

SOBRE A RESPOSTA DINÂMICA DE UMA VIGA COM AMORTECIMENTO

Rosemaira Dalcin Copetti^a, Dionéia Migotto^b and Daniela de Rosso Tolfo^c

^a*Departamento de Matemática, Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, RS, Brasil,
rmaira@smail.ufsm.br*

^b*PPG Matemática, Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, RS,
dioneia.migotto@bol.com.br*

^c*Graduação em Matemática, Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, RS,
danitolfo.cp@hotmail.com*

Palavras Chave: Euler Bernoulli , Resposta Fundamental, Amortecimento, Modos, Resposta Forçada.

Resumo. O estudo de vibrações é de grande interesse na literatura. Neste trabalho consideramos uma viga fixa-livre com amortecimento e de comprimento L , modelada segundo a teoria para vigas de Euler- Bernoulli. Anexamos na extremidade livre da viga dispositivos tipo massa, mola e amortecedor. A análise modal é utilizada na obtenção dos modos e das frequências naturais da viga. O estudo é realizado a partir de uma formulação em blocos, e a solução da equação modal é escrita em termos da base dinâmica, gerada pela solução de uma equação diferencial de quarta ordem. A resposta forçada da viga pode ser escrita em termos de uma integral de convolução que envolve a resposta fundamental.

1 INTRODUÇÃO

Para escrever a equação da viga usando a teoria de Euler-Bernoulli algumas considerações devem ser feitas, por exemplo, ignora-se a distorção causada pelo cisalhamento e pela inércia rotacional. Assume-se que o material é elástico, que a viga é homogênea, que as seções planas permanecem planas após a deformação e a curvatura da viga é pequena, (Ginsberg, 2002), (Gorman, 1975), (Kelly, 2006), (Rao, 2007). O estudo de vibrações de vigas tem sido estudado por vários autores, entre eles, (Naguleswaran, 2002), (Vu et al., 2000), (Gürçöze and Erol, 2006), (Oliveto et al., 1997). A maior parte dos modelos apresentados na literatura não inclui o termo de amortecimento na equação, embora qualquer sistema físico possua amortecimento. O problema com amortecimento torna-se complexo uma vez que a análise modal conhecida como clássica não desacopla a equação original, conseqüentemente o método da superposição modal padrão não pode ser utilizado para avaliar a resposta dinâmica. Neste caso, é necessário estabelecer novas condições de ortogonalidade para os modos. O método utilizado aqui para obtenção dos modos de vibração foi introduzido por (Tsukazan, 2005), onde é realizada uma formulação em blocos, a qual pode ser aplicada a vigas com condições de contorno clássicas e não clássicas e também em vigas segmentadas. A obtenção dos modos é realizada a partir de uma equação diferencial de quarta ordem, cuja solução é escrita em termos da base fundamental, (Claeyssen and Tsukazan, 1990), (Claeyssen et al., 1999). A análise dinâmica de sistemas mecânicos frequentemente envolve o cálculo de autovalores, que neste caso é facilitado pela escolha da base fundamental que torna as matrizes mais esparsas. A base fundamental é gerada pela resposta fundamental de um problema de valor inicial de quarta ordem.

2 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

Neste trabalho consideramos uma viga Euler-Bernoulli com amortecimento e de comprimento L , como mostra a Fig. 1, (Yang and Wu, 1997).

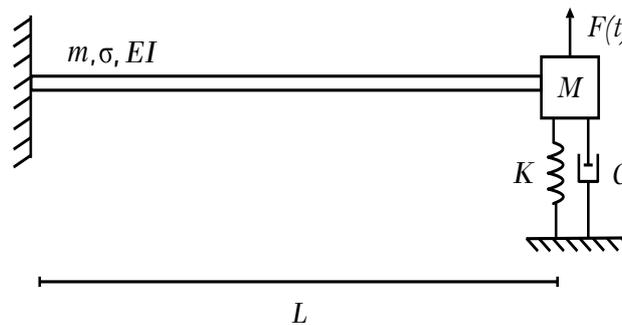


Figure 1: Viga fixa-livre com dispositivos em $x=L$

O deslocamento transversal da viga $w(t, x)$, incluindo o efeito do amortecimento é dado por

$$\rho A \frac{\partial^2 w(t, x)}{\partial t^2} + \sigma \frac{\partial w(t, x)}{\partial t} + EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = 0, \quad 0 < x < L, \quad (1)$$

onde

$m = \rho A$, ρ densidade, A área da seção transversal,
 $k = EI$, E módulo de Young, I momento de inércia de área,
 σ coeficiente de amortecimento viscoso.

As condições de contorno referentes ao problema são

$$\begin{aligned} w(t, 0) = 0, & & w_x(t, 0) = 0, \\ w_{xx}(t, L) = 0, & & EIw_{xxx}(t, L) = Mw_{tt}(t, L) + Cw_t(t, L) + Kw(t, L), \end{aligned}$$

onde a massa, M , a constante de amortecimento viscoso, C e a constante de rigidez da mola, K representam os dispositivos anexados na extremidade livre da viga.

3 ANÁLISE MODAL

Vibrações livres podem ser obtidas assumindo que as soluções para (1) são da forma

$$w(t, x) = e^{\lambda t} X(x), \quad x \in [0, L],$$

de modo que obtemos uma equação diferencial ordinária de quarta ordem dada por

$$X^{(iv)}(x) - \varepsilon^4 X(x) = 0, \quad x \in [0, L], \quad (2)$$

onde

$$\varepsilon^4 = -(\alpha + \lambda\beta)\lambda, \quad \alpha = \frac{\sigma}{EI} \quad \text{e} \quad \beta = \frac{m}{EI},$$

e com condições de contorno dadas por

$$\begin{aligned} X(0) = 0, & \quad X'(0) = 0, \\ X''(L) = 0, & \quad EIX'''(L) = (M\lambda^2 + C\lambda + K)X(L). \end{aligned} \quad (3)$$

A solução para (2) pode ser escrita convenientemente em termos da base (Claeyssen and Tsukazan, 1990; Claeyssen et al., 1999),

$$\Phi(x) = [h(x) \ h'(x) \ h''(x) \ h'''(x)], \quad (4)$$

isto é,

$$X(x) = c_1 h(x) + c_2 h'(x) + c_3 h''(x) + c_4 h'''(x) = \Phi(x)\mathbf{C}, \quad (5)$$

onde \mathbf{C} é um vetor de ordem 4×1 de componentes c_1, c_2, c_3, c_4 , e $h(x)$ é denominada solução fundamental, solução do problema de valor inicial

$$\begin{aligned} h^{(iv)}(x) - \varepsilon^4 h(x) &= 0, \\ h(0) = 0, \ h'(0) = 0, \ h''(0) = 0, \ h'''(0) &= 1. \end{aligned} \quad (6)$$

As condições de contorno da viga em $x = 0$ e as condições iniciais da equação que envolve a solução fundamental (6), implicam que $c_3 = c_4 = 0$ e portanto a equação modal (5) fica reduzida a

$$X(x) = c_1 h(x) + c_2 h'(x).$$

Condições de contorno clássicas ou não-clássicas podem ser escritas na forma

$$\begin{aligned} A_{11}X(0) + B_{11}X'(0) + C_{11}X''(0) + D_{11}X'''(0) &= 0, \\ A_{12}X(0) + B_{12}X'(0) + C_{12}X''(0) + D_{12}X'''(0) &= 0, \\ A_{21}X(L) + B_{21}X'(L) + C_{21}X''(L) + D_{21}X'''(L) &= 0, \\ A_{22}X(L) + B_{22}X'(L) + C_{22}X''(L) + D_{22}X'''(L) &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Substituindo (5) em (7), obtemos um sistema linear dependente de λ

$$\mathcal{U}(\lambda)\mathbf{C} = \mathbf{0}, \quad (8)$$

para o vetor $\mathbf{C} = (c_1, c_2, c_3, c_4)$ de ordem 4×1 . A matriz $\mathcal{U} = \mathcal{B}\Phi$ é de ordem 4×4 , \mathcal{B} é a matriz que carrega informações acerca das condições de contorno de ordem 4×8 e Φ é a matriz formada pela base de soluções nos extremos $x = 0$ e $x = L$, de ordem 8×4 .

Soluções não nulas para (8) são obtidas a partir da equação característica

$$\det(\mathcal{U}) = 0.$$

Uma formulação matricial em blocos para as matrizes das condições de contorno \mathcal{B}_0 em $x = 0$, \mathcal{B}_L em $x = L$, e para a matriz da base de soluções Φ dada por (4), pode ser escrita na forma

$$\mathcal{B}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B}_L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\lambda^2 M - \lambda C - K & 0 & 0 & EI \end{pmatrix}$$

e

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} h(x) & h'(x) & h''(x) & h'''(x) \\ h'(x) & h''(x) & h'''(x) & \epsilon^4 h(x) \\ h''(x) & h'''(x) & \epsilon^4 h(x) & \epsilon^4 h'(x) \\ h'''(x) & \epsilon^4 h(x) & \epsilon^4 h'(x) & \epsilon^4 h''(x) \end{pmatrix}$$

ou

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} \mathcal{B}_0 & 0 \\ 0 & \mathcal{B}_L \end{pmatrix}, \quad \Phi = \begin{pmatrix} \Phi(0) \\ \Phi(L) \end{pmatrix},$$

onde $\Phi(0)$ e $\Phi(L)$ são as matrizes da base de soluções em $x = 0$ e $x = L$, respectivamente, e as matrizes 0, denotam matrizes nulas de ordem 2×4 .

Resolvendo $\mathcal{U} = \mathcal{B}\Phi$, em $x = 0$ e $x = L$, obtemos

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ h''(L) & h'''(L) & \epsilon^4 h(L) & \epsilon^5 h'(L) \\ L_1 & L_2 & L_3 & L_4 \end{pmatrix},$$

onde

$$\begin{aligned} L_1 &= -(\lambda^2 M + \lambda C + K)h(L) + EIh'''(L), \\ L_2 &= -(\lambda^2 M + \lambda C + K)h'(L) + \epsilon EIh(L), \\ L_3 &= -(\lambda^2 M + \lambda C + K)h''(L) + \epsilon EIh'(L), \\ L_4 &= -(\lambda^2 M + \lambda C + K)h'''(L) + \epsilon EIh''(L). \end{aligned}$$

4 RESPOSTA FORÇADA

Embora todos os sistemas físicos possuam amortecimento, a análise dinâmica destes sistemas, está longe de ser completamente entendida. Uma vez que análise modal convencional não é diretamente aplicável a sistemas distribuídos amortecidos ou que envolvam condições de contorno não-clássicas, é necessário estabelecer condições de ortogonalidade para as autofunções, que desacoplem a equação original do sistema.

Consideremos a equação diferencial modal de quarta ordem (2), para os modos i e j , respectivamente

$$X_i^{(iv)}(x) - \varepsilon_i^4 X_i(x) = 0, \quad X_j^{(iv)}(x) - \varepsilon_j^4 X_j(x) = 0, \quad (9)$$

onde

$$\varepsilon_i^4 = -(\alpha + \lambda_i \beta) \lambda_i, \quad \varepsilon_j^4 = -(\alpha + \lambda_j \beta) \lambda_j, \quad \alpha = \frac{\sigma}{EI} \quad \text{e} \quad \beta = \frac{m}{EI}.$$

Multiplicando a primeira equação em (9) por $X_j(x)$, a segunda por $X_i(x)$, integrando de 0 a L , e usando as condições de contorno (3), obtemos

$$\begin{aligned} X_j(L)X_i'''(L) + \int_0^L X_i''(x)X_j''(x)dx - \varepsilon_i^4 \int_0^L X_i(x)X_j(x)dx &= 0, \\ X_i(L)X_j'''(L) + \int_0^L X_j''(x)X_i''(x)dx - \varepsilon_j^4 \int_0^L X_i(x)X_j(x)dx &= 0. \end{aligned}$$

Em (Copetti et al., 2010) foi considerado o caso com $M = K = 0$ e $C \neq 0$. Neste trabalho, para a obtenção das condições de ortogonalidade, consideramos $C = K = 0$, isto é, a condição de contorno (3), é dada por $EIX'''(L) = M\lambda^2 X(L)$. Nestas condições equação acima é dada por

$$\begin{aligned} \frac{M}{EI} \lambda_i^2 X_j(L)X_i(L) + \int_0^L X_i''(x)X_j''(x)dx - \varepsilon_i^4 \int_0^L X_i(x)X_j(x)dx &= 0, \\ \frac{M}{EI} \lambda_j^2 X_i(L)X_j(L) + \int_0^L X_j''(x)X_i''(x)dx - \varepsilon_j^4 \int_0^L X_i(x)X_j(x)dx &= 0, \end{aligned} \quad (10)$$

subtraindo a segunda equação de (10) da primeira, e depois de algumas manipulações obtemos a primeira relação de ortogonalidade:

$$[\sigma + m(\lambda_i + \lambda_j)] \int_0^L X_i(x)X_j(x)dx + (\lambda_i + \lambda_j)MX_i(L)X_j(L) = 0.$$

Multiplicando a primeira equação em (10) por λ_j^2 , a segunda por λ_i^2 e subtraindo uma da outra, obtemos a segunda relação de ortogonalidade:

$$\int_0^L EIX_i''(x)X_j''(x)dx + \frac{\lambda_i \lambda_j}{\lambda_i + \lambda_j} \sigma \int_0^L X_i(x)X_j(x)dx = 0.$$

A equação do movimento da viga Euler-Bernoulli dada em Fig. 1 sujeita a uma força $F(t)$ pode ser escrita como

$$m \frac{\partial^2 w(t, x)}{\partial t^2} + \sigma \frac{\partial w(t, x)}{\partial t} + EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = F(t) \delta(x - L), \quad 0 < x < L, \quad (11)$$

onde $\delta(x)$ denota a função Delta de Dirac.

Supondo uma solução, aproximada por séries, para (11) da forma

$$w(t, x) \simeq \sum_{i=1}^n X_i(x) \eta_i(t) \quad (12)$$

e substituindo em (11), obtemos

$$\sum_{i=1}^n [EIX_i^{(iv)}(x) \eta_i(t) + mX_i(x) \ddot{\eta}_i + \sigma X_i(x) \dot{\eta}_i(t)] = F(t) \delta(x - L).$$

Multiplicando a equação acima por $X_j(x)$, integrando de 0 a L e usando as condições de contorno e ortogonalidade, obtemos

$$\sum_{j=1}^n \frac{M}{m} \frac{X_i(L)X_j(L)}{\int_0^L X_i(x)X_j(x)dx} \ddot{\eta}_i(t) + \ddot{\eta}_i(t) + \frac{\sigma}{m} \dot{\eta}_i(t) - \frac{\lambda_i \lambda_j}{\lambda_i + \lambda_j} \frac{\sigma}{m} \eta_i(t) = F(t) \sum_{j=1}^n \frac{X_j(L)}{m \int_0^L X_i(x)X_j(x)dx}$$

com $i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, n$. A equação acima pode ser escrita na forma

$$\mathcal{M} \ddot{\eta}_i(t) + \mathcal{C} \dot{\eta}_i(t) + \mathcal{K} \eta_i(t) = \mathcal{F}(t), \quad (13)$$

onde

$$\mathcal{M} = 1 + \frac{M}{m} \sum_{i=1}^n \frac{X_j(L)X_i(L)}{\int_0^L X_i(x)X_j(x)dx}, \quad \mathcal{C} = \frac{\sigma}{m},$$

$$\mathcal{K} = -\frac{\lambda_i \lambda_j}{\lambda_i + \lambda_j} \frac{\sigma}{m}, \quad \mathcal{F}(t) = \frac{F(t)}{m} \sum_{i=1}^n \frac{X_j(L)}{\int_0^L X_i(x)X_j(x)dx}.$$

A solução de (13) pode ser escrita em termos de uma integral de convolução, isto é,

$$\eta_i(t) = \dot{\mathbf{h}}(t)\eta_i(0) + \mathbf{h}(t)\dot{\eta}_i(0) + \int_0^t \mathbf{h}(t-\tau)\mathcal{F}(\tau)d\tau,$$

sendo $\eta_i(0)$ e $\dot{\eta}_i(0)$ as condições iniciais e $\mathbf{h}(t)$ é a resposta impulso ou solução fundamental do sistema (13).

5 SIMULAÇÕES

Foram realizadas várias simulações variando os valores de M , K e C . Para efeitos de validação, apresentamos na Tabela 1 os resultados para os os primeiros cinco (5) autovalores λ obtidos através do método proposto e para os autovalores obtidos por (Yang and Wu, 1997).

Parâmetros da viga usados nas simulações: $EI = 1$, $\rho A = 16$ e $\sigma = 1.6$. Valores para os dispositivos anexados em $x = L$: $M = 4$, $C = 4$, $K = 8$.

Nas Figs. 2 e 3, são representados os quatro primeiros modos de vibração da viga fixa-livre, $X_i(x)$, $i = 1, 2, 3, 4$, com os dispositivos em $x = L = 1$, juntamente com o respectivo modo de vibração da viga fixa-livre clássica, ou seja, sem dispositivos anexados.

	Método Proposto	(Yang and Wu, 1997)
1	-0.27051682+1.14514090I	-0.2705+1.1451I
2	-0.13567314+4.49296000I	-0.1357+4.4930I
3	-0.08964396+13.25855386I	-0.0896+13.2586I
4	-0.07271319+26.88747089I	-0.0727+26.8877I
5	-0.06472743+45.42932818I	-0.0647+45.4297I

Table 1: Autovalores (λ) da viga com amortecimento viscoso e dispositivos em $x=L$.

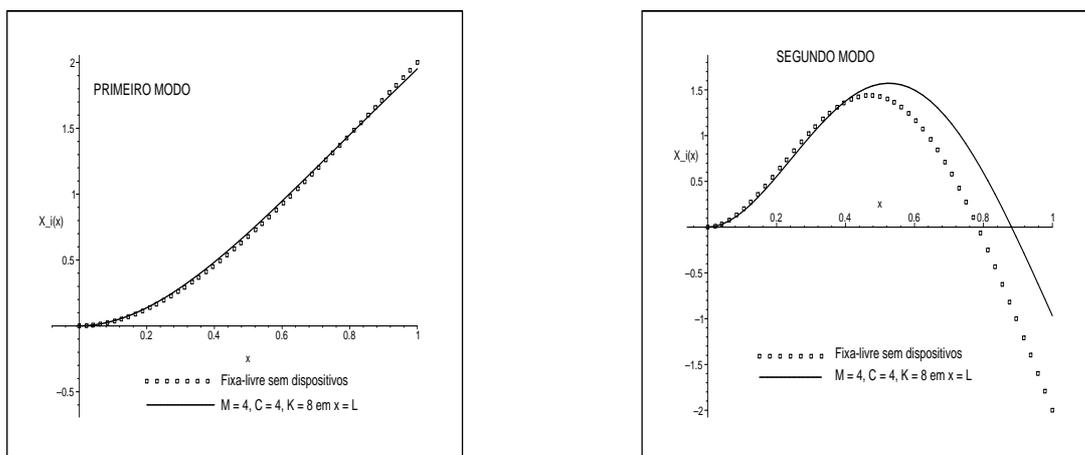


Figure 2: Primeiro e segundo modos de vibração da viga com e sem dispositivos em $x=L$

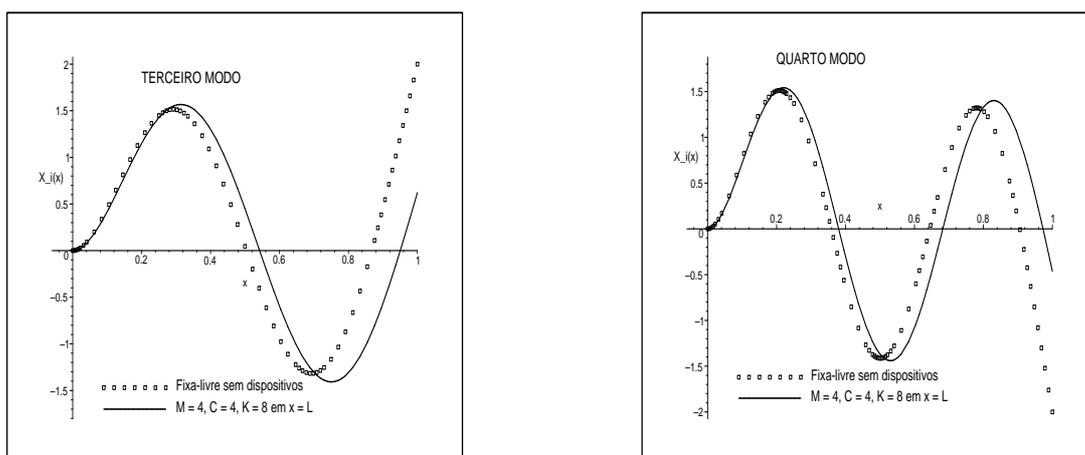


Figure 3: Terceiro e quarto modos de vibração da viga com e sem dispositivos em $x=L$

6 CONCLUSÕES

Neste trabalho foi considerada uma viga fixa-livre Euler-Bernoulli com amortecimento viscoso e dispositivos, tais como massa, mola e amortecimento, anexados no extremo livre da viga. Foram estabelecidas condições de ortogonalidade que diferem daquelas usadas na análise modal clássica, uma vez que o problema envolve amortecimento viscoso e condições de contorno não clássicas. Utilizou-se uma metodologia em blocos e a base dinâmica para escrever a solução da equação modal, a qual simplificou os cálculos na obtenção dos autovalores. A eficiência do método proposto é justificada quando comparado com os resultados da literatura.

REFERENCES

- Claeysen J.C.R., Canahualpa G., and Jung C. A direct approach to second-order matrix non-classical vibrating equations. *Applied Numerical Mathematics*, 30(1):65–78, 1999.
- Claeysen J.R. and Tsukazan T. Dynamic solutions of linear matrix differential equations. *Quarterly of Applied Mathematics*, 48(1):169–179, 1990.
- Copetti R.D., Claeysen J.R., and Tsukazan T. Dynamical response of a forced viscous append cantilever beam. In *9th Brazilian Conference on Dynamics, Control and Their Applications*. 2010.
- Ginsberg J. *Mechanical and Structural Vibrations*. John Wiley, 2002.
- Gorman D. *Free Vibration Analysis of Beams and Shafts*. John Wiley, 1975.
- Gürgöze M. and Erol H. Dynamic response of a viscously damped cantilever with a viscous end condition. *Journal of Sound and Vibration*, 298:132–153, 2006.
- Kelly S.G. *Advanced Vibration Analysis*. John Wiley, 1st edition, 2006.
- Naguleswaran S. Vibration of an euler-bernoulli beam on elastic end supports and with up to three step changes in cross-section. *International Journal of Mechanical Sciences*, 44:2541–2555, 2002.
- Oliveto G., Santini A., and E.Tripodi. Complex modal analysis of a flexural vibrating beam with viscous and conditions. *Journal of Sound and Vibration*, 200(3):327–345, 1997.
- Rao S.S. *Vibration of Continuous Systems*. John Wiley, 2007.
- Tsukazan T. The use of a dynamical basis for computing the modes of a beam system with a discontinuous cross-section. *Journal of Sound and Vibration*, 281(3-5):1175–1185, 2005.
- Vu H.V., Ordoñez A.M., and Karnopp B.H. Vibration of a double beam system. *Journal of Sound and Vibration*, 229(4):807–822, 2000.
- Yang B. and Wu X. Transient response of one-dimensional distributed systems: A closed form eigenfunction expansion realization. *Journal of Sound and Vibration*, 208(5):763–776, 1997.