada no teorema do limite inferior de tal forma que se procura determinar a máxima carga para a qual as condições de equilíbrio e resistência sejam satisfeitas. Assume-se como válido o critério de ruptura de Mohr-Coulomb, considerando-se a plasticidade associada.*

*Para a formulação de elementos finitos híbridos de tensão consideram-se as variáveis primárias de tensão no domínio (energia potencial complementar) e de deslocamento na superfície dos elementos (energia potencial total). Esta formulação permite a construção de um elemento finito de quatro nós que produz resultados mais precisos para os campos de tensão e deslocamento. Exemplos numéricos para o caso de estabilidade de taludes, são apresentados evidenciando-se tanto à carga de colapso plástico quanto a configuração do mecanismo de colapso. Os resultados são comparados com os existentes na literatura.*

## 1. INTRODUÇÃO

Neste trabalho estuda-se o comportamento de estabilidade de taludes e a determinação da carga de colapso plástico. Recentemente foram noticiados nos meios de comunicações diversos eventos que tratavam de desmoronamentos de habitações localizadas nas encostas de taludes. Como é sabido a estabilidade dos maciços de terras devem-se: ao tipo e comportamento dos solos a declividade dos maciços e a situação de carga dos mesmos. Cuidados especiais devem ser tomados para se evitar acidentes ou mesmo ruínas que possam provocar grandes catástrofes como foi o caso ocorrido no Rio de Janeiro levando a centena de mortes ocasionadas por desmoronamento de terras.

A seguir aplicam-se os modelos numéricos de elementos finitos baseados em funcionais híbridos para o estudo de estabilidade de taludes. Os primeiros funcionais foram obtidos no início da década de 60 (Pian, 1964), (Pian, 1995). Atualmente os modelos híbridos de elementos finitos representam uma importante área de pesquisa na construção de elementos finitos de alta performance (Felippa, 2000), (Pian & Sumihara, 1984), e têm sido aplicados com sucesso a diversos problemas de engenharia. Neste trabalho utiliza-se o modelo híbrido na obtenção de soluções de problemas de análise plástica limite em estabilidade de taludes.

Uma das vantagens das formulações híbridas e mistas de elementos finitos é o fato de que as mesmas já satisfazem separadamente as condições de equilíbrio, compatibilidade e material produzindo equações independentes o que permite executar a análise plástica limite via programação matemática de forma direta.

## 2. FORMULAÇÃO EM ELEMENTOS FINITOS HÍBRIDOS

A seguir descreve-se resumidamente a teoria de elementos finitos baseados em funcionais híbridos. Os elementos finitos híbridos têm um ou mais campos primários que são definidos somente na interface ou contorno do elemento. Princípios variacionais híbridos representam uma importante extensão dos princípios clássicos da mecânica. Esta extensão constitui uma tentativa de fortalecer os modelos de elementos finitos.

O primeiro elemento híbrido era bastante limitado por não ser capaz de tratar problemas não lineares e dinâmicos. Entretanto, tais limitações foram gradualmente superadas com o entendimento e evolução dos conceitos básicos. A adoção de elementos finitos híbridos neste trabalho foi motivada pelo fato do elemento finito híbrido quadrilátero de quatro nós ser provavelmente o elemento de quatro nós mais preciso em uma ampla gama de problemas de tensão e deformação plana (Zienkiewicz & Taylor 1995).

### 2.1 Equação de equilíbrio

O funcional utilizado na obtenção do elemento híbrido é obtido pela soma de outros dois funcionais que contêm o funcional no interior (domínio) e o potencial de interface (contorno). A expressão (1) representa o funcional utilizado em elementos híbridos (Felippa, 2000), (Pian & Tong, 1969):

$$\pi_C^u(\sigma_{ij}, u_i) = -U_C + W_d = -\frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij} D_{ijkl} \sigma_{kl} dV + \int_S u_i \sigma_{ij} n_j dS - \int_{S_t} u_i \hat{t}_i dSt \quad (1)$$

onde  $\pi_C^u(\sigma_{ij}, u_i)$  é o funcional de campo múltiplo híbrido ( $\sigma$  e  $u$ );  $U_C$  é a energia complementar em termos das tensões;  $W_c$  é o trabalho potencial;  $\sigma$  é o tensor de tensões;  $D$  é o tensor da relação constitutiva;  $u$  é o vetor de deslocamentos;  $V$  é o volume;  $S$  é a superfície;  $S_t$  é a parte da superfície onde existem carregamentos e  $\hat{t}$  é o vetor de forças de superfície prescritas.

O funcional apresentado na expressão (1) pode ser aplicado na construção do elemento finito híbrido da Figura 1.

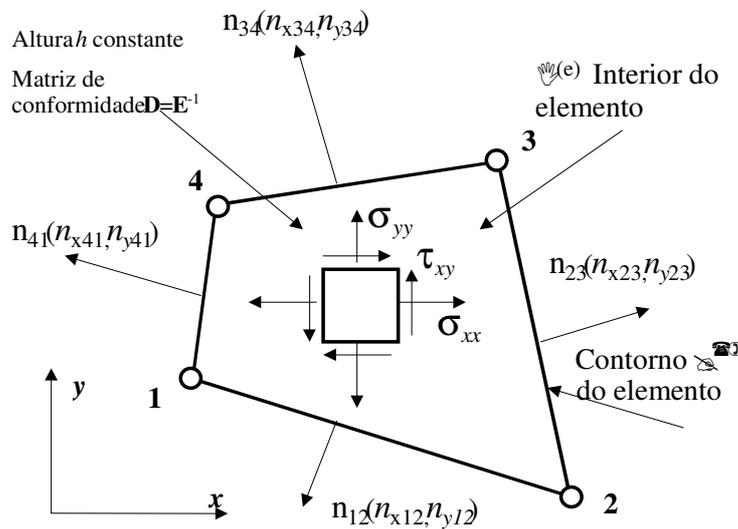


Figura 1 – Elemento quadrilátero bilinear de tensão plana (Felippa, 2000).

Emprega-se para a interpolação das tensões a relação

$$\sigma = \Psi \alpha \quad (2)$$

sendo  $\Psi$  a matriz que interpola as tensões, e  $\alpha$  são os parâmetros de tensões.

O funcional da expressão (1) pode ser escrito para todo o domínio e contorno do problema discretizado como

$$\pi_C^u = \alpha^T G \dot{u} - P^T \dot{u} \quad (3)$$

onde  $G$  é dado por

$$G = \int_{\Gamma^{(e)}} T^T \Phi d\Gamma \quad (4)$$

sendo  $\dot{\mathbf{u}}$  as taxas de deslocamentos no problema discretizado,  $\mathbf{P}$  o vetor de cargas nodais e  $\Phi$  é a matriz das funções de forma para o elemento linear de contorno descrito na superfície do elemento finito híbrido quadrilátero de tensões planas.

Fazendo  $\pi_c^d$  estacionário em relação aos deslocamentos, tem-se

$$\frac{\partial \pi_c^d}{\partial \dot{\mathbf{u}}} = \mathbf{G}\boldsymbol{\alpha} - \mathbf{P}^T = 0 \quad (5)$$

ou

$$\mathbf{G}\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{P}^T \quad (6)$$

A expressão (6) é uma relação de equilíbrio entre as cargas nodais  $\mathbf{P}$  e os parâmetros de tensão  $\boldsymbol{\alpha}$ , sendo  $\mathbf{G}$  uma matriz de equilíbrio em termos dos parâmetros de tensão, integrada no contorno do elemento finito híbrido.

### 3 CRITÉRIO DE RESISTÊNCIA DE MOHR-COULOMB

No presente trabalho, assume-se como válido o critério de Mohr-Coulomb. Neste critério a tensão de cisalhamento  $\tau$  na ruptura ou escoamento do material é função de propriedades do material, como a coesão e o ângulo de atrito, e varia linearmente com a tensão normal atuante (Chen, 1982). Assim as forças de cisalhamento crescem com o incremento das tensões normais ao plano de ruptura, ou seja,

$$\tau = c + \sigma \tan \phi \quad (7)$$

onde  $\tau$  é a tensão de cisalhamento no plano de ruptura,  $c$  é a coesão do material e  $\phi$  é o ângulo de atrito interno.

O critério de Mohr-Coulomb ignora o efeito da tensão principal intermediária e a equação pode ser escrita na forma das tensões principais como

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \sin \phi + c \cos \phi \quad (8)$$

onde  $\sigma_1$  e  $\sigma_3$  são a maior e a menor tensões principais, respectivamente.

Na forma geral, o critério de ruptura de Mohr-Coulomb no espaço de tensões  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  e  $\sigma_{xy}$  é dado por

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (2\tau_{xy})^2 - [2c \cos \phi - (\sigma_x + \sigma_y) \sin \phi]^2 \leq 0 \quad (9)$$

A utilização da expressão (9) na análise plástica limite leva à obtenção de um sistema governante na forma de um problema de programação não linear (PNL). Esta expressão pode

ser linearizada de modo a se trabalhar com sistemas governantes na forma de problemas de programação matemática linear (PLs). Utilizando uma superfície de ruptura linearizada (Santos *et al*, 1999a), (Santos *et al*, 1999b) as condições de resistência, em um ponto qualquer do corpo, são expressas como

$$\mathbf{n}^T \boldsymbol{\sigma} \leq \boldsymbol{\sigma}^* \quad (10)$$

onde  $\mathbf{n}$  é a matriz de normalidade; e  $\boldsymbol{\sigma}^*$  é o vetor das capacidades plásticas.

As condições de resistência expressas em (10) são função da tensão  $\boldsymbol{\sigma}$ . Assim, para que seja possível a montagem do problema de programação linear equivalente ao critério estático da análise plástica limite é necessário substituir (5) em (10), chegando-se a expressão (11), mais detalhe pode ser encontrado em (Buzar *et al*, 2003).

$$\mathbf{n}^T \Psi \boldsymbol{\alpha} \leq \boldsymbol{\sigma}^* \quad (11)$$

#### 4 TEOREMA ESTÁTICO DA ANÁLISE PLÁSTICA LIMITE

Com a relação de equilíbrio (6) e as condições de resistência (11), obtém-se o problema de programação linear associado ao critério estático como

$$\text{Maximizar} \quad \lambda \quad (12a)$$

$$\text{Sujeito a} \quad \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{n}^T \Psi \\ \mathbf{P}_v & -\mathbf{G} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \\ \boldsymbol{\alpha} \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma}^* \\ \mathbf{P}_f \end{bmatrix} \quad (12b)$$

No presente trabalho, os problemas de programação linear associados ao teorema estático, obtidos por meio da representação poliédrica da superfície de ruptura em hiperplanos (Sahlit, 1992), (Sahlit, 1993), (Smith, 1990) foram resolvidos utilizando-se o software comercial LINDO (Linear INteractive Discrete Optimizer) (Sschage, 1991).

#### 5 ESTABILIDADE DE TALUDE

Neste exemplo desenvolve-se a análise de dois taludes, um com altura  $h$  igual a 5m e outro com  $h$  igual a 10m, os dois com inclinação de 45 graus. O material que constitui o talude é admitido como sendo homogêneo e seco. São adotadas as seguintes propriedades: coesão  $c$  igual a 50 kPa e peso específico  $\gamma$  igual a 18,0 kN/m<sup>3</sup>.

Uma das vantagens do modelo híbrido de elementos finitos em relação ao modelo misto é que, para se obter uma solução factível para o problema de estabilidade de talude utilizando-se o elemento finito misto, é necessário adicionar condições de contorno de tensões na região onde o solo não possui condições de contorno essenciais definidas. No caso do modelo híbrido de elemento finito, as condições de contorno de tensões são satisfeitas naturalmente na formulação do elemento, devido à introdução da variável primária de deslocamento na superfície do elemento.

A figura 2 apresenta a geometria adotada para os taludes, com altura igual a 5m e 10m respectivamente.

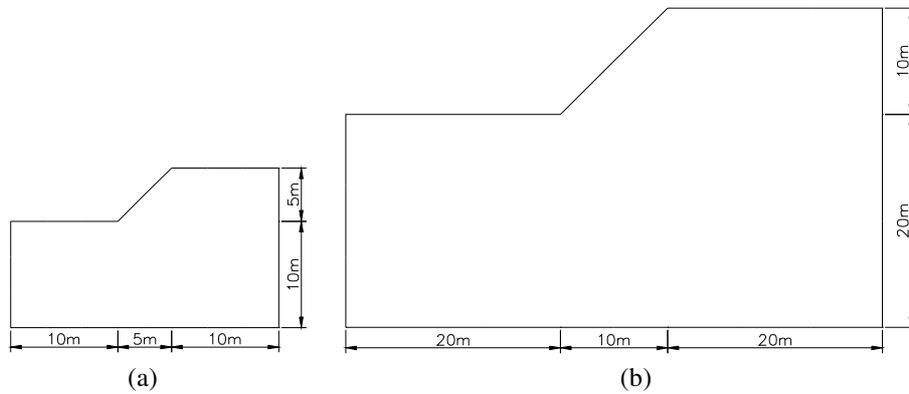


Figura 2 - Geometria adotada para os taludes com altura igual a 5m e 10m e inclinação de  $45^\circ$ , respectivamente.

Na figura 3, mostram-se as quatro malhas empregadas para se discretizar o domínio dos dois taludes com alturas de 5m e 10m respectivamente.

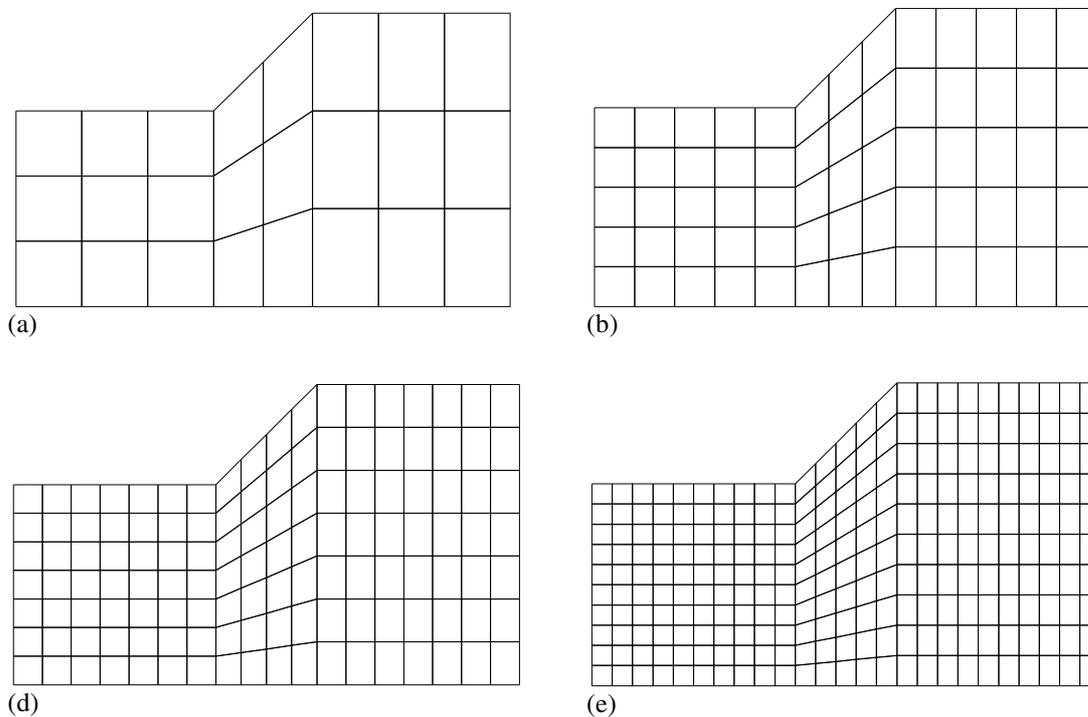


Figura 3 - Taludes com as alturas iguais a 5m e 10m discretizados com as malhas: (a) Q1 com 36 nós e 24 elementos, (b) Q2 com 84 nós e 65 elementos, (c) Q3 com 152 nós e 126 elementos e (d) Q4 com 286 nós e 250 elementos.

Na tabela 1 mostram-se os valores do fator de carga de colapso plástico para os taludes puramente coesivos com alturas de 5m e 10m respectivamente. Empregaram-se 16 planos para a linearização da superfície de Mohr-Coulomb. A análise dos valores apresentados na tabela mostra que, tanto no caso do talude com altura igual a 5m quanto no caso do talude com altura igual a 10m, a diferença entre os valores obtidos para o fator de carga, utilizando-se os elementos finitos híbridos e mistos, é de, no máximo, 2%. Além disso, os resultados obtidos com os modelos híbrido e misto dos elementos finitos listados na tabela 1, mostram coerência considerando que o fator de carga de colapso plástico decresce conforme o aumento da altura do talude.

Tabela 1 - Fator de carga de colapso dos taludes com h=5m e h=10m

MALHA	NN	NE	h=5m		h=10m	
			HÍBRIDO	MISTO	HÍBRIDO	MISTO
Q1	36	24	3,056	3,057	1,529	1,528
Q2	84	65	3,018	2,974	1,509	1,486
Q3	152	126	3,004	2,963	1,502	1,481
Q4	286	250	3,000	2,971	1,500	1,486

As figuras 4 e 5 mostram graficamente os valores do fator de carga de colapso apresentados na Tabela 1, considerando o número de nós das malhas utilizadas na modelagem do problema para os taludes de altura igual a 5m e 10m respectivamente. Verifica-se que os resultados fornecidos pelo modelo híbrido são ligeiramente superiores que os obtidos com o modelo misto.

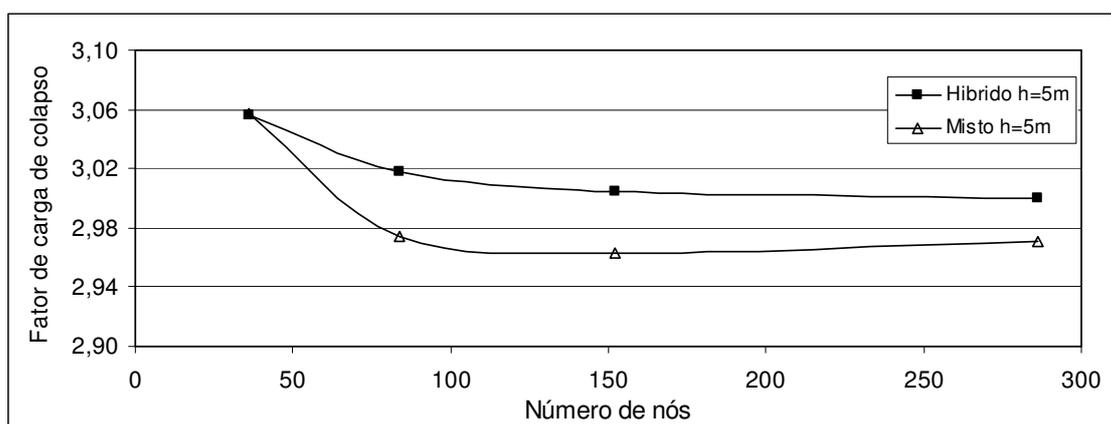


Figura 4 - Fator de carga de colapso para o talude de altura igual a 5m.

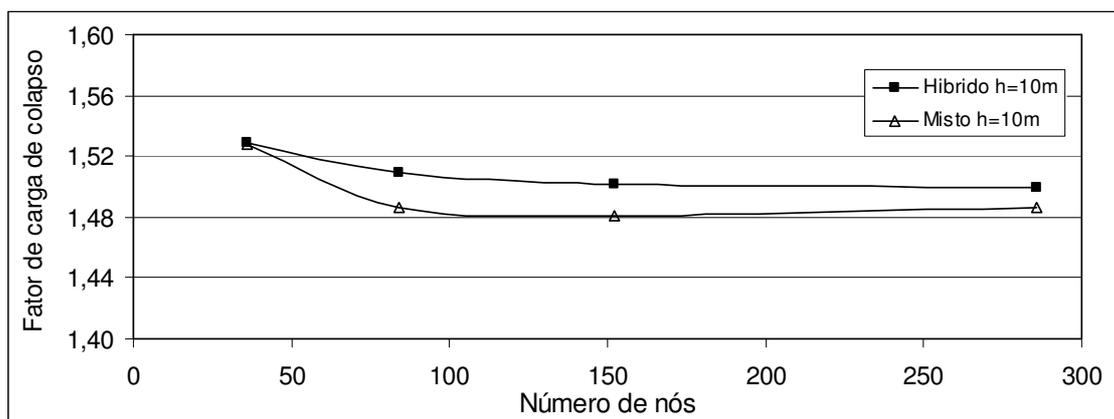


Figura 5 - Fator de carga de colapso para o talude de altura igual a 10m

Com a finalidade de comparar diversas opções de cálculo do fator de segurança, adotam-se em seguida, quatro configurações de taludes: dois taludes com 5 m de altura e inclinações 1V:1H e 1V:2H e dois com 10 m de altura e inclinações 1V:1H e 1V:2H. O solo é admitido como sendo homogêneo e seco, com coesão  $c$  igual a 50 kPa e peso específico  $\gamma$  igual a 18,0 kN/m<sup>3</sup>.

A tabela 2 apresenta os resultados obtidos com as diversas análises realizadas. Para a obtenção do fator de carga de segurança  $\lambda$  com a utilização da análise plástica limite, empregaram-se os modelos híbrido e misto de elementos finitos desenvolvidos no presente trabalho. Adotaram-se os PLs associados ao teorema do limite inferior, com uma linearização interna do critério de Mohr-Coulomb em 16 planos.

Para a obtenção dos valores do fator de carga  $F_R$  por meio da análise elastoplástica, utilizou-se o programa PLAXIS que emprega um modelo elastoplástico do tipo Mohr-Coulomb e lei de fluxo associada (Brinkharave & Vermeer, 1998).

Os valores correspondentes fornecidos pelo método de equilíbrio limite convencional e apresentados na tabela 2, foram obtidos Farias *et al.*, (2002). Estes autores fizeram uso do programa SLOPE/W (Geoslope, 1994) e tomaram como base de comparação o Fator de Segurança  $F_{M-P}$  do Método de Morgenstern-Price. Eles adotaram as superfícies de ruptura circulares para as quais o programa SLOPE/W procura automaticamente a superfície crítica. Utilizando o mesmo programa computacional, os referidos autores também obtiveram os valores de fator de segurança  $F_{Fel}$  pelo Método Ordinário de Fellenius, o fator  $F_{Bis}$  encontrado por meio do Método de Bishop e o fator  $F_{Jan}$  determinado pelo método de Janbu.

Analisando os valores do fator de carga de colapso, apresentados na tabela 2, conclui-se que os resultados obtidos estão todos muito próximos, com uma diferença máxima de 8,3%. A comparação dos resultados fornecidos pela análise limite e por equilíbrio limite mostra que os valores fornecidos por equilíbrio limite são em geral superiores aos valores fornecidos pela análise limite. Esta diferença nos resultados encontrados pode ser explicada pelo fato de que, na verdade, as soluções de equilíbrio limite não são nem limites inferiores nem limites superiores da carga de colapso.

Quando se comparam os resultados obtidos pela análise plástica limite com os resultados fornecidos pelas outras análises, observa-se que, de modo geral, a maior proximidade existente é com a análise elastoplástica, com uma diferença máxima de 4,2%.

O fato de que os resultados da análise elastoplásticos são ligeiramente inferiores aos valores fornecidos pela análise plástica limite confirma as observações de Farias & Naylor (1998), os quais afirmam que, na análise elastoplástica, muitos programas de elementos finitos apresentam dificuldades de convergência quando a carga está muito próxima da carga de ruptura. A menor diferença entre os diversos valores fornecidos pelos métodos ocorre no talude com altura  $h$  igual a 10m e inclinação 1V:2H.

Conclui-se ainda que os valores do fator de carga de colapso plástico obtidos tanto pelo modelo misto de elementos finitos quanto pelo modelo híbrido são muito próximos sendo a diferença maior para o talude 1V:1H.

Tabela 2 - Fator de carga de colapso encontrados por meio dos modelos de equilíbrio limite, análise elastoplástica e análise plástica limite.

MODELO EMPREGADO	Fator de Carga	ALTURA $h = 5m$		ALTURA $h = 10m$	
		1V:1H	1V:2H	1V:1H	1V:2H
Equilíbrio Limite	$F_{Fel}$	3,130	3,210	1,564	1,607
	$F_{Bis}$	3,130	3,210	1,564	1,607
	$F_{Jan}$	3,073	3,060	1,533	1,547
	$F_{M-P}$	3,133	3,210	1,570	1,608
Análise Elastoplástica	$F_R$	2,892	3,009	1,449	1,504
Análise Plástica Limite (Híbrido)	$\lambda$	3,000	3,168	1,500	1,585
Análise Plástica Limite (Misto)	$\lambda$	2,971	3,165	1,486	1,583

Na Figura 6, mostram-se as distribuições das taxas de deslocamentos para o talude com altura igual a 5m, obtidos com o modelo híbrido de elementos finitos. Deve-se observar que o mecanismo encontrado está contido dentro do domínio do problema o que indica a pouca influência das condições de contorno.

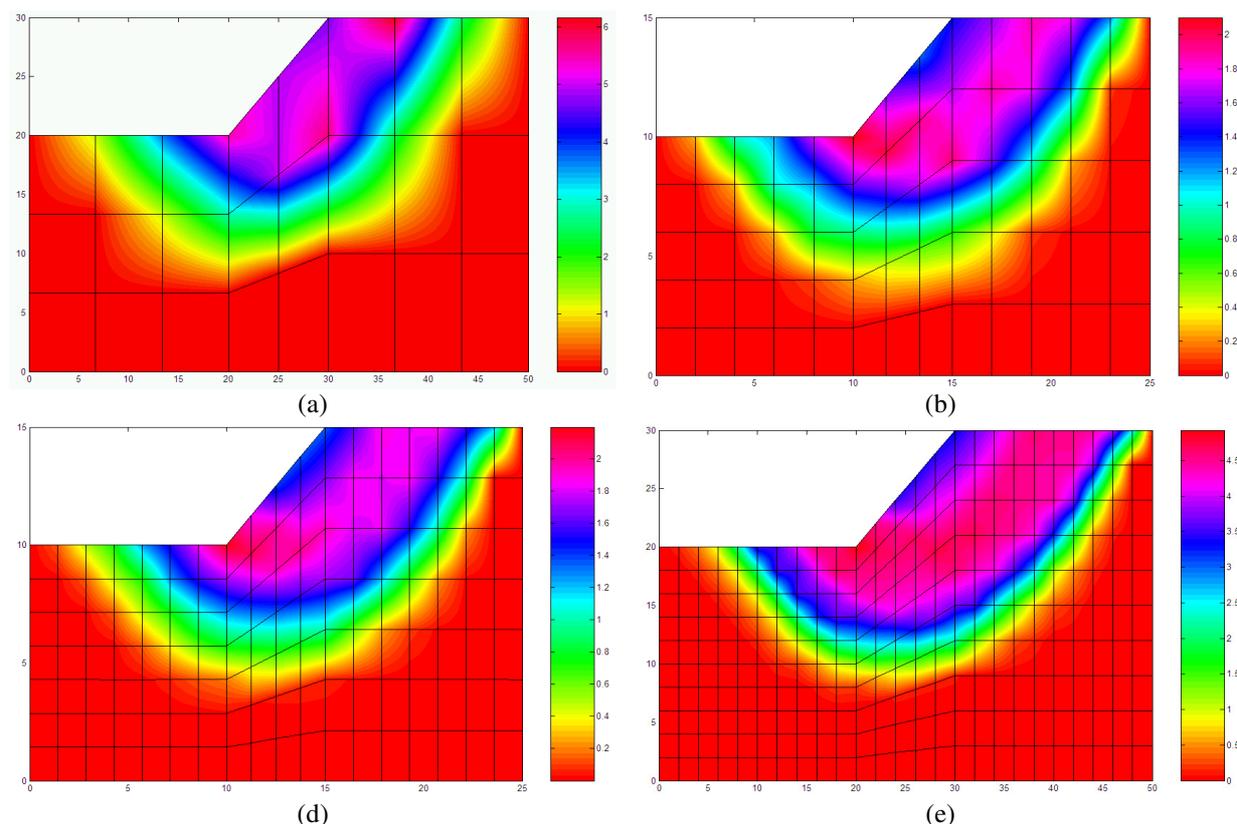


Figura 6 - Distribuições das taxas de deslocamentos para o talude com altura igual a 10m discretizado com as malhas: (a) Q1, (b) Q2, (c) Q3, (c) Q4, obtidos com a biblioteca gráfica OpenGL.

## 6 CONCLUSÕES

A adoção dos modelos híbrido de elementos finitos no presente trabalho, foi motivada pelo fato destes modelos apresentarem na sua formulação as equações de equilíbrio e compatibilidade de forma independente, o que possibilita a montagem dos PLs estático e cinemático para realizar a análise plástica limite por meio da programação matemática. Uma motivação adicional é que o elemento finito híbrido quadrilátero de quatro nós é provavelmente o elemento bilinear mais preciso para uma ampla gama de problemas de tensões e deformações planas (Zienkiewicz & Taylor, 1995).

No estudo de estabilidade de talude, pôde-se enfatizar uma vantagem importante do modelo híbrido de elementos finitos em relação ao modelo misto. Para se obter uma solução factível para o problema de estabilidade de talude, utilizando-se o elemento finito misto, é necessário adicionar condições de contorno de tensões na região onde o solo não possui condições de contorno essenciais definidas. No caso do modelo híbrido de elemento finito, as condições de contorno de tensões são satisfeitas naturalmente na formulação do elemento, devido à introdução da variável primária de deslocamento na superfície do elemento.

## REFERÊNCIAS

- PIAN, T. H. H. (1964). *Derivation of Element Stiffness Matrices by Assumed Stress Distributions*. AIAAJ.,2, , pp 1333-1336.
- PIAN, T. H. H. (1995). *State-of-the-Art Development of Hibrid/Mixed Finite Element Method*. Finite Element in Analysis and Design, vol 21, 5-20.
- FELIPPA, C. A. (2000). *Advanced Finite Element Methods* (ASEN 5367) – Department of Aerospace Engineering Structures, University of Colorado at Boulder, Colorado.
- PIAN, T. H. H. & SUMIHARA K. (1984.). *Rational Aproach for Assumed Stress Finite Elements*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol 20, 1685-1895.
- ZIENKIEWICZ, O. C. & TAYLOR R. L. (1995). *El Método de los Elementos Finitos I e II*, 4 Ed., McGraw-Hill, Madrid.
- PIAN, T. H. H. & TONG P. (1969). *Basis of Finite Element Methods for Solid Continua*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol.1, 3-28.
- Buzar M. A. R. (2004). *Modelos Híbridos de Elementos Finitos e de Contorno Aplicados à Análise Plástica Limite Em Engenharia*. Tese de doutorado, UnB. Brasília.
- CHEN, W. F. (1982). *Platicity in Reinforced Concrete*, McGraw-Hill, New York.
- SANTOS DA SILVA, L., SAHLIT, C. L. & FARIAS, M. M. (1999a). *Aplicação da Análise Plástica Limite aos Métodos Probabilísticos em Geotecnia*. Anais do XX Congresso Ibero Latino-Americano de Métodos Computacionais para Engenharia (XX CILAMCE), São Paulo.
- SANTOS DA SILVA, L., FARIAS, M. M. & SAHLIT, C. L. (1999b). *Plastic Limit Analysis in Geotechnics using the Finite Element Method plus Linear and Non Linear Mathematical Programming*, Proceedings of the Seventh International Symposium on Numerical Models in Geomechanics (VII NUMOG), Graz., 215-220.
- BUZAR, M. A R., PARTRIDGE, P. W., SAHLIT, C. L., SANTOS DA SILVA, L. & FARIAS, M. M. (2003). *Hybrid Finite Elements for the Plastic Limit Analysis of Geotechnical Problems*. VII International Conference on Computational Plasticity (COMPLAS). CIMNE, Barcelona.
- SAHLIT, C. L (1992). *Mathematical Programming Methods for Dynamically Loaded Rigid-Plastic Framed Structures*, PhD. Thesis, Departament of Civil Engineering, Imperial College, University of London, London.
- SAHLIT, C. L. (1993). *Análise Elastoplástica das Estruturas*, Apostilas do Curso de Mestrado em Engenharia Civil, UnB, Brasília.
- SMITH, D. L. (1990). *Plastic Limit Analysis, Mathematical Programming Methods in Structural Plasticity*, ed. D. Lloyd Smith (ed.), Springer-Verlag, Vienna, chapter 5, 61-82.
- SCHRAGE L. (1991). *LINDO User's Manual – Release 5.0*. The Scientific Press, San Francisco.
- NAYLOR D. J. PANDE G. N. SIMPSON P. TABB R. (1981). *Finite Element in Geomechanical Engineering*, 1a. Ed., Pineridge, Swansea.
- BRINKRARAVE, R. B. J. & VERMEER, P. A. (1998). *PLAXIS - Finite Element Code for Soil and Rock Analysis*. Stuttgart.