

SOLUÇÃO NUMÉRICA DO PROBLEMA DE GIRKMANN USANDO O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS CONTÍNUO E DESCONTÍNUO

Agnaldo M. Farias^{a,b}, Philippe R. Devloo^b, Paulo Cesar de A. Lucci^b

^a*Grupo de Matemática Aplicada, Universidade Estadual de Campinas, Rua Sérgio Buarque de Holanda 651 - Cidade Universitária Zeferino Vaz, Brasil, <http://www.ime.unicamp.br>*

^b*Grupo de Mecânica Computacional, Universidade Estadual de Campinas, Avenida Albert Einstein 951 - Cidade Universitária Zeferino Vaz, Brasil, <http://labmec.org.br>*

Palavras chave: Problema de Girkmann, Problema Elástico Axissimétrico, MEF, Galerkin Descontínuo.

Resumo. Em janeiro de 2008, a Associação Internacional de Mecânica Computacional (IACM) convidou os leitores a resolverem o problema de Girkmann (um problema de mecânica dos sólidos), pelo método dos elementos finitos (MEF) e verificar se as soluções aproximadas de certas quantidades de interesse diferem em torno de 5% de suas contrapartes exatas. As quantidades de interesse foram: (a) o momento fletor na junção da casca e do anel; (b) a força de cisalhamento na junção da casca e do anel; (c) o momento de flexão máxima na casca e a sua localização caracterizada pelo ângulo meridional. Este problema foi primeiramente descrito por [Girkmann \(1956\)](#) e mais tarde por [Timoshenko and Woinowski-Krieger \(1959\)](#). No trabalho publicado por [Szabó et al \(2009\)](#) vários modelos de MEF foram usados para resolver o problema. Neste trabalho, o problema foi resolvido no modelo axissimétrico de duas formas: usando MEF contínuo e MEF contínuo com um elemento de interface descontínuo na região de interesse. Os resultados obtidos com o elemento de interface foi muito superior aos resultados contínuos. Para força de cisalhamento obtém-se bom resultado para $p = 2$.

1 INTRODUÇÃO

Em muitas situações na modelagem de problemas aplicados, o que se deseja de uma solução da Equação que descreve o modelo matemático não é a própria solução e sim a quantidade de interesse. No problema de Girkmann as quantidades de interesse são o momento fletor e a força cisalhante.

O problema de Girkmann corresponde a modelagem de uma casca fina axissimétrica apoiada sobre uma viga igualmente axissimétrica. Devido a geometria da região da junção entre a casca e a viga, a solução elástica nesta região tem comportamento singular e isso reduz a taxa de convergência das aproximações pelo método dos elementos finitos (MEF).

Este problema foi primeiramente descrito por Girkmann (1956) e mais tarde por Timoshenko and Woinowski-Krieger (1959). Soluções por métodos clássicos são apresentados em ambas as referências. Soluções numérica do problema são apresentadas em Babuška and Szabó (1991) e em Szabó et al (2009), nesta última vários modelos de MEF foram usados para resolver o problema. Em Szabó et al (2009), mostra-se as aproximações de pelo MEF contínuo apresentam sérias deficiências. Neste trabalho, o problema foi resolvido no modelo axissimétrico usando o MEF contínuo e descontínuo combinados.

2 DESCRIÇÃO DO PROBLEMA

Geometria: A notação é mostrada na Figura 1. O eixo z é o eixo de simetria rotacional. Uma casca esférica (*spherical shell*) de espessura $h = 0,06$ m, raio de coroa $R_c = 15,00$ m está conectada a um anel de enrijecimento (*stiffening ring*) no ângulo meridional $\alpha = 2\pi / 9$ (40°). As dimensões do anel são: $a = 0,60$ m, $b = 0,50$ m. O raio da superfície média da casca esférica é $R_m = R_c / \sin(\alpha)$.

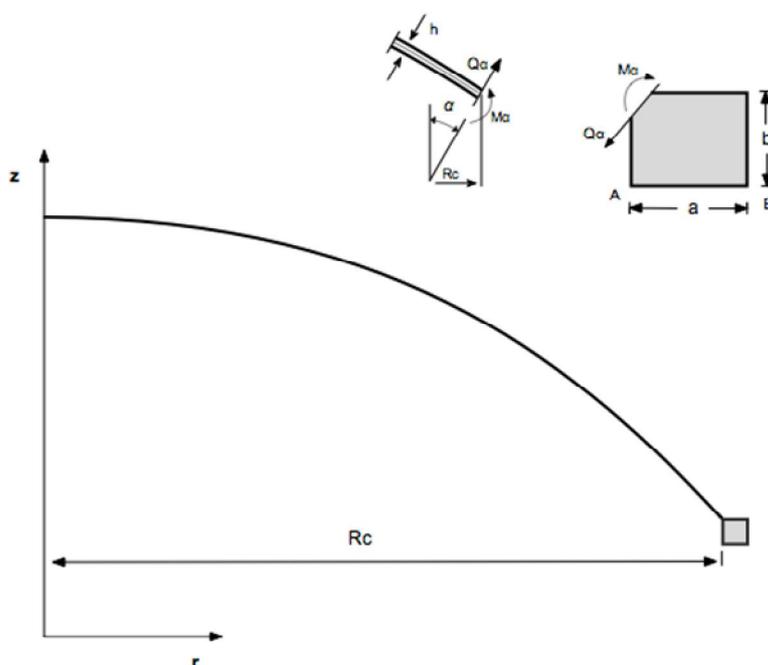


Figure 1: Problema de Girkmann.

Material: A casca é feita de concreto, supostamente homogêneo, isotrópico e linearmente elástico, com o módulo de Young $E = 20,59$ GPa e coeficiente de Poisson $\nu = 0$.

Carregamentos:

- (a) Considera-se apenas carregamento devido à gravidade. O peso unitário (*unit weight*) do material (homogêneo), composto da casca e do revestimento, é $32,69 \text{ kN/m}^3$.
- (b) Assume-se que a pressão normal uniforme p_{AB} (força distribuída) age sobre a base AB do anel de enrijecimento. A resultante de p_{AB} é igual ao peso da estrutura.

O domínio, a carga e as condições de apoio são axissimétrico. Os objetivos de cálculo são os seguintes:

- (1) Encontrar a força de cisalhamento Q_α em unidades de kN/m e o momento de fletor M_α nas unidades de Nm/m atuando na junção entre a casca esférica e o anel de enrijecimento.
- (2) Verificar se os resultados são precisos dentro de 5 por cento de precisão.

A descrição exposta aqui basea-se no trabalho de Szabó et al (2009), a qual difere da descrição do problema original exposto por Girkmann em dois aspectos. De acordo com os autores, em Girkmann (1956) foram utilizados *kgf* e *cm* para unidades de força e comprimento, respectivamente. Além disso, um dos objetivos foi determinar a força radial por unidade de comprimento entre a casca e o anel. Em Szabó et al (2009) o objetivo é determinar a força de cisalhamento por unidade de comprimento entre a casca e o anel.

Observação 1: De acordo com Szabó et al (2009), como o problema pode ser determinado estaticamente no que diz respeito às forças atuando na direção axial, a pressão atuando sobre a base do anel p_{AB} pode ser calculada a partir das informações fornecidas. Se o peso do anel é considerado leve, então a força distribuída uniformemente atuando sobre a base do anel é $p_{AB} = 27,256 \text{ kPa}$. Se o peso unitário do anel for assumido ser igual ao da casca, então, $p_{AB} = 43,553 \text{ kPa}$.

Na seção seguinte será descrita a formulação axissimétrica de elementos finitos e Galerkin descontínuo para o um problema de elasticidade linear. Método dos elementos finitos para elasticidade linear.

3 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS PARA ELASTICIDADE

3.1 Equações da elasticidade linear

O problema que descreve as equações de elasticidade linear que descreve o deslocamento \mathbf{u} de um corpo elástico em um domínio Ω bi-dimensional é dado por:

$$\begin{aligned}
 \tilde{\mathbf{T}} &= \lambda \text{tr}(\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{u}))\tilde{\mathbf{I}} + 2\mu\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{u}) \quad \text{em } \Omega \\
 \text{div}(\tilde{\mathbf{T}}) + \mathbf{f} &= \mathbf{0} \quad \text{em } \Omega \\
 \mathbf{u} &= \mathbf{g}_0 \quad \text{em } \Gamma_D \\
 \tilde{\mathbf{T}}\mathbf{n} &= \mathbf{g}_1 \quad \text{em } \Gamma_N
 \end{aligned} \tag{1}$$

Em que:

- $\tilde{\mathbf{T}}$ é o tensor das tensões simétrico
- $\mathbf{f} = (f_x, f_y)$ é a força de campo
- $\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^T)$ é o tensor de deformação simétrico
- $\tilde{\mathbf{T}} = [\delta_{ij}]$, sendo δ_{ij} é o delta de Kronecker
- λ e μ são as constantes de Lamé
- \mathbf{n} a normal externa ao contorno de Ω .
- Γ_D e Γ_N as partes do contorno com condições de Dirichlet e Neumann, respectivamente
- \mathbf{g}_0 e \mathbf{g}_1 são funções conhecidas.

Em Anexo, seguem as formulações das leis constitutivas em coordenadas cilíndricas.

3.2 Formulação do método dos elementos finitos

A formulação de elementos finitos (MEF contínuo) para o problema de elasticidade linear é dada como: encontrar $\mathbf{u} \in U(\Omega)$, tal que

$$\int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \text{div}(\tilde{\mathbf{T}}(\mathbf{u})) d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \mathbf{f} d\Omega = 0, \quad (2)$$

ou seja,

$$\int_{\Omega} \nabla \mathbf{v} \cdot \tilde{\mathbf{T}}(\mathbf{u}) d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \mathbf{f} d\Omega + \int_{\Gamma_N} \mathbf{v} \cdot \mathbf{g}_1 ds = 0. \quad (3)$$

para todo $\mathbf{v} \in V(\Omega)$. Em que,

$$U(\Omega) = \left\{ \mathbf{u} = (u_x, u_y) \text{ tal que } \mathbf{u} = \mathbf{g}_0 \text{ em } \Gamma_D \text{ e } \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x}, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} \in L_2(\Omega) \right\}$$

e

$$V(\Omega) = \left\{ \mathbf{v} = (v_x, v_y) \text{ tal que } \mathbf{v} = 0 \text{ em } \Gamma_D \text{ e } \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x}, \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} \in L_2(\Omega) \right\}.$$

3.3 Formulação do método de Galerkin descontínuo

Considere $\tau = \{\mathbf{K}\}$, uma subdivisão de Ω em uma malha de elementos finitos geometricamente conformes. Com $h_{\mathbf{K}}$ o diâmetro de \mathbf{K} e o parâmetro global da malha $h = \max_{\mathbf{K} \in \tau} \{h_{\mathbf{K}}\}$. Por simplicidade, assume-se que τ é quase uniforme. De acordo com [Hansbo e Larson \(2001\)](#), o espaço de funções descontínuas lineares por parte é definido por:

$$DF = \left\{ \mathbf{v} \in (L_2(\Omega))^2 : \mathbf{v}|_{\mathbf{K}} \in P^1(\mathbf{K}), \forall \mathbf{K} \in \tau \right\},$$

com $P^1(\mathbf{K})$ um espaço de polinômios de grau até um em \mathbf{K} .

Adota-se a notação $\Gamma_{\tau} = \Gamma_D \cup \Gamma_N \cup \Gamma_{\text{int}}$, em que Γ_D e Γ_N são as fronteiras de tipo Dirichlet e Neumann e Γ_{int} é a união de todas as fronteiras entre dois elementos internos ao domínio Ω . Além disso, a cada face é associada uma normal unitária fixa \mathbf{n} tal que para as faces no contorno \mathbf{n} é a normal unitária exterior.

De acordo com [Hansbo e Larson \(2001\)](#), a formulação de Galerkin descontínuo é escrita

por: encontrar $\mathbf{u} \in DF$ tal que

$$\begin{aligned} & \sum_{K \in \tau} \left(\int_K \nabla \mathbf{v} \cdot \tilde{\mathbf{T}}(\mathbf{u}) \, dx \right) + \int_{\Gamma_D \cup \Gamma_{int}} \left([\mathbf{v}] \cdot \langle \tilde{\mathbf{T}}(\mathbf{u}) \mathbf{n} \rangle - \theta [\mathbf{u}] \cdot \langle \tilde{\mathbf{T}}(\mathbf{v}) \mathbf{n} \rangle \right) ds + \gamma \int_{\Gamma_D \cup \Gamma_{int}} [\mathbf{u}] \cdot [\mathbf{v}] \, ds \\ & = \sum_{K \in \tau} \left(\int_K \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, dx \right) - \theta \int_{\Gamma_D} \mathbf{g}_0 \cdot (\tilde{\mathbf{T}}(\mathbf{v}) \mathbf{n}) \, ds + \int_{\Gamma_N} \mathbf{g}_1 \cdot \mathbf{v} \, ds + \gamma \int_{\Gamma_D} \mathbf{g}_0 \cdot \mathbf{v} \, ds \end{aligned} \quad (4)$$

para todo $\mathbf{v} \in DF$.

Em que:

- $[\mathbf{v}]$ é o salto da função $\mathbf{v} \in DF$, denotado por: $[\mathbf{v}]|_{\Gamma_{int}} = \mathbf{v}^+ - \mathbf{v}^-$ e $[\mathbf{v}]|_{\Gamma_D} = \mathbf{v}^+$.
- $\langle \mathbf{v} \rangle$ é a média da função $\mathbf{v} \in DF$, denotada por: $\langle \mathbf{v} \rangle|_{\Gamma_{int}} = (\mathbf{v}^+ + \mathbf{v}^-)/2$ e $\langle \mathbf{v} \rangle|_{\Gamma_D} = \mathbf{v}^+$.
- γ é o parâmetro de penalização da descontinuidade.
- Para $\theta = 1$ obtém-se a formulação não simétrica proposta por Baumann (1997).
- Para $\theta = -1$ obtém-se a formulação simétrica proposta por Baumann (1997).

De acordo com Baumann (1997), a formulação de Galerkin descontínuo (Eq. (4)) pode ser reescrita como:

$$B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \beta B_\gamma(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = L(\mathbf{v}) + \beta L_\gamma(\mathbf{v}), \quad (5)$$

sendo $\beta = 0$ no caso da formulação não simétrica ($\theta = 1$), $\beta = 1$ no caso da formulação simétrica ($\theta = -1$) e o parâmetro de penalidade dado por $\gamma = C(p^+ + p^-)/2h_f$. Com h_f podendo ser interpretado como a medida da interface (fronteira) entre os elementos, p a ordem de interpolação do elemento e $C > 0$ uma constante qualquer.

Em que:

$$\begin{aligned} B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \sum_{K \in \tau} \left(\int_K \nabla \mathbf{v} \cdot \tilde{\mathbf{T}}(\mathbf{u}) \, dx \right) + \int_{\Gamma_{int}} \left([\mathbf{v}] \cdot \langle \tilde{\mathbf{T}}(\mathbf{u}) \mathbf{n} \rangle - \theta [\mathbf{u}] \cdot \langle \tilde{\mathbf{T}}(\mathbf{v}) \mathbf{n} \rangle \right) ds + \\ &+ \int_{\Gamma_D} \left([\mathbf{v}] \cdot \langle \tilde{\mathbf{T}}(\mathbf{u}) \mathbf{n} \rangle - \theta [\mathbf{u}] \cdot \langle \tilde{\mathbf{T}}(\mathbf{v}) \mathbf{n} \rangle \right) ds, \end{aligned}$$

$$B_\gamma(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \gamma \int_{\Gamma_D} [\mathbf{u}] \cdot [\mathbf{v}] \, ds + \gamma \int_{\Gamma_{int}} [\mathbf{u}] \cdot [\mathbf{v}] \, ds,$$

$$L(\mathbf{v}) = \sum_{K \in \tau} \left(\int_K \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, dx \right) - \theta \int_{\Gamma_D} \mathbf{g}_0 \cdot (\tilde{\mathbf{T}}(\mathbf{v}) \mathbf{n}) \, ds + \int_{\Gamma_N} \mathbf{g}_1 \cdot \mathbf{v} \, ds \quad \text{e} \quad L_\gamma(\mathbf{v}) = \gamma \int_{\Gamma_D} \mathbf{g}_0 \cdot \mathbf{v} \, ds.$$

4 SOLUÇÕES NUMÉRICAS DO PROBLEMA DE GIRKMANN

Na simulação numérica do problema de Girkmann utilizou-se o ambiente PZ (<http://labmec.org.br>), o qual é um conjunto de classes em linguagem C++ que permite a simulação do método de elementos finitos. O ambiente PZ é constituído de módulos bastante separados, os quais combinados provém as funcionalidades necessárias a um código de

elementos finitos.

A malha de elementos finitos é construída a partir da malha mostrada na [Figura 2](#). A malha é composta de elementos de topologia quadrilateral e triangular e de elemento curvo de arco de circunferência ([Lucci \(2009\)](#)).

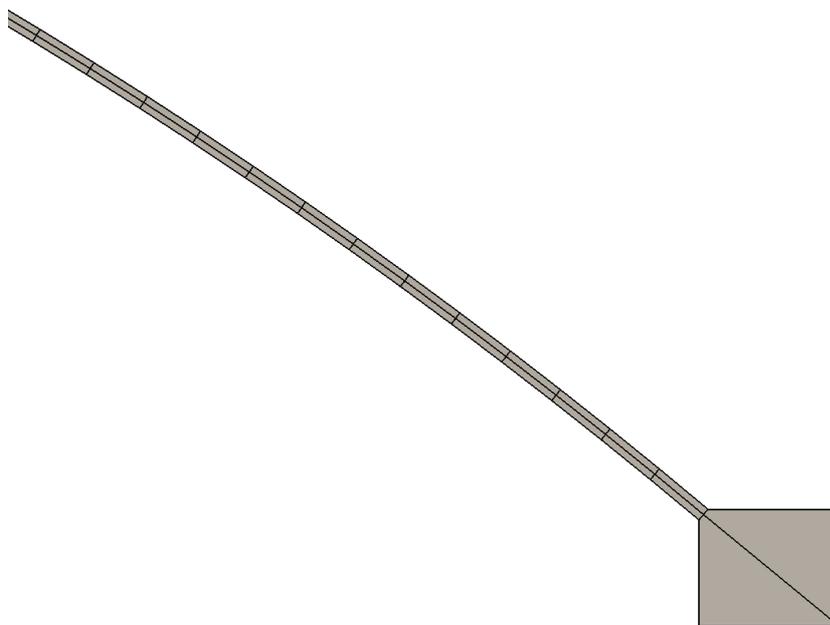


Figure 2: Malha de Discretização do domínio.

O problema de Girkmann foi resolvido no modelo axissimétrico das equações de elasticidade linear descritas anteriormente ([Seção 3](#)). Foram utilizadas duas técnicas diferentes para obter a solução numérica: **MEF** e **MEF-GD**.

MEF: Usa-se o método dos elementos finitos contínuos ([Seção 3.2](#)) na solução numérica do problema.

MEF-GD: Neste caso faz-se a combinação do MEF contínuo e do MEF descontínuo (Galerkin descontínuo) na resolução do problema. Para isso, criou-se um elemento de interface (1D) para representar a região de interesse (junção entre a casca esférica e o anel de enrijecimento). Nesta região a solução numérica foi obtida usando o método de Galerkin no caso não simétrico (Eq. (5)), com a constante do parâmetro da penalidade $C = 1$, e nas outras regiões do domínio usa-se o MEF. A [Figura 3](#) mostra este esquema.

Iremos utilizar as seguintes abreviaturas:

- $Ndiv$: para indicar o número de divisões na parte do domínio constituída apenas da casca.
- e_r : valor do erro relativo, em relação à solução obtida em [Pitkäranta](#).

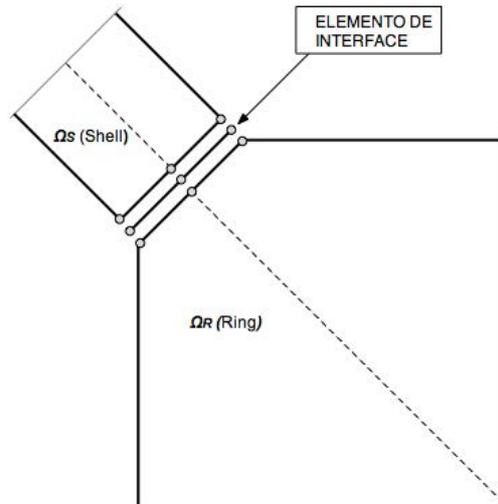
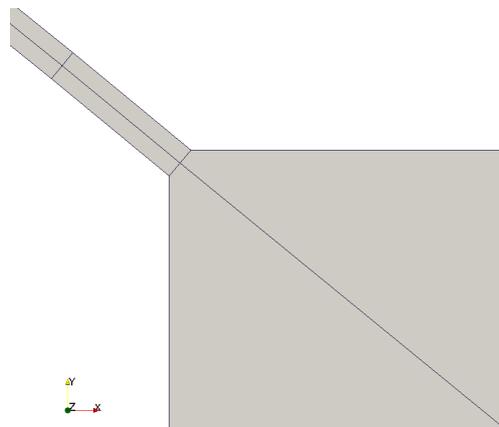


Figure 3: Elemento de interface 1D.

4.1 Resultados numéricos: assumindo que o anel seja leve

No problema de Girkmann o anel de enrijecimento é assumido como sendo leve. Assim, de acordo com Szabó et al (2009), $f_r = 0$ em Ω , $f_z = -32,69 \text{ kN/m}^3$ em Ω_S , $f_z = 0$ em Ω_R , $T_r = 0$ em Γ , $T_z = 27,256 \text{ kPa}$ em Γ_{AB} (ver Obsevação 1) e $T_z = 0$ sobre $\Gamma - \Gamma_{AB}$, sendo Γ_{AB} a base do anel, representada pelo segmento de fronteira AB na Figura 1. Os termos f_r e f_z representam as componentes da força de campo nas direções radial e axial, respectivamente. Enquanto T_r e T_z são as frações da força distribuída nas direções radial e axial. De acordo com Szabó et al (2009), no método clássico de Pitkäranta tem-se que $Q_\alpha = 942,5 \text{ N/m}$ e $M_\alpha = -37,45 \text{ Nm/m}$.

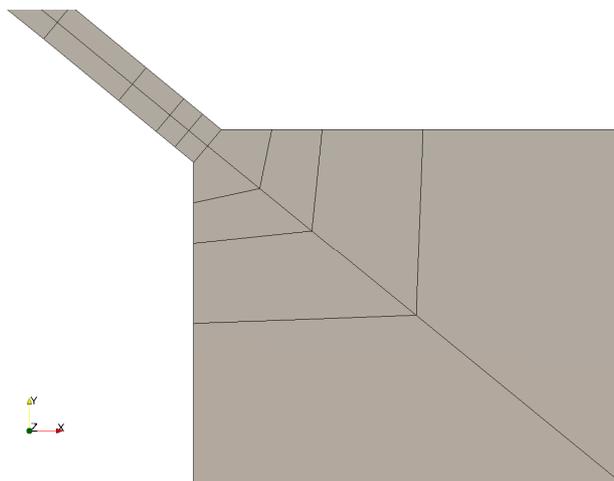
Resultado 1: Considera-se $Ndiv = 60$ como mostra a Figura 4. Na Tabela 1 confrontam-se os resultados obtidos pelas técnicas MEF e MEF-GD.

Figure 4: Malha com $Ndiv = 60$.

p	MEF				MEF-GD			
	$Q_\alpha(N/m)$	$e_r(\%)$	$M_\alpha(Nm/m)$	$e_r(\%)$	$Q_\alpha(N/m)$	$e_r(\%)$	$M_\alpha(Nm/m)$	$e_r(\%)$
2	1315,31	39,56	4,9660	113,3	946,031	0,375	-34,956	6,661
3	221,96	76,45	-30,838	17,65	944,350	0,196	-37,108	0,913
4	143,728	84,75	-37,375	0,199	943,951	0,154	-37,094	0,952
5	230,876	75,50	-41,155	9,894	943,798	0,138	-37,054	1,058
6	349,476	62,92	-43,956	17,37	943,732	0,131	-37,014	1,165
7	482,182	48,84	-45,691	22,01	943,700	0,127	-36,967	1,289
8	599,025	36,44	-46,568	24,35	943,683	0,126	-36,928	1,393

Table 1: Resultados com $Ndiv = 60$.

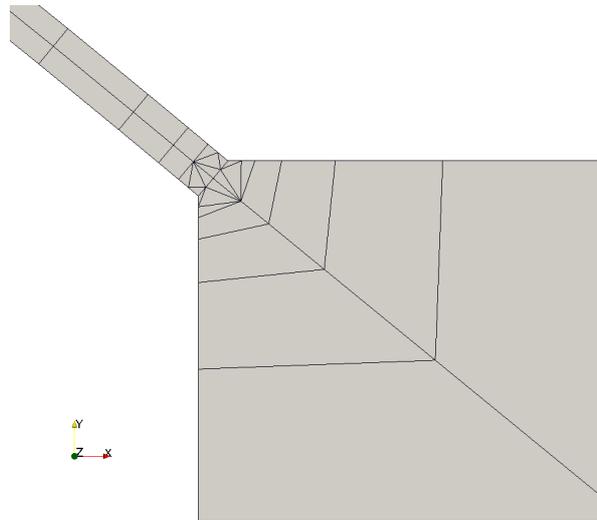
Resultado 2: Considera-se $Ndiv = 60$ e refinamento direcional no elemento de interface da junção casca-anel, como mostra a Figura 5. Na Tabela 2 tem-se os resultados obtidos pelas técnicas MEF e MEF-GD.

Figure 5: Malha com $Ndiv = 60$ e refinamento direcional sobre elemento de interface.

p	MEF				MEF-GD			
	$Q_\alpha(N/m)$	$e_r(\%)$	$M_\alpha(Nm/m)$	$e_r(\%)$	$Q_\alpha(N/m)$	$e_r(\%)$	$M_\alpha(Nm/m)$	$e_r(\%)$
2	564,254	40,13	-38,417	2,581	944,547	0,217	-37,091	0,959
3	754,742	19,92	-42,670	13,940	943,706	0,128	-36,884	1,512
4	914,307	2,991	-42,311	12,980	943,670	0,124	-36,835	1,642
5	987,172	4,740	-40,586	8,373	943,658	0,123	-36,812	1,704
6	1009,27	7,084	-38,993	4,121	943,654	0,122	-36,802	1,731
7	1007,50	6,897	-37,931	1,284	943,652	0,122	-36,797	1,743
8	997,075	5,790	-37,330	0,321	943,652	0,122	-36,795	1,750

Table 2: Resultados com $Ndiv = 60$ e refinamento direcional sobre elemento de interface.

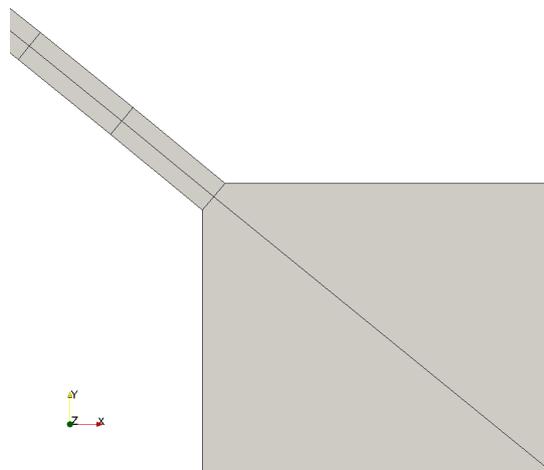
Resultado 3: Considera-se $Ndiv = 60$ e refinamento direcional no elemento de interface da junção casca-anel e nos seus nós extremos, como mostra a Figura 6. Na Tabela 3 tem-se os resultados obtidos pelas técnicas MEF e MEF-GD.

Figure 6: Malha com $Ndiv = 60$ e refinamento direcional sobre o elemento de interface e seus nós extremos.

p	MEF				MEF-GD			
	$Q_\alpha(N/m)$	$e_r(\%)$	$M_\alpha(Nm/m)$	$e_r(\%)$	$Q_\alpha(N/m)$	$e_r(\%)$	$M_\alpha(Nm/m)$	$e_r(\%)$
2	1000,28	6,131	-43,260	15,51	944,330	0,194	-37,009	1,177
3	955,310	1,359	-37,128	0,859	943,662	0,123	-36,824	1,671
4	932,948	1,013	-34,606	7,595	943,656	0,123	-36,805	1,722
5	946,511	0,426	-37,093	0,953	943,653	0,122	-36,801	1,733
6	935,009	0,795	-37,786	0,897	943,652	0,122	-36,796	1,746
7	934,700	0,828	-36,564	2,367	943,651	0,122	-36,794	1,752
8	953,331	1,149	-36,323	3,011	943,651	0,122	-36,793	1,755

Table 3: Resultados com $Ndiv = 60$ e refinamento direcional sobre o elemento de interface e seus nós extremos.

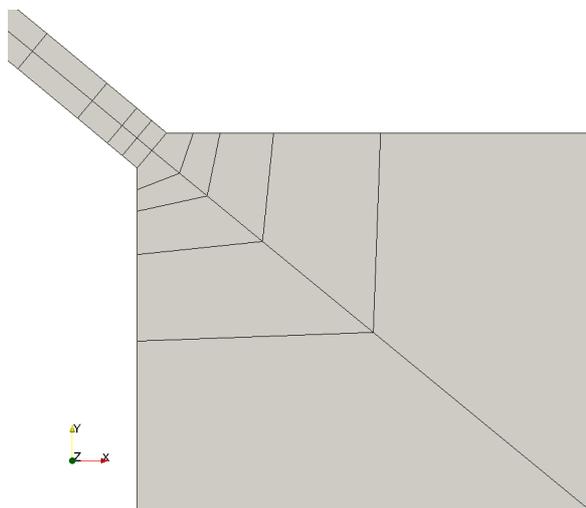
Resultado 4: Considera-se $Ndiv = 80$ como mostra a [Figura 7](#). Na [Tabela 4](#) confrontam-se os resultados obtidos pelas técnicas **MEF** e **MEF-GD**.

Figure 7: Malha com $Ndiv = 80$.

p	MEF				MEF-GD			
	$Q_\alpha(N/m)$	$e_r(\%)$	$M_\alpha(Nm/m)$	$e_r(\%)$	$Q_\alpha(N/m)$	$e_r(\%)$	$M_\alpha(Nm/m)$	$e_r(\%)$
2	1152,94	22,33	-6,5189	82,59	945,109	0,277	-35,841	4,297
3	165,758	82,41	-31,305	16,41	944,216	0,182	-37,080	0,987
4	136,369	85,53	-36,560	2,378	943,890	0,148	-37,050	1,067
5	221,651	76,48	-40,398	7,871	943,770	0,135	-37,017	1,158
6	337,255	64,22	-43,341	15,73	943,717	0,129	-36,979	1,258
7	468,318	50,31	-45,233	20,78	943,691	0,126	-36,939	1,365
8	584,741	37,96	-46,246	23,49	943,678	0,125	-36,906	1,452

Table 4: Resultados com $Ndiv = 80$.

Resultado 5: Considera-se $Ndiv = 80$ e refinamento direcional no elemento de interface da junção casca-anel, como mostra a Figura 8. Na Tabela 5 tem-se os resultados obtidos pelas técnicas MEF e MEF-GD.

Figure 8: Malha com $Ndiv = 80$ e refinamento direcional sobre elemento de interface.

p	MEF				MEF-GD			
	$Q_\alpha(N/m)$	$e_r(\%)$	$M_\alpha(Nm/m)$	$e_r(\%)$	$Q_\alpha(N/m)$	$e_r(\%)$	$M_\alpha(Nm/m)$	$e_r(\%)$
2	797,664	15,37	-40,680	8,624	944,278	0,189	-37,155	0,787
3	951,251	0,929	-40,693	8,660	943,709	0,128	-36,863	1,567
4	1005,22	6,655	-38,847	3,731	943,670	0,124	-36,820	1,684
5	1003,58	6,480	-37,572	0,326	943,657	0,123	-36,805	1,724
6	988,544	4,885	-36,983	1,248	943,653	0,122	-36,799	1,739
7	974,883	3,436	-36,766	1,826	943,652	0,122	-36,796	1,747
8	965,311	2,420	-36,700	2,002	943,651	0,122	-36,794	1,751

Table 5: Resultados com $Ndiv = 80$ e refinamento direcional sobre elemento de interface.

Resultado 6: Considera-se $Ndiv = 80$ e refinamento direcional no elemento de interface da junção casca-anel e nos seus nós extremos, como mostra a [Figura 9](#). Na [Tabela 6](#) tem-se os resultados obtidos pelas técnicas **MEF** e **MEF-GD**.

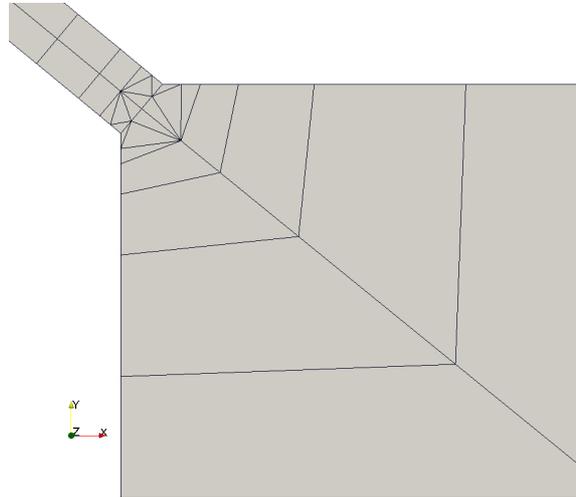


Figure 9: Malha com $Ndiv = 80$ e refinamento direcional sobre o elemento de interface e seus nós extremos.

p	MEF				MEF-GD			
	$Q_\alpha (N/m)$	$e_r (%)$	$M_\alpha (Nm/m)$	$e_r (%)$	$Q_\alpha (N/m)$	$e_r (%)$	$M_\alpha (Nm/m)$	$e_r (%)$
2	960,934	1,956	-43,365	15,794	944,064	0,166	-37,033	1,114
3	942,844	0,036	-36,689	2,033	943,660	0,123	-36,826	1,668
4	929,085	1,423	-34,641	7,501	943,656	0,123	-36,805	1,721
5	951,299	0,934	-37,178	0,726	943,653	0,122	-36,801	1,733
6	937,850	0,493	-37,778	0,877	943,652	0,122	-36,796	1,746
7	934,166	0,884	-36,550	2,403	943,651	0,122	-36,794	1,752
8	952,965	1,110	-36,323	3,011	943,651	0,122	-36,793	1,755

Table 6: Resultados com $Ndiv = 80$ e refinamento direcional sobre o elemento de interface e seus nós extremos.

Nas tabelas acima tem-se os resultados da força de cisalhamento Q_α e o momento de fletor M_α , para o caso em que o anel seja leve. Nota-se que os resultados obtidos utilizando a técnica de combinar o método de elementos finitos e o método de Galerkin descontínuo (**MEF-GD**) foi muito superior aos resultados obtidos a partir do método dos elementos finitos (**MEF**). Observa-se também que para $p = 2$ obtém-se bons resultados para a força de cisalhamento.

4.2 Resultados numéricos: anel e a casca com o mesmo peso unitário

Assumindo que o peso unitário do anel é igual ao da casca, tem-se, de acordo com [Szabó et al \(2009\)](#), $f_r = 0$ em Ω , $f_z = -32,69 \text{ kN/m}^3$ em Ω_S , $f_z = 0$ em Ω_R , $T_r = 0$ em Γ , $T_z = 43,553 \text{ kPa}$ em Γ_{AB} e $T_z = 0$ sobre $\Gamma - \Gamma_{AB}$. De acordo com [Szabó et al \(2009\)](#) no método clássico de [Pitkäranta](#) tem-se os resultados $Q_\alpha = 943,8 \text{ N/m}$ e $M_\alpha = -41,12 \text{ Nm/m}$.

Resultado 7: Considera-se $Ndiv = 60$ como mostra a [Figura 4](#). Na [Tabela 7](#) tem-se os resultados obtidos pelas técnicas **MEF** e **MEF-GD**.

p	MEF				MEF-GD			
	$Q_\alpha(N/m)$	$e_r(\%)$	$M_\alpha(Nm/m)$	$e_r(\%)$	$Q_\alpha(N/m)$	$e_r(\%)$	$M_\alpha(Nm/m)$	$e_r(\%)$
2	1297,22	37,45	2,2523	105,4	951,615	0,828	-38,899	5,400
3	190,831	79,78	-33,996	17,32	949,943	0,651	-41,143	0,055
4	112,433	88,09	-40,820	0,731	949,556	0,610	-41,158	0,092
5	202,855	78,51	-44,854	9,080	949,408	0,594	-41,131	0,026
6	326,130	65,45	-47,872	16,42	949,345	0,588	-41,096	0,057
7	463,943	50,84	-49,772	21,04	949,314	0,584	-41,052	0,164
8	585,601	37,95	-50,765	23,46	949,299	0,583	-41,014	0,258

Table 7: Resultados com $Ndiv = 60$.

Resultado 8: Considera-se $Ndiv = 60$ e refinamento direcional no elemento de interface da junção casca-anel, como mostra a [Figura 5](#). Na [Tabela 8](#) confrontam-se os resultados obtidos pelas técnicas **MEF** e **MEF-GD**.

p	MEF				MEF-GD			
	$Q_\alpha(N/m)$	$e_r(\%)$	$M_\alpha(Nm/m)$	$e_r(\%)$	$Q_\alpha(N/m)$	$e_r(\%)$	$M_\alpha(Nm/m)$	$e_r(\%)$
2	547,330	42,01	-42,207	2,644	950,167	0,675	-41,180	0,146
3	747,949	20,75	-46,829	13,88	949,322	0,585	-40,969	0,367
4	914,893	3,063	-46,560	13,23	949,286	0,581	-40,920	0,487
5	991,634	5,068	-44,812	8,979	949,274	0,580	-40,896	0,545
6	1015,42	7,589	-43,173	4,994	949,270	0,579	-40,886	0,570
7	1014,20	7,459	-42,073	2,318	949,268	0,579	-40,881	0,582
8	1003,81	6,358	-41,448	0,797	949,267	0,579	-40,878	0,588

Table 8: Resultados com $Ndiv = 60$ e refinamento direcional sobre elemento de interface.

Resultado 9: Considera-se $Ndiv = 60$ e refinamento direcional no elemento de interface da junção casca-anel e nos seus nós extremos, como mostra a [Figura 6](#). Na [Tabela 9](#) tem-se os resultados obtidos pelas técnicas **MEF** e **MEF-GD**.

p	MEF				MEF-GD			
	$Q_\alpha(N/m)$	$e_r(\%)$	$M_\alpha(Nm/m)$	$e_r(\%)$	$Q_\alpha(N/m)$	$e_r(\%)$	$M_\alpha(Nm/m)$	$e_r(\%)$
2	1001,9	6,156	-47,603	15,765	949,951	0,652	-41,105	0,036
3	959,706	1,685	-41,293	0,422	949,278	0,580	-40,909	0,513
4	938,037	0,611	-38,624	6,071	949,271	0,579	-40,889	0,563
5	952,606	0,933	-41,160	0,096	949,269	0,579	-40,885	0,572
6	940,736	0,325	-41,892	1,878	949,267	0,579	-40,880	0,584
7	939,974	0,405	-40,652	1,139	949,267	0,579	-40,877	0,590
8	958,934	1,603	-40,398	1,757	949,266	0,579	-40,876	0,593

Table 9: Resultados com $Ndiv = 60$ e refinamento direcional sobre o elemento de interface e seus nós extremos.

Resultado 10: Considera-se $Ndiv = 80$ como mostra a [Figura 7](#). Na [Tabela 10](#) confrontam-se os resultados obtidos pelas técnicas **MEF** e **MEF-GD**.

p	MEF				MEF-GD			
	$Q_\alpha(N/m)$	$e_r(\%)$	$M_\alpha(Nm/m)$	$e_r(\%)$	$Q_\alpha(N/m)$	$e_r(\%)$	$M_\alpha(Nm/m)$	$e_r(\%)$
2	1133,72	20,12	-9,2892	77,41	950,692	0,730	-39,813	3,179
3	135,053	85,69	-34,434	16,26	949,813	0,637	-41,126	0,015
4	105,419	88,83	-39,976	2,781	949,498	0,604	-41,121	0,001
5	193,725	79,47	-44,074	7,183	949,381	0,591	-41,096	0,058
6	313,779	66,75	-47,241	14,88	949,331	0,586	-41,063	0,139
7	449,805	52,34	-49,301	19,90	949,306	0,583	-41,024	0,233
8	570,966	39,50	-50,435	22,65	949,294	0,582	-40,992	0,311

Table 10: Resultados com $Ndiv = 80$.

Resultado 11: Considera-se $Ndiv = 80$ e refinamento direcional no elemento de interface da junção casca-anel, como mostra a [Figura 8](#). Na [Tabela 11](#) confrontam-se os resultados obtidos pelas técnicas **MEF** e **MEF-GD**.

p	MEF				MEF-GD			
	$Q_\alpha(N/m)$	$e_r(\%)$	$M_\alpha(Nm/m)$	$e_r(\%)$	$Q_\alpha(N/m)$	$e_r(\%)$	$M_\alpha(Nm/m)$	$e_r(\%)$
2	791,207	16,17	-44,758	8,847	949,898	0,646	-41,248	0,311
3	953,733	1,052	-44,911	9,219	949,325	0,585	-40,949	0,417
4	1011,15	7,136	-43,029	4,643	949,286	0,581	-40,904	0,526
5	1010,34	7,050	-41,707	1,428	949,273	0,580	-40,888	0,563
6	995,261	5,452	-41,091	0,072	949,269	0,579	-40,883	0,578
7	981,368	3,981	-40,861	0,630	949,267	0,579	-40,880	0,585
8	971,586	2,944	-40,789	0,804	949,267	0,579	-40,878	0,589

Table 11: Resultados numéricos com $Ndiv = 80$ e refinamento direcional sobre elemento de interface.

Resultado 12: Considera-se $Ndiv = 80$ e refinamento direcional no elemento de interface da junção casca-anel e nos seus nós extremos, como mostra a [Figura 9](#). Na [Tabela 12](#) tem-se os resultados obtidos pelas técnicas **MEF** e **MEF-GD**.

p	MEF				MEF-GD			
	$Q_\alpha(N/m)$	$e_r(\%)$	$M_\alpha(Nm/m)$	$e_r(\%)$	$Q_\alpha(N/m)$	$e_r(\%)$	$M_\alpha(Nm/m)$	$e_r(\%)$
2	961,444	1,870	-47,695	15,99	949,684	0,623	-41,126	0,015
3	946,635	0,300	-40,831	0,704	949,276	0,582	-40,910	0,510
4	934,051	1,033	-38,662	5,978	949,271	0,580	-40,890	0,562
5	957,654	1,468	-41,248	0,312	949,269	0,579	-40,885	0,573
6	943,714	0,009	-41,884	1,858	949,267	0,579	-40,880	0,584
7	939,417	0,464	-40,638	1,173	949,267	0,579	-40,877	0,590
8	958,550	1,563	-40,398	1,757	949,266	0,579	-40,876	0,593

Table 12: Resultados com $Ndiv = 80$ e refinamento direcional sobre o elemento de interface e seus nós extremos.

Nas tabelas acima tem-se os resultados da força de cisalhamento Q_α e o momento de fletor M_α para o caso em que o anel e a casca tenham o mesmo peso unitário. Nota-se que os

resultados obtidos utilizando a técnica de combinar o método de elementos finitos e o método de Galerkin descontínuo (**MEF-GD**) foi muito superior aos resultados obtidos a partir do método dos elementos finitos (**MEF**). Observa-se também que para $p = 2$ obtém-se bons resultados para a força de cisalhamento.

4.3 Confronto da técnica MEF-GD com outros resultados da literatura

As tabelas abaixo mostram os resultados obtidos pela técnica **MEF-GD** e de vários modelos de método dos elementos finitos de outros autores (apresentados em Szabó et al (2009)).

Método	Q_α	e_r	M_α	e_r
	N/m	%	Nm/m	%
Clássico – Girkmann (Girkmann (1956))	846,6	-	-110,5	-
Clássico – Pitkäranta M-B-R model (Pitkäranta)	942,5	-	-37,45	-
Axissimétrico MEF-GD (resultado 3)	943,65	0,12	-36,79	1,76
Axissimétrico MEF-GD (resultado 6)	943,65	0,12	-36,79	1,76
<i>p</i> -Version axisymmetric solid (Babuška and Szabó (1991))	934,5	0,85	-34,81	7,05
<i>p</i> -Version axisymmetric solid - Extraction (Szabó et al (2009))	943,6	0,12	-36,81	1,71
Outros autores (Szabó et al (2009))				
<i>p</i> -Version axisymmetric solid	940,9	0,17	-36,63	2,19
<i>p</i> -Version 3D thin solid $q = 3$ - solid see Note 1	948,4	0,63	-37,31	0,38
<i>p</i> -Version axisymmetric solid	940,9	0,17	-36,80	1,74
<i>h</i> -Version axisymmetric shell - solid	949,2	0,71	-36,62	2,22
<i>h</i> -Version 3D shell - solid	951,3	0,93	-38,35	2,40
<i>h</i> -Version axisymmetric solid - 4 node elements	953,7	1,19	-10,57	71,8
<i>h</i> -Version axisymmetric solid - 8 node elements	953,7	1,19	-19,67	47,5
<i>h</i> -Version axisymmetric shell - solid	593,8	37,0	-140,12	274
<i>h</i> -Version 3D shell - solid	1140	21,0	-205	447
<i>h</i> -Version 3D shell - solid	16660	17976,6
<i>h</i> -Version axisymmetric solid	960,0	1,86	-31,86	14,9
<i>h</i> -Version 3D shell - solid	1015,7	7,77	86,30	130
<i>h</i> -Version axisymmetric shell - solid	989,1	4,94	-89,11	138

Table 13: Resultados numéricos considerando que o anel de enrijecimento seja leve.

Método	Q_α	e_r	M_α	e_r
	N/m	%	Nm/m	%
Clássico – Pitkäranta M-B-R model (Pitkäranta)	943,8	-	-41,12	-
Axissimétrico MEF-GD (resultado 9)	949,27	0,58	-40,88	0,59
Axissimétrico MEF-GD (resultado 12)	949,27	0,58	-40,88	0,59
<i>p</i> -Version axisymmetric solid - nodal force (Szabó et al (2009))	949,3	0,58	-40,91	0,51
<i>p</i> -Version axisymmetric solid - automesh	947,3	0,37	-40,88	0,58

Table 14: Resultados numéricos considerando que o anel e a casca tenham o mesmo peso unitário.

Na tabela acima (Tabela 13) nota-se que nem todos os métodos fornecem resultados com

tolerância de 5% em relação aos resultados obtidos por Pitkäranta. O modelo axissimétrico com a técnica **MEF-GD** fornece excelentes resultados os quais estão de acordo com os resultados obtidos por Szabó et al (2009) pela técnica da extração.

Na Tabela 14 tem-se os resultados para o caso em que o anel e casca têm o mesmo peso unitário. O modelo axissimétrico com a técnica **MEF-GD** fornece excelentes resultados, os quais estão de acordo com os resultados obtidos por Szabó et al (2009).

5 CONCLUSÃO

De acordo com os resultados apresentados tem-se que a técnica de combinar o método de elementos finitos e o método de Galerkin descontínuo (**MEF-GD**) apresenta excelentes resultados na resolução do problema de Girkmann no modelo axissimétrico. Além disso, nota-se que os resultados obtidos utilizando **MEF-GD** foi muito superior aos resultados obtidos a partir do método dos elementos finitos (**MEF**) e para $p = 2$ obtém-se bons resultados para a força de cisalhamento.

Comparando a técnica **MEF-GD** com outros modelos da literatura (Szabó et al (2009)) a técnica fornece excelentes resultados e com a vantagem de não utilizar técnicas de pós-processamento. Apenas, utilizam-se integrações numéricas sobre a região de interesse para obter as soluções desejadas.

REFERENCIAS

- Babuška, I. and Szabó, B., *Finite Element Analysis*. John Wiley & Sons, Inc. New York 1991 pp. 327-332.
- Baumann, C. E., *An HP-Adaptive Discontinuous Finite Element Method for Computational Fluid Dynamics*. PhD thesis, University of Texas at Austin, 1997.
- Girkmann, K. *Flächentragwerke*, 4th Ed. Springer Verlag, Wien, 1956.
- Hansbo, P. and Larson, M. G., *Discontinuous Galerkin and the Crouzeix-Raviart Element: Application to Elasticity*. Chalmers Finite Element Center, Chalmers University of Technology, SE-412 96, Göteborg Sweden. Göteborg, January 2001.
- Lucci, P. C. A., *Descrição Matemática de Geometrias Curvas por Interpolação Transfinita*. Dissertação de Mestrado – Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo. Campinas – SP, 2009.
- Pitkäranta, J., *The Dome and the Ring*. Manuscript.
- Timoshenko, S., and Woinowski-Krieger, S., *Theory of Plates and Shells*. 2nd Ed. McGraw-Hill Book Company, Inc. New York pp. 555-558, 1959.
- Szabó, B., Babuška, I., Pitkäranta, J., and Nervi, S., *The Problem of Verification with Reference to the Girkmann Problem*. ICES REPORT 09-17, The University of Texas at Austin, July 2009.

ANEXO: LEI CONSTITUTIVA EM COORDENADAS CILÍNDRICAS

Serão apresentadas as formulações do modelo axissimétrico, com os eixos de coordenadas r , z e θ .

A.1 Deslocamento e o seu gradiente

O deslocamento em um modelo axissimétrico é descrito por:

$$\mathbf{u}(r, z, \theta) = u_r \mathbf{e}_r + u_z \mathbf{e}_z + u_\theta \mathbf{e}_\theta.$$

Sendo \mathbf{e}_r , \mathbf{e}_z e \mathbf{e}_θ os vetores canônicos em coordenadas cilíndricas. Desse modo, o gradiente $\nabla \mathbf{u}$ resulta em:

$$\nabla \mathbf{u}(r, z, \theta) = \nabla(u_r \mathbf{e}_r) + \nabla(u_z \mathbf{e}_z) + \nabla(u_\theta \mathbf{e}_\theta).$$

Em que:

$$\begin{aligned} \nabla(u_r \mathbf{e}_r) &= \frac{\partial u_r}{\partial r} (\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r) + \frac{\partial u_r}{\partial z} (\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_z) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} (\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_\theta) + \frac{u_r}{r} (\mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_\theta) \\ \nabla(u_z \mathbf{e}_z) &= \frac{\partial u_z}{\partial r} (\mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_r) + \frac{\partial u_z}{\partial z} (\mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} (\mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_\theta) \\ \nabla(u_\theta \mathbf{e}_\theta) &= \frac{\partial u_\theta}{\partial r} (\mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_r) + \frac{\partial u_\theta}{\partial z} (\mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_z) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} (\mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_\theta) - \frac{u_\theta}{r} (\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_\theta) \end{aligned}$$

A.2 Tensor de deformação infinitesimal e seu traço

Independentemente do modelo adotado, o tensor de deformação infinitesimal é definido como:

$$\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{u}) = \frac{\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T}{2}.$$

Daí, tem-se

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{u}) &= \frac{1}{2} \left\{ 2 \frac{\partial u_r}{\partial r} (\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r) + 2 \frac{\partial u_z}{\partial z} (\mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z) + 2 \left(\frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) (\mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_\theta) + \right. \\ &\quad \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right) (\mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_z + \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_\theta) + \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) (\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_z + \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_r) + \\ &\quad \left. \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right) (\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_\theta + \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_r) \right\} \end{aligned}$$

ou, em forma matricial,

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_r}{\partial r} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) & \frac{\partial u_z}{\partial z} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right) & \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \end{pmatrix}.$$

O traço de $\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{u})$ é

$$tr(\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{u})) = \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r}.$$

A.3 Tensor das tensões

O tensor que representa o estado de tensões em um determinado ponto de deformação \mathbf{u} é dado por:

$$\tilde{\mathbf{T}}(\mathbf{u}) = \lambda tr(\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{u})) \tilde{\mathbf{I}} + 2\mu \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{u}).$$

Daí tem-se.

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{T}}(\mathbf{u}) = & \lambda \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \right) + \mu \left\{ \frac{\partial u_r}{\partial r} (\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r) + 2 \frac{\partial u_z}{\partial z} (\mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z) + \right. \\ & + 2 \left(\frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) (\mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_\theta) + \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right) (\mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_z + \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_\theta) + \\ & \left. + \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) (\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_z + \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_r) + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right) (\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_\theta + \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_r) \right\} \end{aligned}$$

ou, matricialmente,

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} (2\mu + \lambda) \frac{\partial u_r}{\partial r} + \lambda \left(\frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \right) & \mu \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) & \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right) \\ \mu \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) & (2\mu + \lambda) \frac{\partial u_z}{\partial z} + \lambda \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \right) & \mu \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right) \\ \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right) & \mu \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right) & \frac{2\mu}{r} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r \right) + \lambda \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_z}{\partial z} + \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) \end{pmatrix}$$