

ANÁLISIS DE PROBLEMAS ELASTO-VISCOPLÁSTICOS EN CONFORMADO DE METALES

Walter B. Castelló y Fernando G. Flores

*Departamento de Estructuras, Universidad Nacional de Córdoba, Casilla de Correo 916, Córdoba,
Argentina, wcastello@efn.uncor.edu - fflores@efn.uncor.edu,
<http://www.efn.unc.edu.ar/departamentos/estruct/>*

Palabras Clave: elementos finitos, grandes deformaciones, viscoplasticidad, deformaciones impuestas.

Resumen. En este trabajo se ha implementado un esquema numérico que permite estudiar problemas elasto-viscoplásticos isotérmicos en metales sometidos a grandes deformaciones como sucede en el proceso de forjado o extrusión. Esto se ha realizado empleando un elemento triangular, definido por tres nudos con solo grados de libertad de traslación y donde la evaluación del gradiente de deformación es función de la geometría de los elementos adyacentes. Esta aproximación en deformaciones impuestas sobre un triángulo lineal, permite evitar los inconvenientes que produce el bloqueo volumétrico debido al flujo plástico isócoro y además facilitar la implementación de algoritmos de contacto para tener en cuenta la acción de las herramientas. Se han analizado sólidos isótropos empleando un código con integración explícita de las ecuaciones de gobierno, aplicando una Formulación Lagrangiana Actualizada asociada a un modelo elasto-viscoplástico unificado basado en la descomposición multiplicativa del tensor de deformaciones. Los resultados muestran un buen desempeño, tanto de la aproximación en deformaciones impuestas como del algoritmo elasto-viscoplástico generalizado propuesto, y además se desprende que el esquema propuesto resulta eficiente y preciso cuando se lo aplica al estudio de casos industriales.

1. INTRODUCCIÓN

En la actualidad un gran porcentaje de los procesos de conformado plástico de metales se realizan en caliente a temperaturas muy superiores a la de referencia o temperatura ambiente. Solo una pequeña cantidad de geometrías resultan susceptibles de ser conformadas en frío (temperatura de referencia o ambiente), y en particular se trata de ejes o piezas cilíndricas que implican cambios geométricos simples. El análisis de estos procesos de conformado plástico en frío, involucra aspectos complejos como el flujo plástico isócoro, importantes cambios en la geometría y contacto con las herramientas. Sin embargo, el análisis se vuelve aun más complejo cuando se considera a la temperatura como variable puesto que, además del acoplamiento termo-mecánico, los metales muestran un fuerte comportamiento viscoso a temperaturas superiores a un tercio de la temperatura de fusión. El comportamiento viscoso del material hace necesario recurrir a modelos elasto-viscoplásticos si se desea caracterizar correctamente el comportamiento del metal durante la simulación de conformado. Más aun se deben modificar los algoritmos de contacto a fin de evitar elevadas tensiones espurias entre piezas y herramientas.

En estas aplicaciones se requiere de fuertes discretizaciones y resulta más versátil el uso de elementos de bajo orden de interpolación con grados de libertad con sentido físico claro (desplazamientos) para facilitar la interpretación de los resultados. En dos dimensiones esto conduce a elementos triangulares lineales o cuadriláteros bilineales, sin embargo estos elementos muestran bloqueo volumétrico en problemas de deformaciones finitas. Además en el caso de triángulos es necesario un malla muy fina si se desean obtener resultados precisos. En el caso del elemento cuadrilátero bilineal las formulaciones para aumentar la eficiencia y robustez del mismo han tenido una evolución importante, lográndose elementos que no bloquean en problemas cuasi-incompresibles o con mallas gruesas. Las diferentes aproximaciones desarrolladas en cuadriláteros comprenden desde la adición de modos incompatibles, la integración reducida o selectiva, el método B-barra, e inclusive las formulaciones más modernas en deformaciones impuestas y/o mejoradas. Como ejemplos de estas mejoras se pueden citar los trabajos de [Simo y Rifai \(1990\)](#), [César de Sá y Natal Jorge \(1999\)](#), [Armero \(2000\)](#) y las referencias que allí se mencionan. Mientras que en el caso de triángulos se han desarrollado aproximaciones que introducen grados de libertad que no son desplazamientos, formulaciones mixtas o híbridas, y también formulaciones F-barra dentro de las cuales se enmarca este trabajo. Algunos trabajos en esta área son los de [Felippa \(2003\)](#), [Zienkiewicz et al. \(1998\)](#) y [Souza Neto et al. \(2003\)](#).

Además aun sin considerar el cambio en la temperatura (proceso isotérmico), cuando el proceso de conformado se realiza a temperaturas elevadas la viscosidad juega un rol importante en el proceso. El trabajo de [Chaboche \(2008\)](#) presenta una valiosa revisión de los modelos constitutivos asociados al comportamiento viscoplástico de los materiales, en dicho trabajo se presenta un modelo generalizado asociado a deformaciones plásticas pequeñas y moderadas, que sin embargo puede ser extendido a grandes deformaciones plásticas sin perder su validez. En el trabajo de [Chaboche \(2008\)](#) la generalización de la teoría constitutiva para incluir los efectos de la viscoplasticidad surge de la elección de un potencial viscoplástico que es función de una tensión equivalente (ej.: von Mises, Hill, etc.) a partir de la cual se puede obtener una función monótonica que describa el comportamiento del parámetro de consistencia viscoplástico. Los modelos de [Perzyna \(1966\)](#), [Lemaitre \(1971\)](#) y [Ponthot \(2002\)](#) pueden obtenerse como un caso particular del modelo viscoplástico generalizado o unificado propuesto por [Chaboche \(2008\)](#). Sin embargo esta generalización no es la única posible, otros modelos donde se unifica el comportamiento plástico y viscoso se diferencian por la elección de distintas funciones para la viscosidad y en particular por la forma de evaluar del endurecimiento cinemático (el cual resulta imprescindible

en los casos donde la carga no es monotónica o es cíclica), entre estos modelos unificados se tienen los que han sido desarrollados a partir de los trabajos iniciales de Miller (1976), Bodner y Partom (1975), Robinson (1978), Cernocky y Krempl (1980) y Delobelle (1988). Hay que destacar también que existen otros tipos de teorías constitutivas no generalizadas, como ser: (a) división de las deformaciones inelásticas en la suma de deformaciones plásticas más deformaciones de creep que resultan independientes entre sí, (b) teorías basadas en múltiples mecanismos de deformación y múltiples criterios de evolución de las variables que definen el modelo constitutivo, o (c) modelos constitutivos con transformaciones macro-micromecánicas. El trabajo de Chaboche (2008) presenta y compara brevemente algunos de estos modelos.

Este trabajo resulta de la extensión de otros dos, Castelló y Flores (2006, 2008), en donde se empleó un elemento triangular cuya geometría se define por tres nudos con solo grados de libertad de traslación y posee la característica de que la evaluación del gradiente es función de la geometría de los elementos adyacentes. En este trabajo se han analizado sólidos isótropos bidimensionales empleando dicho elemento triangular y un modelo elasto-viscoplástico basado en la descomposición multiplicativa del tensor de deformaciones, bajo una formulación Lagrangiana Actualizada como la propuesta por García Garino (1993), la cual disminuye la cantidad de operaciones a nivel elemental y mejora la eficiencia computacional. El modelo de viscoplasticidad que se ha empleado aquí está basado en el modelo clásico de plasticidad dependiente del tiempo propuesto por Perzyna (1966, 1971). Este modelo elasto-viscoplástico unificado fue adaptado inicialmente por Ponthot (2002) a una teoría constitutiva hipoeelástica, y posteriormente en los trabajos de Ponthot et al. (2005) y Garino et al. (2006) se ha extendido al modelo elasto-plástico hiperelástico basado en la formulación Lagrangiana Actualizada mencionado anteriormente a fin de incorporar los efectos viscosos a la plasticidad de una manera generalizada.

El contenido de este trabajo se resume a continuación. La Sección 2 presenta el algoritmo de integración viscoplástico, para lo cual previamente se presentan las hipótesis cinemáticas que se desprenden de la descomposición multiplicativa del tensor gradiente de deformaciones y las características del modelo elasto-viscoplástico unificado. La Sección 3 por su parte presenta una metodología de cálculo del parámetro de consistencia viscoplástico en su forma más general cuando la evolución del mismo está definido por una ecuación no-lineal. Luego la Sección 4 presenta someramente la aproximación en deformaciones impuestas empleada en este trabajo. Los resultados obtenidos con este modelo elasto-viscoplástico generalizado se presentan en la Sección 5. Por último la Sección 6 contiene un compendio de las conclusiones que surgen a partir de este trabajo.

2. ALGORITMO DE INTEGRACIÓN ELASTO-VISCOPLÁSTICO

2.1. Hipótesis asociadas a la descomposición multiplicativa

Se considera un sólido en su posición original o indeformada, ocupando un dominio Ω_0 en el espacio \mathbb{R}^3 y cuyo contorno queda definido por Γ_0 . Si resulta posible definir una función $\varphi(\mathbf{X}, t)$, que relacione en todo momento la configuración de referencia Ω_0 con otra cualquiera Ω_t a la cual se puede denominar actual o deformada, entonces es posible definir el tensor gradiente de la deformación como:

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \varphi(\mathbf{X}, t)}{\partial \mathbf{X}} \quad (1)$$

El modelo cinemático empleado en este trabajo surge de la descomposición multiplicativa del gradiente de deformación \mathbf{F} de acuerdo a Lee (1969), en sus partes elástica \mathbf{F}^e y plástica \mathbf{F}^p

de la forma:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^e \cdot \mathbf{F}^p \quad (2)$$

en donde se supone que la parte plástica no modifica el volumen (flujo plástico isócoro) de modo que $\det(\mathbf{F}^p) = 1$ y $\det(\mathbf{F}) = \det(\mathbf{F}^e) = J$.

El modelo presenta una evidencia física muy clara, similar a los que sucede en el análisis de monocristales. Además como resultado de los trabajos actuales en el área microestructural este modelo goza de una elevada aceptación, y por este motivo se lo extiende al análisis de sólidos policristalinos. El principal inconveniente radica en que esta descomposición queda exactamente definida salvo una rotación de cuerpo rígido, inconveniente que originó importantes controversias en el pasado. Actualmente se acepta que la ecuación (2) es suficiente para definir sin ambigüedades la descomposición multiplicativa en el caso de materiales isotrópicos, que de hecho es el tipo de material que se estudia en este trabajo. Además en este trabajo no se considera el acoplamiento termo-mecánico y el proceso es isotérmico, sin embargo a diferencia de los trabajos precedentes [Castelló y Flores \(2007, 2008\)](#) en este caso la plasticidad no es independiente del tiempo.

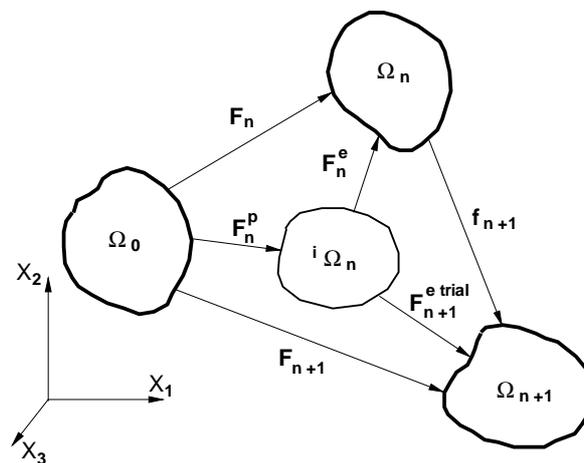


Figura 1: Esquema de configuraciones empleado en las relaciones cinemáticas y en la integración de la ecuación constitutiva.

La Figura 1 presenta un esquema de las configuraciones involucradas cuando se aplica la descomposición multiplicativa. En esta figura se observa la inclusión de una configuración adicional denominada *configuración intermedia* (denotada por ${}^i\Omega_t$), la cual tiene la característica de ser una configuración libre de tensiones.

El algoritmo elasto-viscoplástico que se emplea en este trabajo surge a partir de los trabajos de [Ponthot \(2002\)](#); [Ponthot et al. \(2005\)](#) y [Garino et al. \(2006\)](#), los cuales representan una extensión del modelo de plasticidad independiente del tiempo propuesto por [García Garino \(1993\)](#) al dominio de la viscoplasticidad. Al igual que en el caso elasto-plástico, el problema con plasticidad dependiente del tiempo se descompone en dos: un problema elástico donde las variables viscoplásticas no cambian (predictor elástico) y un problema viscoplástico donde el estado elástico se mantiene sin variaciones (corrector viscoplástico), de modo que la resolución de ambos es equivalente a la solución del problema original. En el modelo viscoplástico empleado en este trabajo se pretende mantener las ventajas del algoritmo de [García Garino \(1993\)](#), asociadas a una eficiente integración de la ecuación constitutiva a nivel elemental. Este

modelo elasto-viscoplástico considera además una regla de flujo asociativa con endurecimiento isótropo.

2.2. Modelo elasto-viscoplástico propuesto

En el caso del problema clásico de viscoplasticidad se puede generalizar la cinemática a partir de la descomposición aditiva de:

$$\mathbf{e} = \mathbf{e}^e + \mathbf{e}^{vp} \quad (3)$$

$$\mathbf{d} = \mathbf{d}^e + \mathbf{d}^{vp} \quad (4)$$

en donde el supraíndice $()^{vp}$ hace referencia a la contraparte viscoplástica, de las componentes plásticas de la deformación \mathbf{e}^p y de la velocidad de deformación \mathbf{d}^p .

A diferencia del caso de plasticidad independiente de la velocidad de deformación, la tensión efectiva $\bar{\sigma}$ no está restringida a permanecer dentro del dominio definido por la superficie de fluencia, es decir no es necesario cumplir $\bar{\sigma}_e \leq \sigma_y$. Por el contrario, es posible encontrar una sobretensión que se define como:

$$d = \langle \bar{\sigma} - \sigma_y \rangle \quad (5)$$

siendo $\langle \rangle$ la función de Mac Auley que implica $\langle x \rangle = (x + |x|) / 2$, y donde claramente el proceso inelástico tiene lugar cuando $d > 0$. Para este problema se plantea un modelo del tipo Perzyna definido por la regla de flujo:

$$\mathbf{d}^{vp} = \langle \phi(d, \eta) \rangle \mathbf{n} \quad (6)$$

donde η es la viscosidad del material. La estructura de la ecuación (6) sugiere que la función ϕ juega un papel similar al *parámetro viscoplástico* γ^{vp} .

La viscoplasticidad clásica admite una interpretación alternativa, pues la misma representa la regularización de la plasticidad independiente del tiempo. Se puede demostrar que los modelos viscoplásticos de este tipo, resultan en un funcional de penalización regularizado con un parámetro de penalización $1/\eta > 0$, que actúa sobre la función de máxima disipación plástica (de acuerdo con la propuesta de [Simo y Hughes \(1998\)](#), pag. 106).

En el trabajo de [Ponthot \(2002\)](#), se reemplaza el parámetro de consistencia por una función de la sobretensión definido como:

$$\phi(d, \eta) = \dot{\gamma}^{vp} = \sqrt{\frac{3}{2}} \left\langle \frac{\bar{\sigma} - \sigma_y}{\eta (e^{vp})^{1/n}} \right\rangle^m \quad (7)$$

Teniendo en cuenta las ecuaciones (6) y (7), puede verse que:

$$\mathbf{d}^{vp} = \dot{\gamma}^{vp} \mathbf{n} \quad (8)$$

y de (8) podemos obtener la velocidad de deformación viscoplástica equivalente como:

$$\dot{e}^{vp} = \sqrt{\frac{2}{3}} \mathbf{d}^{vp} : \mathbf{d}^{vp} = \sqrt{\frac{2}{3}} \dot{\gamma}^{vp} = \left\langle \frac{\bar{\sigma} - \sigma_y}{\eta (e^{vp})^{1/n}} \right\rangle^m \quad (9)$$

La ecuación (9) permite establecer una nueva expresión para la ecuación de restricción elasto-viscoplástica, la cual puede escribirse como:

$$\bar{f} = \bar{\sigma} - \sigma_y (e^{vp}) - \eta (e^{vp})^{1/n} (\dot{e}^{vp})^{1/m} \quad (10)$$

Esta última ecuación es una generalización del clásico criterio de Mises-Huber para el caso de materiales con plasticidad dependientes de la velocidad de deformación. El criterio clásico de von Mises puede obtenerse haciendo $\eta = 0$ (material sin efectos viscosos). Por otra parte si $\eta = \infty$ entonces se tiene un material elástico para todo el rango de deformaciones.

La función viscosa elegida, último término de la ecuación (10), corresponde a una combinación de la ley de creep secundaria (una relación potencial entre la velocidad de deformación y la tensión) y la ley de creep primaria (una relación potencial entre la deformación y la tensión), lo cual da lugar a una relación potencial multiplicativa muy fácil de implementar. Además como se observa en el trabajo de Lemaitre (1971) los parámetros del material que definen esta forma multiplicativa pueden determinarse de manera práctica y sencilla, y el modelo muestra buenos resultados aun en grandes deformaciones al menos para cargas cuasi-monotónicas crecientes.

2.3. Algoritmo de integración elasto-viscoplástico

Antes de presentar el algoritmo de integración se muestran algunos detalles de la cinemática asociada a las configuraciones observadas en la Figura 1. Si se desea obtener la actualización de una determinada configuración, por ejemplo una configuración anterior φ_n , a partir de la aplicación de un desplazamiento incremental \mathbf{u}_n , se tiene:

$$\mathbf{x}_{n+1} = \varphi_{n+1}(\mathbf{X}) = \varphi_n(\mathbf{X}) + \mathbf{u}_n[\varphi_n(\mathbf{X})] \quad (11)$$

donde la nueva configuración geométrica está referida a la configuración anterior conocida $\varphi_n(\mathbf{X})$, y al igual que los desplazamientos actuales \mathbf{u}_n son datos, por lo cual resulta trivial la obtención de la configuración actualizada. Y de acuerdo con la Figura 1 y la ecuación (11), se puede obtener el *gradiente de deformación total* en el paso actual \mathbf{F}_{n+1} como:

$$\mathbf{F}_{n+1} = \frac{\partial \mathbf{x}_{n+1}}{\partial \mathbf{X}} = [\mathbf{1} + \nabla_{x_n} \mathbf{u}_n] \mathbf{F}_n \quad (12)$$

y por otra parte aplicando la regla de la cadena:

$$\mathbf{F}_{n+1} = \frac{\partial \mathbf{x}_{n+1}}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial \mathbf{x}_{n+1}}{\partial \mathbf{x}_n} \frac{\partial \mathbf{x}_n}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{f}_{n+1} \mathbf{F}_n \quad (13)$$

Se observa también que el *gradiente relativo* \mathbf{f}_{n+1} resulta ser:

$$\mathbf{f}_{n+1} = \frac{\partial \mathbf{x}_{n+1}}{\partial \mathbf{x}_n} = \mathbf{F}_{n+1} \mathbf{F}_n^{-1} = \mathbf{1} + \nabla_{x_n} \mathbf{u}_n \quad (14)$$

La formulación propuesta por García Garino (1993) emplea la inversa del gradiente de deformación relativo \mathbf{f}_{n+1}^{-1} y se calcula este tensor directamente con la ecuación:

$$\mathbf{f}_{n+1}^{-1} = \frac{\partial \mathbf{x}_n}{\partial \mathbf{x}_{n+1}} = \mathbf{1} - \nabla_{x_n} \mathbf{u}_n \quad (15)$$

donde (15) se puede obtener a partir de (12). En este trabajo la inversa del gradiente relativo se obtiene como:

$$\mathbf{f}_{n+1}^{-1} = \mathbf{x}_n^I \mathbf{N}_{\mathbf{x}_{n+1}}^I \quad (16)$$

y resulta claro que se deben evaluar las derivadas de las funciones de forma en cada paso de tiempo. Por otra parte el gradiente de deformación total en (13), puede obtenerse de igual manera como:

$$\mathbf{F}_{n+1} = \mathbf{x}_{n+1}^I \mathbf{N}_{\mathbf{x}_n}^I \quad (17)$$

donde las derivadas se evalúan una sola vez respecto de la configuración de referencia.

La formulación empleada en este trabajo se corresponde con un esquema Lagrangiano Actualizado (FLA), y el algoritmo está basado en el propuesto por [García Garino \(1993\)](#). A partir de la descomposición multiplicativa del tensor gradiente de las deformaciones, considerando (2) y (14) se tiene:

$$\mathbf{F}_{n+1}^{e\text{ trial}} = \mathbf{F}_{n+1} \mathbf{F}_n^{p-1} = \mathbf{f}_{n+1} (\mathbf{F}_n \mathbf{F}_n^{p-1}) = \mathbf{f}_{n+1} \mathbf{F}_n^e \quad (18)$$

y a partir de esta última expresión es posible obtener la parte elástica del tensor de Finger según:

$$[\mathbf{b}_{n+1}^{e-1}]^{\text{trial}} = (\mathbf{F}_{n+1}^{e\text{ trial}})^{-T} (\mathbf{F}_{n+1}^{e\text{ trial}})^{-1} = \mathbf{f}_{n+1}^{-T} (\mathbf{b}_n^{e-1}) \mathbf{f}_{n+1}^{-1} \quad (19)$$

El tensor elástico de prueba (*trial*) de Almansi puede calcularse empleando el tensor de Finger (19) a través de la siguiente ecuación:

$$\mathbf{e}_{n+1}^{e\text{ trial}} = \frac{1}{2} \left[\mathbf{1} - (\mathbf{b}_{n+1}^{e-1})^{\text{trial}} \right] \quad (20)$$

y con este se puede obtener el tensor elástico de prueba de Kirchhoff de acuerdo a:

$$\boldsymbol{\tau}_{n+1}^{\text{trial}} = K \text{tr} (\mathbf{e}_{n+1}^{e\text{ trial}}) \mathbf{1} + 2\mu \text{dev} (\mathbf{e}_{n+1}^{e\text{ trial}}) \quad (21)$$

en donde, considerando que $\text{dev} (\mathbf{e}_{n+1}^e) = -\frac{1}{2} \text{dev} (\mathbf{b}_{n+1}^{e-1})$, la parte desviadora de la tensión de Kirchhoff queda definida por:

$$\mathbf{s}_{n+1}^{\text{trial}} = 2\mu \text{dev} (\mathbf{e}_{n+1}^{e\text{ trial}}) = -\mu \text{dev} \left([\mathbf{b}_{n+1}^{e-1}]^{\text{trial}} \right) \quad (22)$$

Se comprueba si el estado de carga es plástico, a partir de la ecuación de Mises-Huber, que para este caso tiene la forma:

$$f_{n+1} = \|\mathbf{s}\| - \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_y (e^{vp}) = d \leq 0 \quad (23)$$

siendo \mathbf{s} la parte desviadora del tensor de tensiones de Kirchhoff, $\sigma_y (e^{vp})$ es la ley de fluencia del material y e^p el parámetro de endurecimiento.

Si no se sobrepasa la superficie de fluencia ($f_{n+1}^{\text{trial}} = f(\mathbf{s}_{n+1}^{\text{trial}}, e_n^p) \leq 0$), el estado es elástico con lo cual pueden adoptarse las deformaciones (20) y las tensiones (21) como el estado resultante. En caso contrario, si $f_{n+1}^{\text{trial}} > 0$, es necesario corregir el estado elástico de prueba de acuerdo al esquema de la Figura 2.

A partir de la regla de flujo definida en (8), en donde $\mathbf{n} = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\tau}}$ es la dirección del flujo plástico en la configuración actual (ver Figura 2), el cambio en la parte viscoplástica del tensor derecho de Cauchy-Green se puede definir como:

$$\dot{\mathbf{C}}^{vp} = 2\phi^* (\dot{\gamma}^{vp} \mathbf{n}) = 2\dot{\gamma}^{vp} \mathbf{N} \quad (24)$$

donde ϕ^* implica una transformación del tipo *pull-back* para expresar la regla de flujo respecto a la configuración original, y esta ecuación (24) puede discretizarse con un esquema en diferencias finitas:

$$\frac{\mathbf{C}_{n+1}^{vp} - \mathbf{C}_n^{vp}}{\Delta t} = 2\dot{\gamma}^{vp} \mathbf{N}_{n+1} \quad (25)$$

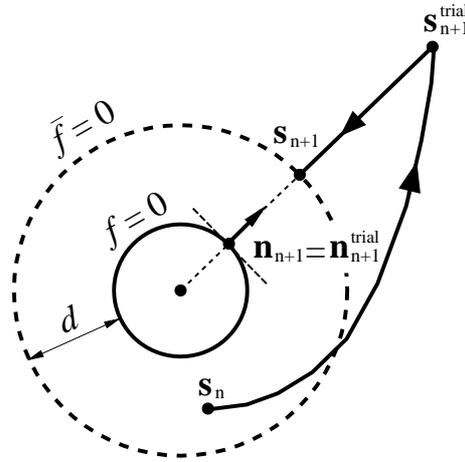


Figura 2: Representación conceptual del esquema de retorno radial para el modelo J_2 elasto-viscoplástico.

esta expresión puede reescribirse en variables espaciales, haciendo uso de una transformación del tipo *push-forward* a la que indicaremos con ϕ_* , y resulta:

$$\phi_* \mathbf{C}_{n+1}^{vp} = \phi_* \mathbf{C}_n^{vp} + 2\gamma^{vp} \mathbf{n}_{n+1} \tag{26}$$

En variables espaciales, el primer término $\phi_* \mathbf{C}_{n+1}^{vp}$ puede expresarse como:

$$\phi_* \mathbf{C}_{n+1}^{vp} = \mathbf{F}_{n+1}^{-T} \mathbf{C}_{n+1}^{vp} \mathbf{F}_{n+1}^{-1} = \mathbf{b}_{n+1}^{e-1} \tag{27}$$

Por otra parte, para el segundo término $\phi_* \mathbf{C}_n^{vp}$, se calcula de manera similar empleando para ello el tensor gradiente de la deformación total en el paso de tiempo actual (\mathbf{F}_{n+1}) y aprovechando su relación el tensor gradiente de deformación relativo (\mathbf{f}_{n+1}) resulta:

$$\phi_* \mathbf{C}_n^{vp} = \mathbf{F}_{n+1}^{-T} \mathbf{C}_n^{vp} \mathbf{F}_{n+1}^{-1} \tag{28}$$

con lo cual, de acuerdo a (19) se tiene:

$$\begin{aligned} \phi_* \mathbf{C}_n^{vp} &= \mathbf{f}_{n+1}^{-T} \mathbf{b}_n^{e-1} \mathbf{f}_{n+1}^{-1} \\ &= [\mathbf{b}_{n+1}^{e-1}]^{\text{trial}} \end{aligned} \tag{29}$$

Entonces el esquema de actualización del tensor elástico de Finger en variables espaciales se puede definir a partir de las ecuaciones (26), (27) y (29), obteniéndose:

$$\mathbf{b}_{n+1}^{e-1} = [\mathbf{b}_{n+1}^{e-1}]^{\text{trial}} + 2\gamma^{vp} \mathbf{n}_{n+1} \tag{30}$$

a partir de la cual puede corregirse el tensor elástico de Almansi:

$$\mathbf{e}_{n+1}^e = \frac{1}{2} [\mathbf{1} - \mathbf{b}_{n+1}^{e-1}] = (\mathbf{e}_{n+1}^e)^{\text{trial}} - 2\gamma^{vp} \mathbf{n}_{n+1} \tag{31}$$

Aplicando la ecuación (22) en la (30) resulta:

$$\begin{aligned} -\mu \text{dev} (\mathbf{b}_{n+1}^{e-1}) &= -\mu \text{dev} \left([\mathbf{b}_{n+1}^{e-1}]^{\text{trial}} \right) + 2\mu\gamma^{vp} \mathbf{n}_{n+1} \\ \mathbf{s}_{n+1} &= \mathbf{s}_{n+1}^{\text{trial}} - 2\mu\gamma^{vp} \mathbf{n}_{n+1} \end{aligned} \tag{32}$$

que es la ecuación que permite actualizar las tensiones desviadoras. El tensor de tensiones de Kirchhoff actualizado queda definido adicionando a la ecuación (32) la parte volumétrica de las tensiones de modo que:

$$\tau_{n+1} = K \text{tr}(\mathbf{e}_{n+1}^e) \mathbf{1} + \mathbf{s}_{n+1} \quad (33)$$

Considerado que la regla de flujo es asociativa, ecuación (9), la evolución del parámetro de endurecimiento viscoplástico esta definido por:

$$\dot{e}^{vp} = \frac{e_{n+1}^{vp} - e_n^{vp}}{\Delta t} = \sqrt{\frac{2}{3}} \dot{\gamma}^{vp} \quad (34)$$

y simplemente:

$$e_{n+1}^{vp} = e_n^{vp} + \sqrt{\frac{2}{3}} \gamma^{vp} \quad (35)$$

El parámetro de consistencia viscoplástico γ^{vp} , puede obtenerse a partir de la función generalizada de Mises-Huber definida en (10), empleando las definiciones (32), (34) y (35), resulta:

$$\begin{aligned} \bar{f}(\gamma^{vp}) = & \sqrt{[\mathbf{s}_{n+1}^{\text{trial}} - 2\mu\gamma^{vp}\mathbf{n}_{n+1}] : [\mathbf{s}_{n+1}^{\text{trial}} - 2\mu\gamma^{vp}\mathbf{n}_{n+1}]} - \sqrt{\frac{2}{3}} [\sigma_y(e^{vp})]_{n+1} + \\ & - \eta \left(e_n^{vp} + \sqrt{\frac{2}{3}} \gamma^{vp} \right)^{1/n} \left(\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\gamma^{vp}}{\Delta t} \right)^{1/m} \end{aligned} \quad (36)$$

esta ecuación es una expresión no lineal en γ^{vp} y puede resolverse fácilmente a través de algún método iterativo.

A partir de las definiciones previas, la forma débil de las ecuaciones de balance en la configuración de referencia actualizada puede escribirse como:

$$\delta \Pi = \int_{\Omega_n} [\delta \mathbf{e}_{\text{AL}} \cdot \boldsymbol{\tau}] d\Omega_n + \delta \Pi_{\text{ext}} = 0 \quad (37)$$

donde \mathbf{e}_{AL} es el tensor de deformaciones de Almansi (23) definido a partir de la parte elástica del tensor de Finger.

3. EVALUACIÓN DEL PARÁMETRO DE CONSISTENCIA

En el caso más general, cuando los tres parámetros que definen el endurecimiento viscoplástico toman los valores típicos de los metales y aleaciones en condiciones de conformado plástico, la ecuación no lineal (36) debe ser resuelta por algún método iterativo y la opción más adecuada resulta un método del tipo Newton-Raphson dado que es una ecuación no lineal escalar.

Considerando que la variable independiente es el parámetro viscoplástico γ^{vp} , la ecuación resulta:

$$\gamma_{n+1}^{vp} = \gamma_n^{vp} - \frac{\bar{f}(\gamma_n^{vp})}{\bar{f}'(\gamma_n^{vp})} \quad (38)$$

por lo tanto es necesario conocer la derivada primera $\bar{f}' = d\bar{f}/d\gamma^{vp}$ de la función de fluencia respecto al parámetro de consistencia viscoplástico. Recordando la ecuación (32), se puede derivar cada término de esta ecuación de manera separada.

Si se tiene en cuenta que el tensor dirección del flujo plástico está definido como $\mathbf{n}_{n+1} = \mathbf{s}_{n+1}^{\text{trial}} / \|\mathbf{s}_{n+1}^{\text{trial}}\|$, entonces:

$$\begin{aligned} \bar{f}_1 &= \left(\left[\mathbf{s}_{n+1}^{\text{trial}} - 2\mu\gamma^{vp} \frac{\mathbf{s}_{n+1}^{\text{trial}}}{\|\mathbf{s}_{n+1}^{\text{trial}}\|} \right] : \left[\mathbf{s}_{n+1}^{\text{trial}} - 2\mu\gamma^{vp} \frac{\mathbf{s}_{n+1}^{\text{trial}}}{\|\mathbf{s}_{n+1}^{\text{trial}}\|} \right] \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \|\mathbf{s}_{n+1}^{\text{trial}}\| - 2\mu\gamma^{vp} \end{aligned} \quad (39)$$

y la derivada del primer término en (36), resulta:

$$\frac{d\bar{f}_1}{d\gamma^{vp}} = -2\mu \quad (40)$$

La parte de la ecuación asociada a la evolución de la superficie de fluencia, resulta generalmente una función de la deformación viscoplástica efectiva e^{vp} de acuerdo a:

$$\bar{f}_2 = -\sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_y(e^{vp}) \quad (41)$$

aplicando la regla de la cadena, su derivada respecto del parámetro de consistencia resulta:

$$\frac{d\bar{f}_2}{d\gamma^{vp}} = \frac{\partial \bar{f}_2}{\partial e^{vp}} \frac{\partial e^{vp}}{\partial \gamma^{vp}} \quad (42)$$

y considerando (31), entonces:

$$\frac{d\bar{f}_2}{d\gamma^{vp}} = -\frac{2}{3} \frac{d\sigma_y}{de^{vp}} \equiv -\frac{2}{3} A' \quad (43)$$

Esta ecuación puede evaluarse fácilmente si se conoce como varía la tensión de fluencia del material en función de la deformación viscoplástica efectiva. En el caso de endurecimiento isótropo lineal, esta derivada resulta simplemente la pendiente de endurecimiento A' .

Por último en el caso del término asociado al comportamiento viscoplástico la derivada resulta simplemente la de una multiplicación de funciones potenciales, por lo tanto siendo el término:

$$\bar{f}_3 = -\eta \left(e_n^{vp} + \sqrt{\frac{2}{3}}\gamma^{vp} \right)^{1/n} \left(\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\gamma^{vp}}{\Delta t} \right)^{1/m} \quad (44)$$

la derivada del mismo es:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{f}_3}{d\gamma^{vp}} &= -\eta \left[\frac{d}{d\gamma^{vp}} \left(e_n^{vp} + \sqrt{\frac{2}{3}}\gamma^{vp} \right)^{1/n} \left(\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\gamma^{vp}}{\Delta t} \right)^{1/m} + \right. \\ &= \left. \left(e_n^{vp} + \sqrt{\frac{2}{3}}\gamma^{vp} \right)^{1/n} \frac{d}{d\gamma^{vp}} \left(\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\gamma^{vp}}{\Delta t} \right)^{1/m} \right] \end{aligned} \quad (45)$$

y resulta:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{f}_3}{d\gamma^{vp}} &= -\eta \left[\frac{2}{n} \sqrt{\frac{2}{3}} \left(e_n^{vp} + \sqrt{\frac{2}{3}} \gamma^{vp} \right)^{(1-n)/n} \left(\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\gamma^{vp}}{\Delta t} \right)^{1/m} + \right. \\ &= \left. \left(e_n^{vp} + \sqrt{\frac{2}{3}} \gamma^{vp} \right)^{1/n} \frac{1}{m\Delta t} \sqrt{\frac{2}{3}} \left(\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\gamma^{vp}}{\Delta t} \right)^{(1-m)/m} \right] \end{aligned} \quad (46)$$

La expresión final para la derivada de la función de fluencia generalizada, considerando las ecuaciones (40), (43) y (46), resulta:

$$\begin{aligned} \frac{df}{d\gamma^{vp}} &= -2\mu - \frac{2}{3}A' - \eta \left[\frac{2}{n} \sqrt{\frac{2}{3}} \left(e_n^{vp} + \sqrt{\frac{2}{3}} \gamma^{vp} \right)^{(1-n)/n} \left(\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\gamma^{vp}}{\Delta t} \right)^{1/m} + \right. \\ &= \left. \left(e_n^{vp} + \sqrt{\frac{2}{3}} \gamma^{vp} \right)^{1/n} \frac{1}{m\Delta t} \sqrt{\frac{2}{3}} \left(\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\gamma^{vp}}{\Delta t} \right)^{(1-m)/m} \right] \end{aligned} \quad (47)$$

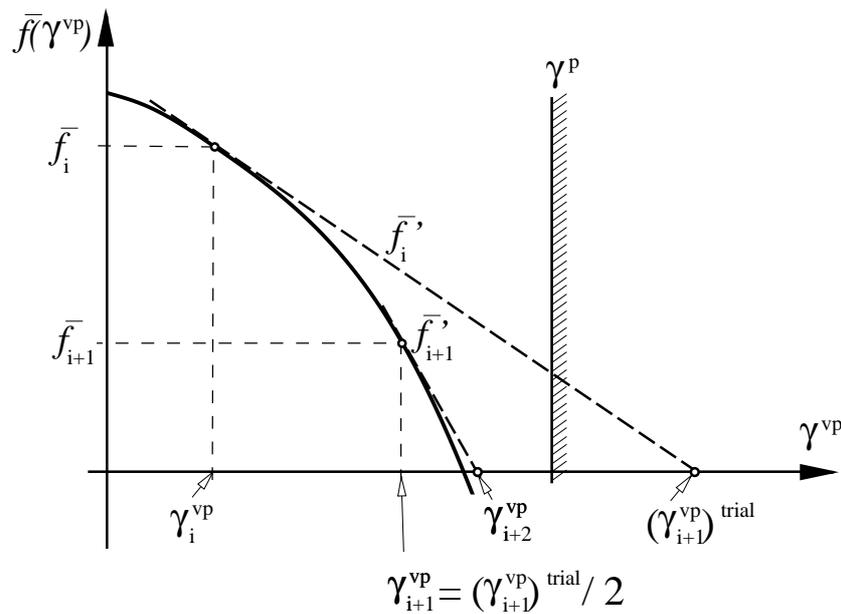


Figura 3: Esquema iterativo de Newton-Raphson combinado con bisección para evaluar el parámetro γ^{vp}

de modo que el incremento se puede evaluar a partir de las ecuaciones (32) y (47) según:

$$\delta\gamma_i^{vp} = \frac{\bar{f}(\gamma_i^{vp})}{f'(\gamma_i^{vp})} \quad (48)$$

y el nuevo valor resulta:

$$(\gamma_{i+1}^{vp})^{trial} = \gamma_i^{vp} - \delta\gamma_i^{vp} \quad (49)$$

es importante destacar que este nuevo valor debe cumplir con la restricción $(\gamma_{i+1}^{vp})^{\text{trial}} < \gamma^p$, el cual surge del caso límite cuando el problema es elasto-plástico y los efectos viscosos son nulos. Si se observa la Figura (3) esto implica la necesidad de emplear un método de bisección de manera de devolver al valor de prueba $(\gamma_{i+1}^{vp})^{\text{trial}}$ al entorno de validez del algoritmo. Teniendo en cuenta esto entonces, el nuevo valor resulta:

$$\gamma_{i+1}^{vp} = \begin{cases} (\gamma_{i+1}^{vp})^{\text{trial}} & \rightarrow (\gamma_{i+1}^{vp})^{\text{trial}} < \gamma^p \\ (\gamma_{i+1}^{vp})^{\text{trial}} / 2 & \rightarrow (\gamma_{i+1}^{vp})^{\text{trial}} > \gamma^p \end{cases} \quad (50)$$

en (50) se aplica bisección tantas veces sea necesario de manera que $\gamma_{i+1}^{vp} \in [0, \gamma^p]$ y el parámetro plástico puede obtenerse según:

$$\gamma^p = \frac{3f^{\text{trial}}}{6\mu + 2A'} \quad (51)$$

Existe un caso particular cuando la viscosidad puede considerarse independiente del endurecimiento ($n = \infty$) y el comportamiento viscoplástico es lineal con respecto a la sobretensión ($m = 1$); para este caso es posible encontrar una expresión analítica cerrada para evaluar el parámetro viscoplástico y resulta:

$$\gamma^{vp} = \frac{3f^{\text{trial}}}{6\mu + 2(A' + \frac{\eta}{\Delta t})} \quad (52)$$

de la comparación de las ecuaciones (51) y (52), se observa que en este caso se recupera el problema elasto-plástico con un coeficiente de endurecimiento ficticio $A^* = A' + \eta/\Delta t$.

4. APROXIMACIÓN EN ELEMENTOS FINITOS

La eficiencia de la aproximación en deformaciones impuestas que se utilizó en este trabajo, ya ha sido probada con éxito en otros trabajos anteriores [Castelló y Flores \(2007, 2008\)](#) y en las referencias que allí se mencionan. Esta aproximación consiste en la aplicación de un elemento triangular de bajo orden de interpolación y cuyos grados de libertad son únicamente los desplazamientos. El punto de partida en esta aproximación es discretizar el dominio con elementos triangulares de tres nodos, pero a diferencia de la aproximación convencional en triángulos lineales, la evaluación de las deformaciones en cada triángulo se hace teniendo en cuenta la geometría de los tres elementos adyacentes. Así entonces se tiene una parcela de cuatro elementos, un elemento central sobre el cual se desea evaluar la deformación y tres elementos adyacentes a los lados del elemento central de acuerdo a la Figura 4. Se observa en esta figura que se mantienen los vértices del elemento central en el espacio isoparamétrico, sin embargo puede verse la existencia de los tres elementos adyacentes.

Entonces en la Figura 4 se observa que la parcela de elementos triangulares queda definida por seis nodos y de esta forma, si bien se parte de elementos triangulares lineales de tres nodos, se llega a una aproximación cuadrática cuyas funciones de forma no son estándar. Las funciones de forma y los detalles de la aproximación pueden verse en los trabajos [Castelló y Flores \(2007, 2008\)](#).

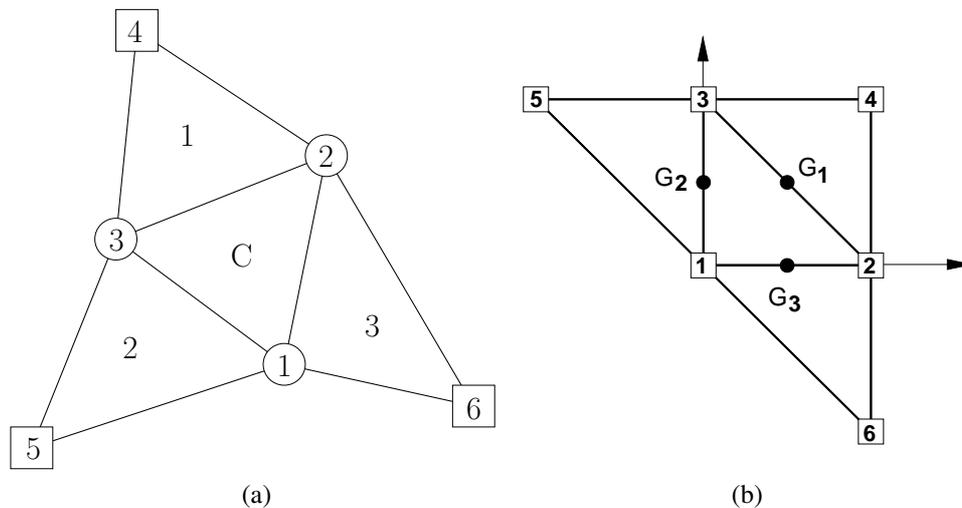


Figura 4: Parcela de elementos triangulares. (a) Coordenadas espaciales. (b) Coordenadas naturales.

5. RESULTADOS NUMÉRICOS

En este apartado se presenta un compendio de los resultados obtenidos con la formulación propuesta en los párrafos precedentes, se han analizado sólidos en pequeñas y grandes deformaciones elasto-viscoplásticas y se ha hecho especial énfasis en problemas de deformación plana. Los resultados obtenidos a partir de la aproximación propuesta en este trabajo se identifican con las siglas *TR2D*.

5.1. Placa traccionada con un agujero

Este problema ha sido propuesto originalmente por [Alfano et al. \(2001\)](#), aunque en este trabajo se han empleado los resultados de [Garino et al. \(2006\)](#) a los fines de comparación. La Figura 5-a muestra la geometría del problema, la cual consiste en una placa de 36×20 m con un orificio central de 5 m de radio. El material tiene las siguientes propiedades mecánicas: un módulo elástico $E = 210$ GPa, un coeficiente de Poisson $\nu = 0,3$, una tensión de fluencia $\sigma_y = 240$ MPa y un módulo de endurecimiento isótropo $A' = 0$ (sin endurecimiento). Más aun se ha considerado un modelo viscoplástico lineal del tipo de Perzyna, con $n = \infty$ y $m = 1$; y se han considerado distintos módulos de viscosidad del material η .

Aprovechando la simetría del problema solo se ha modelado un cuarto de la placa, de acuerdo con lo que se observa en la Figura 5-a, y se han utilizado 576 elementos triangulares según se muestra en la Figura 5-b.

5.1.1. Pequeñas deformaciones

Para lograr deformaciones pequeñas se han desplazado los extremos de la placa una longitud $d = 0,05$ m, y se han considerado en este caso tres distintos valores de $\eta = 1 \times 10^2$; 1×10^{12} ; 1×10^{15} . La Figura 6-a muestra una comparativa de los resultados obtenidos en pequeñas deformaciones, y se observa que las curvas para los casos límites muestran una importante concordancia en los resultados. Puede notarse también que para valores bajos de $\eta = 1 \times 10^2$ el problema está dominado por lo efectos plásticos, mientras que para elevados valores de $\eta = 1 \times$

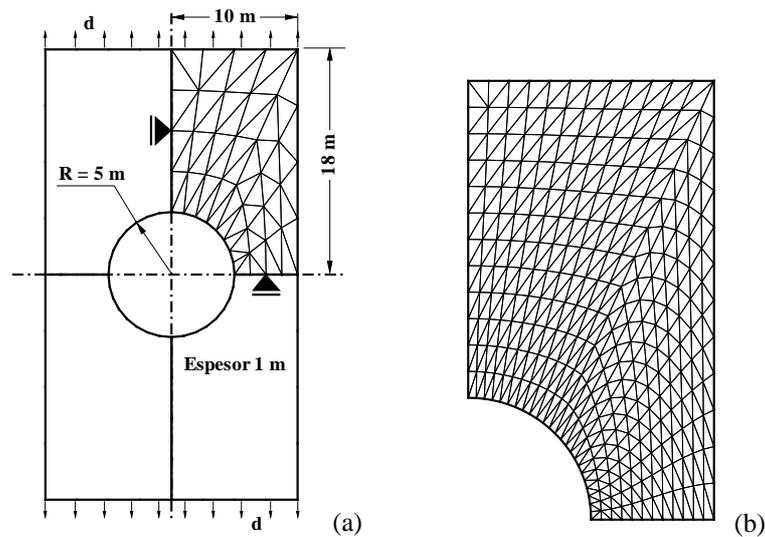


Figura 5: Placa plana con un agujero en deformación plana. (a) Geometría de análisis para el caso de la placa con un agujero. (b) Malla de elementos triangulares empleada en el análisis.

10^{15} el problema es dominado por los efectos viscosos comportándose como elástico perfecto.

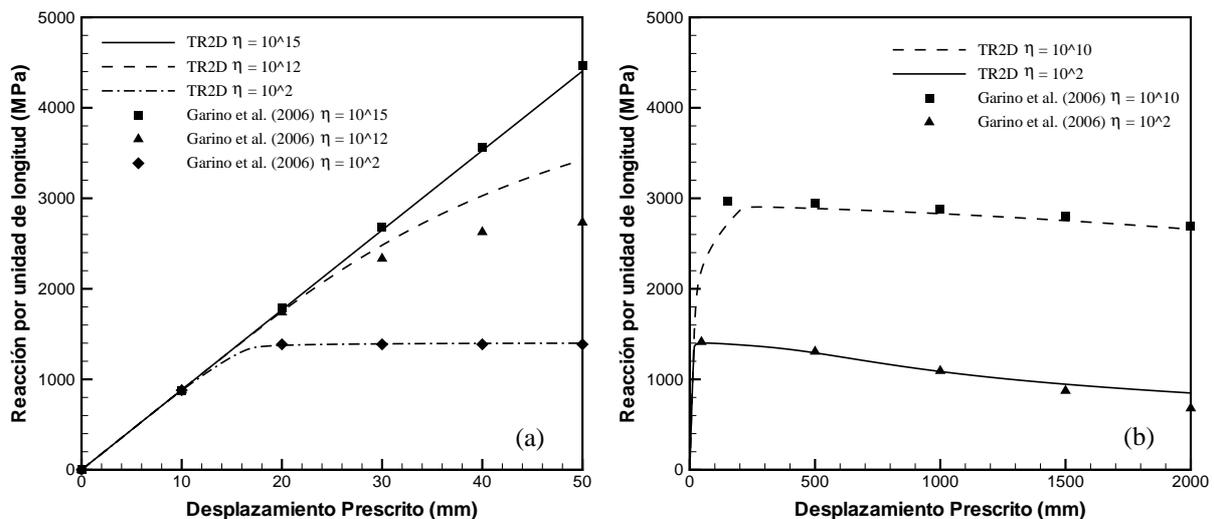


Figura 6: Curva de carga vs desplazamiento. (a) Pequeñas deformaciones. (b) Grandes deformaciones.

En la Figura 6-a puede observarse además que existen diferencias para el caso viscoplástico donde el valor de $\eta = 1 \times 10^{12}$ resulta intermedio. Estas discrepancias pueden deberse posiblemente a la aproximación elemental empleada en el elemento TR2D, que es muy diferente a la utilizada en los trabajos de Garino et al. (2006) y Ponthot et al. (2005).

Por otra parte la adopción de valores de viscosidad muy elevados, con el cual se recuperaría el caso elástico perfecto, conlleva a la aparición de inestabilidad de origen numérico, más precisamente oscilaciones que favorecen la aparición de zonas con deformaciones viscoplásticas espurias. Se ha detectado que estas inestabilidades desaparecen cuando se disminuye el paso de tiempo de integración de las ecuaciones de movimiento, o bien si se quita energía al sistema

empleando algún método de amortiguamiento de la respuesta.

5.1.2. Grandes deformaciones

En este caso los extremos de la placa se han desplazado una distancia mucho mayor que el caso anterior, $d = 2$ m, y se han considerado solo aquellos casos que resultan de interés para el análisis de problemas industriales. En los problemas industriales, de acuerdo al trabajo de [Lemaitre y Chaboche \(1994\)](#) los metales pueden exhibir valores de viscosidad η del orden de 1×10^2 MPa s hasta 1×10^{10} MPa s, mientras que n varía entre 2 para materiales muy viscosos hasta 100 para materiales con elevada fluidez, por último en el caso del exponente m varía entre 2 y 50 lo cual define el comportamiento de endurecimiento por deformación.

En consecuencia se han ensayado dos casos de grandes deformaciones, tomando los límites propuestos en el trabajo de [Lemaitre y Chaboche \(1994\)](#) los cuales son $\eta = 1 \times 10^2$ hasta $\eta = 1 \times 10^{10}$. Los resultados obtenidos pueden verse en la Figura 6-b, los cuales se han comparado con los obtenidos en el trabajo de [Garino et al. \(2006\)](#) y puede verse que se ajustan a los valores esperados.

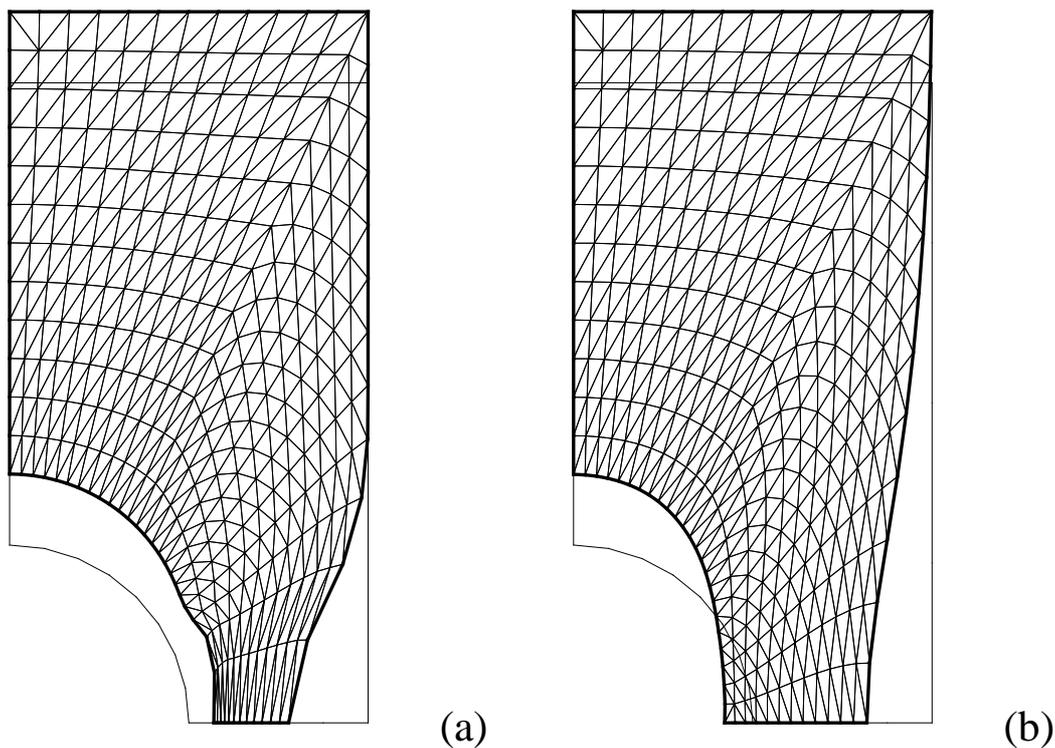


Figura 7: Deformadas de la placa en deformación plana. (a) $\eta = 1 \times 10^2$. (b) $\eta = 1 \times 10^{10}$.

La Figura 7 muestra las deformadas de la placa con un agujero en deformación plana, considerando los dos valores límites del coeficiente de viscosidad η . Comparativamente con el trabajo de [Garino et al. \(2006\)](#) estas deformadas son muy similares, más aun puede observarse en la Figura 7-a que en el caso de $\eta = 1 \times 10^2$ (cuasi elasto-plástico) la placa muestra una zona de estricción muy marcada, mientras se puede ver en la Figura 7-b que cuando $\eta = 1 \times 10^{10}$ el comportamiento se asemeja más a un caso elástico (sin la zona de estricción).

5.2. Cilindro con presión interna y externa

Este problema fue propuesto inicialmente por [Bonnet y Mukherjee \(1996\)](#) y también ha sido resuelto por [Liang et al. \(2007\)](#) empleando un método basado en elementos de contorno (BEM). La Figura 8-a muestra la geometría del cilindro con un radio interno $R = 1$ y un radio externo $R = 2$, se ha aprovechado la simetría para modelar y analizar solo un cuarto del mismo. La presiones interna y externa tienen la misma magnitud, alcanzando un valor $p = 0,01$ cuando el tiempo resulta $t = 0,1$. El modelo de elementos finitos empleado para el análisis consta de 72 elementos triangulares.

El comportamiento del material está definido por un módulo de corte $\mu = 1$ y un coeficiente de Poisson $\nu = 0,3$. Desde el punto de vista plástico, se asume endurecimiento isótropo según la siguiente ley $\sigma_y(e^{vp}) = 0,002 + 0,002 \cdot e^{vp}$. El material propuesto en los trabajos de [Bonnet y Mukherjee \(1996\)](#) y [Liang et al. \(2007\)](#) responde a una ley viscoplástica potencial lineal, la cual es equivalente a tomar en el caso de este trabajo un coeficiente $n = \infty$ (sin endurecimiento multiplicativo), $m = 1$ (viscosidad lineal respecto de la sobretensión), y además se evalúan dos coeficientes de viscosidad $\eta = 1 \times 10^{-10}$ (para recuperar el caso elasto-plástico) y $\eta = 100$ (el cual resulta elevado si se observa la relación μ/η).

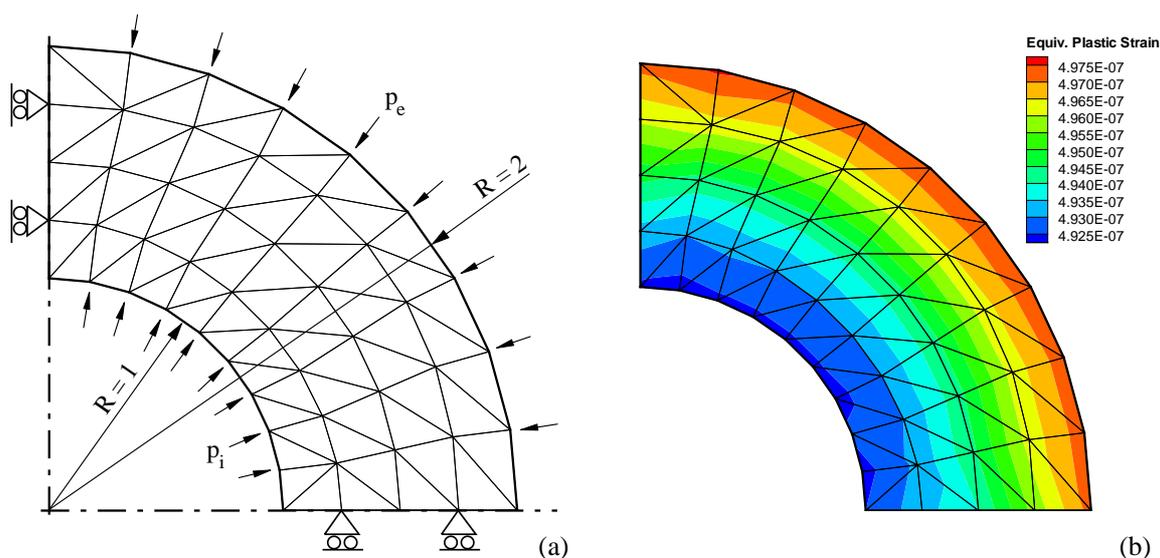


Figura 8: Cilindro con presión interna y externa en deformaciones viscoplásticas. (a) Geometría y malla de elementos triangulares. (b) Distribución de deformaciones plásticas equivalentes.

Si bien el modelo elasto-viscoplásticos del trabajo de [Liang et al. \(2007\)](#) es similar al propuesto en este trabajo, no es precisamente el mismo, y teniendo en cuenta que el método empleado para resolver el problema en ese trabajo es distinto al empleado aquí, no debe esperarse que los resultados sean iguales. Por otra parte en el trabajo de [Bonnet y Mukherjee \(1996\)](#) se ha determinado la solución analítica para el caso elasto-plástico, pero no presenta resultados para el caso elasto-viscoplástico.

La Figura 8-b muestra la distribución de las deformaciones elasto-viscoplásticas en el cilindro, obtenidas con el esquema presentado en este trabajo para el caso $\eta = 1 \times 10^2$.

La Tabla 1 muestra un resumen de los resultados obtenidos, y se los compara con los trabajos de los autores mencionados. En el caso elasto-plástico no existen discrepancias, sin embargo en el caso elasto-viscoplástico existen diferencias importantes entre los resultados obtenidos. Se

debe destacar que en la medida que se aumenta el coeficiente de viscosidad η se aproxima cada vez más al caso elástico perfecto, y por lo tanto la deformación viscoplástica equivalente debe tender a cero, bajo esta hipótesis el resultado obtenido en este trabajo parece más cercano a la realidad dado que el cambio entre $\eta = 1 \times 10^{-10}$ a $\eta = 1 \times 10^2$ es importante.

Tabla 1: Comparativa de resultados para el cilindro con presión interna y externa.

Resultados	$\eta = 1 \times 10^{-10}$ (cuasi elasto-plástico)	$\eta = 1 \times 10^2$
Solución Exacta Bonnet y Mukherjee (1996)	$e^{vp} = 7,6864 \times 10^{-4}$	-
BEM Liang et al. (2007)	$e^{vp} = 7,6861 \times 10^{-4}$	$e^{vp} = 7,1374 \times 10^{-4}$
TR2D (este trabajo)	$e^{vp} = 7,6865 \times 10^{-4}$	$e^{vp} = 4,9750 \times 10^{-7}$

6. CONCLUSIONES

En este trabajo se ha implementado un elemento en deformaciones impuestas con solo grados de libertad de desplazamiento, capaz de lidiar con algunos problemas típicos en el análisis de deformaciones finitas como son el bloqueo volumétrico y la factibilidad de incorporar algoritmos de contacto de manera sencilla. El elemento ha probado ser de suma utilidad en problemas con cambios importantes de la geometría de análisis, mejor aun si se emplea remallado adaptativo según se ha demostrado en el trabajo previo de [Castelló y Flores \(2008\)](#) y las referencias que allí se citan.

En este trabajo se ha adicionado a este elemento un modelo constitutivo unificado, capaz de tener en cuenta los efectos viscosos además de la plasticidad de una manera generalizada. Este modelo resulta fácil de implementar, ya que solo adiciona una función con los términos viscosos al modelo constitutivo basado en la descomposición multiplicativa propuesto originalmente por [García Garino \(1993\)](#). La función viscosa elegida surge de una forma potencial multiplicativa, de fácil implementación y que resulta válida aun en grandes deformaciones como se desprende del trabajo de [Ponthot \(2002\)](#), y más aun cuando se considera que en el conformado de metales las cargas son comúnmente monotónicas crecientes. Hay que destacar que el modelo actual solo contempla endurecimiento isótropo, pero puede extenderse sin mayores inconvenientes a fin de tener en cuenta el endurecimiento cinemático.

Se han analizado sólidos bidimensionales en deformaciones elasto-plásticas con muy pequeña viscosidad y deformaciones elasto-viscoplásticas con viscosidad dominante, los resultados muestran concordancia con los obtenidos por otros autores. En regímenes cercanos a la plasticidad, es decir cuando los efectos viscosos son despreciables, los resultados se ajustan con mucha precisión en la mayor parte de los trabajos consultados durante la realización de este estudio. Por otra parte cuando los efectos viscosos no resultan despreciables, o más aun cuando son dominantes en el comportamiento del material, los resultados presentan discrepancias. Estas discrepancias dependen no solo del modelo constitutivo empleado por otros autores, si no que además resultan ser función de la aproximación elemental elegida y de la forma en que se integran las ecuaciones de movimiento que gobiernan el problema.

Los resultados muestran además que bajo ciertas condiciones, con valores muy elevados de la viscosidad, el esquema de solución presentado en este trabajo presenta oscilaciones espurias.

Sin embargo hay que destacar que los valores de viscosidad a los que se presenta este problema no son relevantes desde el punto de vista de las aplicaciones industriales. Se han estudiado estas oscilaciones y su origen, y aunque los estudios no son concluyentes parecen estar asociados a la aproximación numérica empleada. Como consecuencia las oscilaciones en los resultados desaparecen cuando se emplean pasos de tiempo más pequeños durante la integración explícita de las ecuaciones de gobierno del problema.

AGRADECIMIENTOS

Los autores desean agradecer el apoyo financiero del Dpto de Estructuras de Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de la U.N.C.

REFERENCIAS

- Alfano G., De Angelis F., y Rosatti L. General solution procedures in elasto/viscoplasticity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190:5123–5147, 2001.
- Armero F. On the locking and stability of finite elements in finite deformation plane strain problems. *Computers and Structures*, 75:261–290, 2000.
- Bodner S. y Partom Y. Constitutive equations for elastic-viscoplastic strain-hardening materials. *Journal of Applied Mechanics*, 42:385–389, 1975.
- Bonnet M. y Mukherjee S. Implicit bem formulations for usual and sensitivity problems in elastoplasticity using the consistent tangent operator concept. *International Journal of Solids*, 33:4461–4480, 1996.
- Castelló W. y Flores F. Análisis bidimensional de sólidos con grandes deformaciones aplicando un elemento con deformaciones impuestas. *Mecánica Computacional*, XXV:329–349, 2006.
- Castelló W. y Flores F. Análisis bidimensional de sólidos con grandes deformaciones aplicando remallado adaptativo. *Mecánica Computacional*, XXVI:844–862, 2007.
- Castelló W. y Flores F. A triangular finite element with local remeshing for the large strain analysis of axisymmetric solids. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 198:332–343, 2008.
- Cernocky E. y Krempl E. A theory of thermoviscoplasticity based on infinitesimal total strain. *International Journal of Solids and Structures*, 16:723–741, 1980.
- César de Sá J. y Natal Jorge R. New enhanced strain element incompressible problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 44:229–248, 1999.
- Chaboche J.L. A review of some plasticity and viscoplasticity constitutive theories. *International Journal of Plasticity*, 24:1642–1693, 2008.
- Delobelle P. Sur les lois de comportement viscoplastique à variables internes. *Rev. Phys. Appl.*, 23:1–61, 1988.
- Felippa C. A study of optimal membrane triangles with drilling freedoms. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192:2125–2168, 2003.
- García Garino C. *Un modelo numérico para el análisis de sólidos elasto-plásticos sometidos a grandes deformaciones*. PhD thesis, E.T.S. Ingenieros de Caminos. Universidad Politécnica de Catalunya, 1993.
- Garino C., Ponthot J.P., Mirasso A., Koeune R., Jeunechamps P.P., y Cargelio C. Numerical simulation of large strain rate dependent j2 problems. *Mecánica Computacional*, XXV:1927–1946, 2006.
- Lee E. Elastic-plastic deformation at finite strains. *Journal of Applied Mechanics*, 36:1–6, 1969.
- Lemaitre J. *Sur la détermination des lois de comportement des matériaux élasto-*

- viscoplastiques*. Thèse de doctorat d'état, Univ. Paris VI, 1971.
- Lemaitre J. y Chaboche J.L. *Mechanics of solid material*. Cambridge University Press, 1994.
- Liang L., Liu Y., y Xu B. Design sensitivity analysis for parameters affecting geometry, elastic-viscoplastic material constant and boundary condition by consistent tangent operator-based boundary element method. *International Journal of Solids and Structures*, 44:2571–2592, 2007.
- Miller A. An inelastic constitutive model for monotonic, cyclic, and creep deformation: Part i. equations development and analytical procedures. *Journal of Engineering Materials and Technology*, 98 (2):97–105, 1976.
- Perzyna P. Fundamental problems visco-plasticity. In G. Kuerti, editor, *Advanced in Applied Mechanics*, Academic Press, 9:243–377, 1966.
- Perzyna P. Thermodynamic theory of plasticity. In Chia-Shun Yih, editor, *Advanced in Applied Mechanics*, Academic Press, 11:313–355, 1971.
- Ponthot J.P. Unified stress update algorithm for the numerical simulation of large deformation elasto-plastic and elasto-viscoplastic processes. *International Journal of Plasticity*, 18:91–126, 2002.
- Ponthot J.P., Garino C., y Mirasso A. Large strain elasto/viscoplastic constitutive model. theory and numerical scheme. *Mecánica Computacional*, XXIV:441–454, 2005.
- Robinson D. *A unified creep-plasticity model for structural metals at high temperature*. Report ORNL-TM-5969, Oak Ridge Nat. Lab., 1978.
- Simo J. y Hughes T. *Computational Inelasticity*. Springer-Verlag New York, Inc., 1998.
- Simo J. y Rifai M. A class of mixed assumed strain methods and the method of incompatible modes. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 29:1595–1638, 1990.
- Souza Neto E., Pires F., y Owen D. A new f-bar based method for linear triangles and tetrahedra in the finite strain analysis of nearly incompressible solids. *VII International Conference on Computational Plasticity COMPLAS 2003, CIMNE, Barcelona*, 2003.
- Zienkiewicz O., Rojek J., Taylor R., y Pastor M. Triangles and tetrahedra in explicit dynamic codes for solids. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 43:565–583, 1998.