

TÉCNICAS DE REGULARIZACIÓN PARA ANÁLISIS DE ESTRUCTURAS VISCOELÁSTICAS USANDO UN MÉTODO DE FUNCIONES DE INFLUENCIA

Adrián Peluffo^a, Pablo Ezzatti^a y Alfredo Canelas^b

^aCentro de Cálculo, Instituto de Computación, Facultad de Ingeniería, UDELAR, J. Herrera y Reissig 565, Montevideo, Uruguay, apeluffo@fing.edu.uy, pezatti@fing.edu.uy

^bInstituto de Estructuras y Transporte, Facultad de Ingeniería, UDELAR, J. Herrera y Reissig 565, Montevideo, Uruguay, acanelas@fing.edu.uy

Palabras Clave: Técnicas de regularización, Viscoelasticidad, Boundary Knot Method.

Resumen. El método conocido como *Boundary Knot Method* (BKM) es una técnica que no requiere de malla para resolver numéricamente problemas de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales. Este método ha sido aplicado exitosamente en la solución de diversos problemas de física matemática e ingeniería. En un trabajo reciente fue propuesta la utilización del BKM en el análisis de estructuras viscoelásticas. Sin embargo, para algunos problemas estudiados, los resultados obtenidos con el BKM han sido significativamente diferentes de los obtenidos utilizando otras técnicas tradicionales de análisis estructural, como el método de los elementos de contorno. El elevado número de condición observado en las matrices de coeficientes de los sistemas lineales del BKM sugiere que las discrepancias observadas son causadas por los errores producidos en la resolución de estos sistemas lineales. Resultados preliminares obtenidos con herramientas que permiten trabajar con mayor precisión confirman esta hipótesis. En este trabajo se describe la utilización de varias técnicas de regularización con el objetivo de mejorar los resultados buscando disminuir los errores numéricos producidos en la resolución de los sistemas lineales del BKM, consiguiendo resultados dispares.

1. INTRODUCTION

En los últimos años los métodos sin malla para la solución de sistemas de ecuaciones en derivadas parciales han ganado la atención de la comunidad científica. Estos métodos evitan el gran esfuerzo computacional asociado a la generación de la malla utilizada por los métodos clásicos como el Método de los Elementos de Contorno (*Boundary Element Method*, BEM) o el Método de los Elementos Finitos (*Finite Element Method*, FEM). La generación de la malla en problemas de geometría compleja es usualmente muy costosa, especialmente en problemas donde el remallado es necesario, como ocurre, por ejemplo, por razones de precisión o cuando la aplicación requiere definir contornos móviles, como en problemas de contornos libres en dinámica o en aplicaciones de optimización de formas.

En la formulación de los métodos sin malla es común el uso de métodos de interpolación como los basados en Funciones de Base Radial (*Radial Basis Functions*, RBF). Los métodos RBF constituyen una poderosa herramienta de aproximación en problemas de múltiples variables (Buhmann, 2003). Utilizando una solución particular radial de la ecuación de campo, desde aquí en más llamada función radial de Trefftz, es posible definir un método RBF especializado, que en conjunto con la técnica de colocación constituye un método sin malla, pues sólo necesita definir un conjunto de nodos en el contorno del dominio del problema para interpolar la solución.

El primero y más conocido de estos métodos RBF es el Método de las Soluciones Fundamentales (*Method of Fundamental Solutions*, MFS), introducido por Kupradze (1964). El MFS ha sido reconocido como un método de gran precisión y a la vez rápidamente convergente. Sin embargo, el MFS requiere definir un contorno artificial en el exterior del dominio físico del problema, lo que constituye una tarea para la cual, a pesar de los grandes esfuerzos realizados (Cisilino y Sensale, 2002; Alves, 2009), no existe todavía un algoritmo a la vez óptimo y suficientemente eficiente para viabilizar su utilización de modo general.

En los últimos años han aparecido algunas técnicas que evitan el uso del contorno artificial. Por ejemplo, el método conocido como *Boundary Knot Method* (BKM), introducido por Kang et al. (1999) y por Chen y Tanaka (2002). Este método ha sido aplicado exitosamente para resolver diversos problemas de física, matemática e ingeniería, por ejemplo problemas de vibraciones de placas (Kang y Lee, 2001), Problemas de Poisson (Chen et al., 2005), problemas de Helmholtz no homogéneos (Jin y Zheng, 2005), etc. Recientemente ha sido propuesto para el análisis de estructuras viscoelásticas por Canelas y Sensale (2010).

En el caso del análisis de estructuras viscoelásticas, se ha constatado que los resultados obtenidos con el BKM para algunos ejemplos son significativamente diferentes de los obtenidos utilizando otras técnicas tradicionales de análisis estructural, como el BEM. El elevado número de condición observado en las matrices de coeficientes de los sistemas lineales del BKM sugiere que las discrepancias observadas son causadas por los errores producidos en la resolución de estos sistemas lineales. Resultados preliminares obtenidos con herramientas que permiten trabajar con mayor precisión confirman esta hipótesis (Canelas y Sensale, 2010). De hecho, los sistemas lineales mal condicionados son una característica inherente al método BKM, así como también a otros basados en funciones RBF (Wang et al., 2009). Por esta razón, algunos procedimientos de regularización han sido estudiados con el objetivo de minimizar los errores producidos en la solución de los sistemas lineales. En el caso del MFS pueden citarse los trabajos de Ramachandran (2002), Chen et al. (2006) y Wei et al. (2007), en el caso del BKM puede ser citado el trabajo de Wang et al. (2009).

Las herramientas de regularización generalmente se basan en las técnicas de Descompo-

sición en Valores Singulares (*Singular Value Decomposition*, SVD), incluyendo restricciones adicionales al problema original. De esta manera se resuelve un nuevo problema compuesto por el planteo original y una componente adicional de regularización. Generalmente, ambas partes relacionadas mediante un coeficiente que permite privilegiar la componente de regularización o el problema original en sí mismo. En este trabajo se abordan en primera instancia, las técnicas de regularización directas, como son: la regularización de Tikhonov, Mínimos Cuadrados con Restricciones Cuadráticas (*Least Squares with a Quadratic Constraint*, LSQC) y las variantes de SVD: SVD truncado (*Truncated TSVD*, TSVD) y SVD amortiguado (*Damped SVD*, DSVD) y Mínimos Cuadrados Totales Truncados (*Total Truncated Least Squares*, TTLS). Posteriormente se tratan los métodos de regularización iterativos como: la variante de Método del Gradiente Conjugado (*Conjugate Gradient Method*, CGM), actualización de factores QR con bidiagonalización de Lanczos (*Least Squares QR*, LSQR) y Método- ν . En todos los casos se evalúa la aplicabilidad de las técnicas a los sistemas presentes en el BKM, así como la elección de los parámetros utilizando la Curva-L, la Validación Cruzada Generalizada (*Generalized Cross Validation*, GCV) y el criterio *Quasi Optimality*.

La estructura del artículo se describe a continuación. En la Sección 2 se describe la ecuación de campo en viscoelasticidad armónica. La descripción del método BKM se pueden encontrar en la Sección 3. En la Sección 4 se presentan y explican los métodos de regularización, mientras que en la Sección 5 se resumen los distintos experimentos realizados para evaluar las técnicas. Por último, en la Sección 6, se resumen las conclusiones arribadas durante el trabajo y las líneas de trabajo futuro planteadas.

2. LA ECUACIÓN DE CAMPO EN VISCOELASTICIDAD ARMÓNICA

La forma general de la ecuación elastodinámica para materiales viscoelásticos en el dominio del tiempo es (Christensen, 1982):

$$c_P^2(t, \cdot) * \nabla \nabla \cdot \mathbf{u}(x, \cdot) - c_S^2(t, \cdot) * \nabla \times \nabla \times \mathbf{u}(x, \cdot) + \mathbf{b}(x, t) = \ddot{\mathbf{u}}(x, t), \quad (1)$$

donde ‘*’ denota el operador viscoelástico:

$$f(t, \cdot) * g(\cdot) = \int_{\tau_0}^t f(t, \tau) \frac{\partial g}{\partial \tau}(\tau) d\tau, \quad (2)$$

$\mathbf{u}(x, t)$ es el vector desplazamiento en el punto x y en el tiempo t , $\mathbf{b}(x, t)$ es la densidad de las fuerzas de volumen actuando en el cuerpo, y, para la aproximación sincrónica (Pipkin, 1972; Sensale et al., 2001),

$$c_P^2(t, \cdot) * = \frac{1 - \nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)\rho} R_E(t, \cdot) * \quad \text{y} \quad (3)$$

$$c_S^2(t, \cdot) * = \frac{1}{2(1 + \nu)\rho} R_E(t, \cdot) * \quad (4)$$

son, respectivamente, la velocidad de las ondas P y S al cuadrado, ν es el coeficiente de Poisson, ρ es la densidad y $R_E(t, \cdot)$ es la función de relajación del material (Christensen, 1982).

Para problemas armónicos, la descripción de la ecuación de campo es obtenida aplicando la transformada de Fourier a la ecuación elastodinámica en el dominio del tiempo. Para fuerzas de volumen nulas el resultado puede ser expresado como:

$$\bar{c}_P^2(\omega) \nabla \nabla \cdot \bar{\mathbf{u}}(x, \omega) - \bar{c}_S^2(\omega) \nabla \times \nabla \times \bar{\mathbf{u}}(x, \omega) + \omega^2 \bar{\mathbf{u}}(x, \omega) = 0, \quad (5)$$

donde ω es la frecuencia angular, la barra sobre el vector desplazamiento denota la variable transformada y

$$\bar{c}_P^2(\omega) = \frac{1 - \nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)\rho} E^*(\omega), \quad (6)$$

$$\bar{c}_S^2(\omega) = \frac{1}{2(1 + \nu)\rho} E^*(\omega), \quad (7)$$

donde el módulo complejo $E^*(\omega)$ es la transformada de Fourier de $R_E(t, \cdot)$ (Pipkin, 1972; Sensale et al., 2001). Modelos fraccionales de Boltzmann o Kelvin pueden ser utilizados para definir $E^*(\omega)$ (Schmidt y Gaul, 2002; Canelas y Sensale, 2010). En este trabajo el siguiente modelo es utilizado para definir el módulo complejo:

$$E^*(\omega) = (1 + 2i\beta)E, \quad (8)$$

donde E es el módulo de Young del material y β es conocido como el factor viscoso de amortiguamiento.

3. EL MÉTODO BKM

La idea fundamental en cualquier método de Trefftz es la aproximación de la variable de interés, en este caso el campo de desplazamientos, por la superposición de un número finito de funciones, cada una de ellas solución de la ecuación de campo homogénea. Para problemas de viscoelasticidad armónicos, la aproximación \mathbf{u}_N del campo de desplazamientos $\bar{\mathbf{u}}$ en el método descrito por Canelas y Sensale (2010) es

$$\mathbf{u}_N(x, \omega) = \sum_{j=1}^N \hat{\mathbf{u}}(x, x_j, \omega) \boldsymbol{\alpha}_j, \quad (9)$$

donde x es un punto en el dominio Ω del problema y los N puntos x_j son fuentes fijas localizadas en el contorno $\partial\Omega$. La función de Trefftz $\hat{\mathbf{u}}$, que proporciona una matriz de tamaño 2×2 en el caso bidimensional, tiene simetría radial con respecto a la fuente x_j , es decir, $\hat{\mathbf{u}}(x, x_j, \omega) = \hat{\mathbf{u}}(r, \omega)$ donde $r = \|x - x_j\|$. La expresión de $\hat{\mathbf{u}}$ es descrita en la Sección 3.1. Los vectores $\boldsymbol{\alpha}_j$ constituyen las incógnitas del método.

Al igual que las funciones radiales de Trefftz, \mathbf{u}_N satisface la Ec. (5), es decir,

$$\bar{c}_P^2(\omega) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u}_N(x, \omega) - \bar{c}_S^2(\omega) \nabla \times \nabla \times \mathbf{u}_N(x, \omega) + \omega^2 \mathbf{u}_N(x, \omega) = 0. \quad (10)$$

Varias alternativas existen para imponer las condiciones de contorno. En el método de colocación se requiere de la satisfacción de las siguientes ecuaciones:

$$\mathbf{u}_N(x_j, \omega) = \bar{\mathbf{u}}(x_j, \omega), \quad \forall x_j \in \partial\Omega_u, \quad (11)$$

$$\mathbf{p}_N(x_j, \omega) = \bar{\mathbf{p}}(x_j, \omega), \quad \forall x_j \in \partial\Omega_p, \quad (12)$$

donde al lado izquierdo de las Ecs. (11) y (12) están las aproximaciones correspondientes al desplazamiento dado por la Ec. (9) y su fuerza de superficie asociada. Al lado derecho de las Ecs. (11) y (12) se representan las condiciones de contorno conocidas. Las Ecs. (11) y (12) pueden ser escritas utilizando la Ec. (9) como:

$$\sum_{j=1}^N \mathbf{K}_{ij} \boldsymbol{\alpha}_j = \mathbf{y}_i \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{K} \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{y}, \quad (13)$$

donde α_j contiene las incógnitas del término número j de la expansión de la Ec. (9). En el caso en que $x_i \in \partial\Omega_u$, $\mathbf{K}_{ij} = \hat{\mathbf{u}}(x_i, x_j, \omega)$ e $\mathbf{y}_i = \bar{\mathbf{u}}(x_i, \omega)$. Si $x_i \in \partial\Omega_p$, $\mathbf{K}_{ij} = \hat{\mathbf{p}}(x_i, x_j, \omega)$ e $\mathbf{y}_i = \bar{\mathbf{p}}(x_i, \omega)$. El método BKM resuelve el sistema lineal de la Ec. (13) para obtener la solución aproximada dada por la Ec. (9).

3.1. Función radial de Trefftz

La expresión de la función radial de Trefftz propuesta por Canelas y Sensale (2010) en notación indicial es:

$$\hat{\mathbf{u}}_{\ell k} = \frac{1}{2\pi\rho\bar{c}_S^2} \left[\psi\delta_{\ell k} - \chi \frac{\partial r}{\partial x_\ell} \frac{\partial r}{\partial x_k} \right], \quad (14)$$

donde las funciones ψ y χ son:

$$\psi(r) = r^{-2} [k_{Pr}J_1(k_{Pr}) - k_{Sr}J_1(k_{Sr}) + k_{Sr}^2r^2J_0(k_{Sr})], \quad (15)$$

$$\chi(r) = r^{-2} [2k_{Pr}J_1(k_{Pr}) - k_{Pr}^2r^2J_0(k_{Pr}) - 2k_{Sr}J_1(k_{Sr}) + k_{Sr}^2r^2J_0(k_{Sr})], \quad (16)$$

donde $r = \|x - x_j\|$, los números de onda son $k_P = \omega/\bar{c}_P(\omega)$, $k_S = \omega/\bar{c}_S(\omega)$, y J_ν denota la función de Bessel del primer tipo y orden ν . La fuerza de superficie sobre un plano de normal \mathbf{n} , correspondiente a la función radial de Trefftz de la Ec. (14), es

$$\hat{\mathbf{p}}_{\ell k} = \frac{1}{2\pi} \left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial r} - \frac{\chi}{r} \right) \left(\delta_{\ell k} \frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} + \mathbf{n}_\ell \frac{\partial r}{\partial x_k} \right) - \frac{2\chi}{r} \frac{\partial r}{\partial x_\ell} \left(\mathbf{n}_k - 2 \frac{\partial r}{\partial x_k} \frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} \right) - 2 \frac{\partial\chi}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x_\ell} \frac{\partial r}{\partial x_k} \frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} + \mathbf{n}_k \left(\frac{\bar{c}_P^2}{\bar{c}_S^2} - 2 \right) \left(\frac{\partial\psi}{\partial r} - \frac{\partial\chi}{\partial r} - \frac{\chi}{r} \right) \frac{\partial r}{\partial x_\ell} \right]. \quad (17)$$

4. MÉTODOS DE REGULARIZACIÓN

Cuando se resuelve un sistema lineal de la forma $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^m$, se busca el vector solución $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ tal que el residuo $\mathbf{r} = \mathbf{b} - \mathbf{Ax}$, es nulo o por lo menos tiene norma mínima. Sin embargo, si el sistema es mal condicionado (pequeños errores en las componentes de \mathbf{A} o \mathbf{b} conducen a grandes errores en la solución \mathbf{x}), las estrategias tradicionales (eliminación Gaussiana, factorización LU, CGM) pueden conducir a resultados completamente erróneos y es en estos contextos que se utilizan las técnicas de regularización.

El objetivo de las técnicas de regularización no es encontrar una solución \mathbf{x} que satisfaga $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, sino buscar un equilibrio entre minimizar la norma del residuo \mathbf{r} y minimizar la norma del vector $\mathbf{x} - \mathbf{x}^*$, donde $\mathbf{x}^* \in \mathbb{C}^n$ es una estimación conocida de la solución. Las técnicas de regularización pueden clasificarse en dos grandes familias. Los métodos pertenecientes al primer grupo se denominan directos, mientras que en los métodos de la segunda familia la solución se construye de forma iterativa.

En lo que resta de la sección se describen someramente las técnicas de regularización y se detallan algunas técnicas para la selección de los parámetros. En el trabajo de Hansen (1998a) se puede profundizar en la temática.

4.1. Métodos directos de regularización

4.1.1. Regularización de Tikhonov

La técnica de Tikhonov (1963) busca obtener una solución \mathbf{x}_λ :

$$\mathbf{x}_\lambda = \arg \min_{\mathbf{x}} \{ \|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|_2^2 + \lambda^2 \|\mathbf{L}(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*)\|_2^2 \}, \quad (18)$$

donde $\lambda \in \mathbb{R}^+$ es el parámetro de regularización a determinar, $\mathbf{L} \in \mathbb{C}^{p \times n}$ es una matriz pre-viamente definida y \mathbf{x}^* es una estimación de la solución. Este problema se puede abordar como un problema de mínimos cuadrados que, para el caso $\mathbf{L} = \mathbf{I}_n$, tiene la solución exacta: $\mathbf{x}_\lambda = (\mathbf{A}^H \mathbf{A} + \lambda^2 \mathbf{I}_n)^{-1} (\mathbf{A}^H \mathbf{b} + \lambda^2 \mathbf{I}_n \mathbf{x}^*)$, donde \mathbf{A}^H denota la matriz conjugada transpuesta de \mathbf{A} . En esta forma se puede escribir la matriz \mathbf{A} como su descomposición SVD que es $\mathbf{A} = \mathbf{U} \mathbf{D} \mathbf{V}^H = \sum_{i=1}^p \mathbf{u}_i \sigma_i \mathbf{v}_i^H$ donde $p = \min(n, m)$, $\mathbf{U} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_m)$ y $\mathbf{V} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)$ son matrices cuyas columnas son ortogonales, $\mathbf{U} \mathbf{U}^H = \mathbf{I}_m$, $\mathbf{V} \mathbf{V}^H = \mathbf{I}_n$ y $\mathbf{D} \in \mathbb{C}^{m \times n}$ es una matriz diagonal no negativa con $D_{ii} = \sigma_i \geq 0$. Los valores σ_i son llamados valores singulares de \mathbf{A} . Utilizando la descomposición SVD, la solución puede ser escrita de la siguiente forma:

$$\mathbf{x}_\lambda = \sum_{i=1}^n \left(f_i \frac{\mathbf{u}_i^H \mathbf{b}}{\sigma_i} + (1 - f_i) \mathbf{v}_i^H \mathbf{x}^* \right) \mathbf{v}_i, \quad \text{donde} \quad f_i = \frac{\sigma_i^2}{\sigma_i^2 + \lambda^2}. \quad (19)$$

4.1.2. TSVD y DSVD

Las técnicas TSVD y DSVD se basan en la descomposición SVD de la matriz \mathbf{A} . En la práctica se trabaja con matrices \mathbf{A} que desde un punto de vista estrictamente matemático tienen rango completo. Sin embargo desde un punto de vista numérico, pequeñas perturbaciones en los coeficientes de la matriz \mathbf{A} modifican el rango de la misma. La técnica SVD reemplaza la matriz \mathbf{A} por una matriz \mathbf{A}_k de rango deficiente de la siguiente forma:

$$\mathbf{A}_k = \sum_{i=1}^k \mathbf{u}_i \sigma_i \mathbf{v}_i^H \quad k \leq n. \quad (20)$$

lo que es igual a reemplazar los valores singulares de \mathbf{A} menores a σ_k por ceros, siendo σ_i , \mathbf{u}_i y \mathbf{v}_i obtenidos por medio de la descomposición SVD como descrito en la sección anterior. Finalmente se procede a resolver un nuevo problema de mínimos cuadrados $x_k = \arg \min_{\mathbf{x}} \|\mathbf{A}_k \mathbf{x} - \mathbf{b}\|$ cuya solución de norma mínima se puede escribir como:

$$x_k = \sum_{i=1}^k \frac{\mathbf{u}_i^H \mathbf{b}}{\sigma_i} \mathbf{v}_i, \quad \text{o lo que es lo mismo:} \quad x_k = \sum_{i=1}^n f_i \frac{\mathbf{u}_i^H \mathbf{b}}{\sigma_i} \mathbf{v}_i, \quad (21)$$

donde $f_i = 1 \quad \forall i \leq k$ y $f_i = 0 \quad \forall i > k$. Es decir, se filtra la solución del sistema, pudiendo escribir la solución en función de f_i (siendo estos los factores de filtrado de la solución). En el caso del método DSVD se define $f_i = \frac{\sigma_i}{\sigma_i + \lambda}$ (para el caso $\mathbf{L} = \mathbf{I}_n$), quedando la solución como se expresa en la Ec. (22).

$$x_\lambda = \sum_{i=1}^n f_i \frac{\mathbf{u}_i^H \mathbf{b}}{\sigma_i} \mathbf{v}_i. \quad (22)$$

4.1.3. LSQC

Esta técnica es similar a la regularización de Tikhonov y se basa en la resolución de un problema de mínimos cuadrados. En este trabajo se utilizó la siguiente formulación:

$$\mathbf{x}_\delta = \arg \min_{\mathbf{x}} \{ \|\mathbf{L}_n (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*)\|, \text{ tal que } \|\mathbf{A} \mathbf{x} - \mathbf{b}\| \leq \delta \}, \quad \text{con } \mathbf{L}_n = \mathbf{I}_n. \quad (23)$$

4.1.4. TTLS

Este método toma la descomposición SVD de la matriz compuesta por $[\mathbf{A}, \mathbf{b}] = \tilde{\mathbf{U}} \tilde{\mathbf{D}} \tilde{\mathbf{V}}^H$ donde $\tilde{\mathbf{V}} \in \mathbb{C}^{(n+1) \times (n+1)}$ y particiona la matriz de la siguiente forma:

$$\tilde{\mathbf{V}} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{V}}_{11} & \tilde{\mathbf{V}}_{12} \\ \tilde{\mathbf{V}}_{21} & \tilde{\mathbf{V}}_{22} \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{V}}_{11} \in \mathbb{C}^{n \times k}, \quad \tilde{\mathbf{V}}_{22} \in \mathbb{C}^{1 \times (n+1-k)}, \quad (24)$$

donde k es el parámetro de truncamiento. Entonces la solución es:

$$\tilde{\mathbf{x}}_k = -\tilde{\mathbf{V}}_{12} \tilde{\mathbf{V}}_{22}^H / \|\tilde{\mathbf{V}}_{12}\|_2^2. \quad (25)$$

Tiene sentido aplicar este método cuando no hay variaciones abruptas en el espectro de los valores singulares (Hansen, 1998a).

4.2. Métodos iterativos de regularización

4.2.1. CGM y LSQR

El CGM (Saad, 2003) es un método iterativo ampliamente difundido para resolver sistemas lineales de matriz hermítica y definida positiva. Aplicar el método CGM al sistema $\mathbf{A}^H \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{A}^H \mathbf{b}$ tiene efectos regularizantes, donde la cantidad de iteraciones oficia de parámetro de regularización.

También es posible obtener un algoritmo híbrido entre un algoritmo de regularización directo e iterativo. La idea es usar el algoritmo de Lanczos (Golub y Van Loan, 1996) para construir la matriz bidiagonal \mathbf{B}_k y en cada paso sustituir la factorización QR de \mathbf{B}_k por un esquema de regularización como por ejemplo utilizando la regularización de Tikhonov o TSVD. A este procedimiento se le denomina LSQR.

4.2.2. Método- ν

Este método iterativo, similar al método CGM, converge más lentamente que el anterior pero es menos sensible al parámetro de regularización, la cantidad de interacciones. Una restricción del método es que para obtener convergencia, $\|\mathbf{A}\|_2$ tiene que ser levemente menor que uno, de lo contrario el método diverge (Hansen, 1998a). Una forma de abatir esta dificultad es usar el algoritmo de bidiagonalización de Lanczos.

4.3. Criterios para la selección de parámetros de regularización

Existen distintas técnicas para la elección de los parámetros de los métodos, a continuación se describen algunas de las más difundidas. Las técnicas de regularización de Tikhonov, TSVD y DSVD se valen de parámetros para determinar las soluciones regularizadas de los sistemas lineales que intentan resolver. En general, distintos criterios de selección de parámetros de regularización dan lugar a soluciones diferentes. Debido a que los parámetros constituyen un factor muy importante para obtener la solución, en este trabajo se prueban distintos criterios. Entre ellos destacamos el criterio L-Curve, el GCV y el *Quasi Optimality*. En Hansen (1998a) se ofrece un estudio profundo del tema.

4.3.1. Curva-L

Una de las herramientas más utilizadas para determinar el parámetro de regularización es la Curva-L. Esta herramienta gráfica consiste en graficar para todos los λ posibles los valores que

asume $\|\mathbf{L}(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*)\|_2$ contra los de la norma del residuo $\|\mathbf{b} - \mathbf{Ax}\|_2$. Esto permite visualizar cuánto se compromete el residuo frente a la norma de la solución regularizada del problema. Cuando se grafica utilizando escala logarítmica en cada eje, generalmente se obtiene una curva en forma de L, de ahí el nombre del criterio. El parámetro λ que se utiliza es aquel asociado al punto de mayor curvatura.

Este criterio es utilizado para elegir el parámetro λ en la regularización de Tikhonov y en el DSVD, pero también puede extenderse al caso de parámetros de regularización discretos, como el método TSVD.

4.3.2. GCV

Este criterio se basa en lo siguiente, si no se tiene en cuenta un elemento b_i de \mathbf{b} , entonces la solución regularizada debería predecir en forma correcta lo ocurrido. Esto sugiere elegir el parámetro de regularización que minimiza la función:

$$GCV = \frac{\|\mathbf{Ax}_\lambda - \mathbf{b}\|_2^2}{\text{traza}(\mathbf{I}_n - \mathbf{AA}^T)}, \quad (26)$$

donde \mathbf{A}^I es la matriz inversa correspondiente al método de regularización (Hansen, 1998a), y por lo tanto satisface $\mathbf{A}^I\mathbf{b} = \mathbf{x}_\lambda$. El criterio GCV puede definirse para parámetros discretos o continuos.

4.3.3. Quasi Optimality

Este criterio fue inicialmente definido para parámetros continuos, pero bajo ciertas suposiciones se puede extender a parámetros discretos. El criterio se basa en minimizar la función:

$$Q = \left\| \frac{d\mathbf{x}_\lambda}{d\lambda} \right\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(f_i(1 - f_i) \frac{\mathbf{u}_i^H \mathbf{b}}{\sigma_i} \right)^2}. \quad (27)$$

5. EXPERIMENTACIÓN

La experimentación se realizó con MatLab como entorno de trabajo, utilizando números en doble precisión. Además, se empleó el paquete *Regularization Tools*, versión 4.1 (Hansen, 1998b) que incluye la implementación de las técnicas de regularización y los criterios de selección de parámetro de regularización ya mencionados.

5.1. Caso de prueba

El ejemplo considerado corresponde a una ménsula de 4,0 m de altura por 8,0 m de longitud sujeta a un desplazamiento vertical uniforme del extremo empotrado. Las propiedades del material son $G = 0,8 \times 10^{11}$ Pa, $\nu = 0,3$, $E = 2(1 + \nu)G$, $\beta = 0,05$ y $\rho = 7800,0$ kg/m³. Los resultados son comparados con el obtenido utilizando el programa QUADPLEH (BEM con elementos cuadráticos) descrito en (Dominguez, 1993).

El módulo de la respuesta en frecuencia en el punto medio del extremo libre obtenido con el programa QUADPLEH y con la versión original del BKM es mostrado en la Fig. 1. El valor ω_1 de las figuras corresponde a la primera frecuencia fundamental de la viga de Euler constituida por un material puramente elástico, $\omega_1 \approx 327,6$ s⁻¹ (Han et al., 1999).

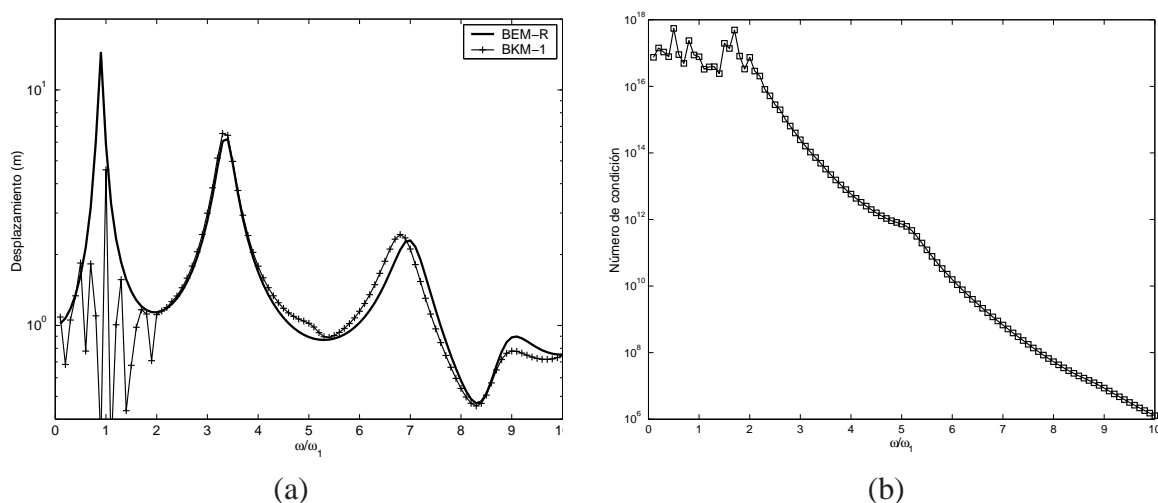


Figura 1: (a) Resultados originales. (b) Número de condición originales

5.2. Evaluación experimental

En primera instancia se evaluó la aplicación de la técnica de regularización de Tikhonov. En este sentido en la Fig. 2 (a) y (b) se presentan los resultados obtenidos con la técnica de Tikhonov al escoger el parámetro λ mediante la Curva-L y GCV respectivamente. Los resultados observados muestran que la técnica no proporciona una solución satisfactoria para todo el conjunto de frecuencias. Los problemas de precisión persisten para las bajas frecuencias donde el modelo sin regularización tampoco arrojaba resultados óptimos. Sin embargo, utilizando GCV se puede apreciar cierta mejora en el intervalo $\omega/\omega_1 = [0, 2]$. También se utilizó el criterio *Quasi Optimality* para determinar el parámetro λ pero no arrojó resultados beneficiosos.

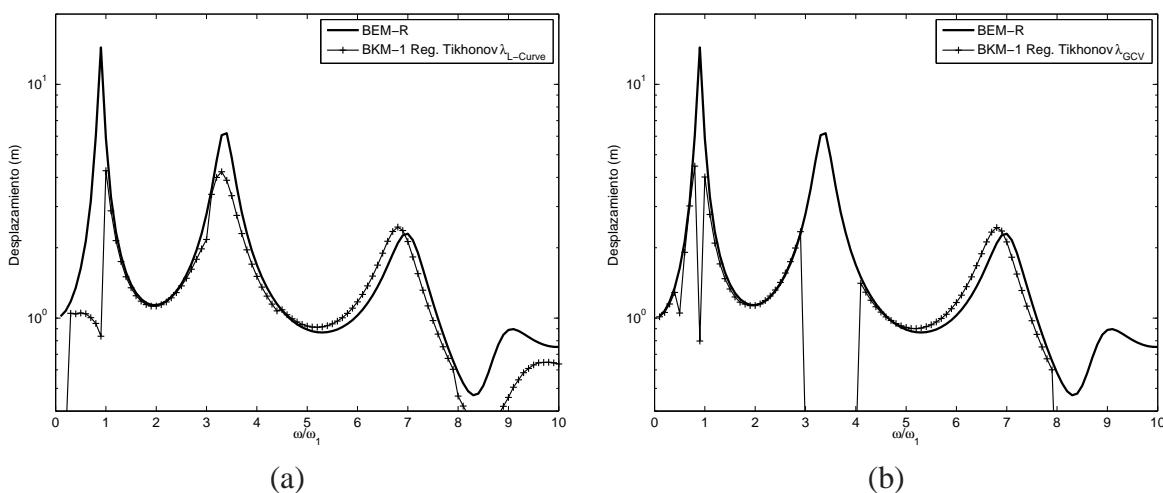


Figura 2: (a) Aplicación de la técnica de Tikhonov con λ obtenido mediante Curva-L. (b) Aplicación de la técnica de Tikhonov con λ obtenido mediante GCV.

En segunda instancia se abordó la técnica TSVD, escogiendo los parámetros con las técnicas Curva-L y GCV. Estos resultados se resumen en la Fig. 3 (a) y (b) respectivamente. También se probó con *Quasi Optimality*, no obteniéndose resultados positivos. Notar, que en este caso el parámetro de regularización es discreto y representa el rango de la matriz A_k .

La evaluación de la técnica DSVD utilizando los parámetros de regularización antes men-

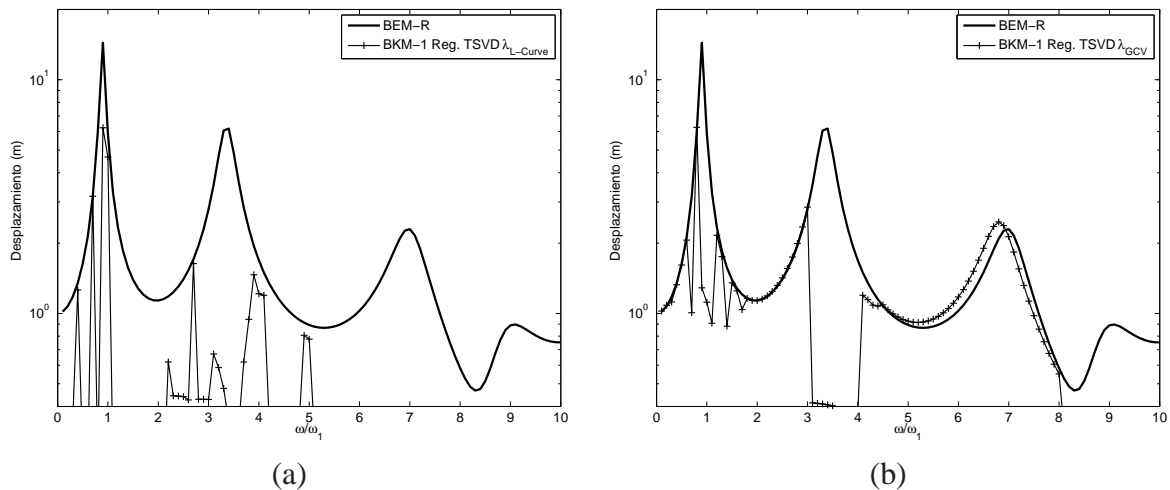


Figura 3: (a) Aplicación de la técnica TSVD con λ obtenido mediante Curva-L. (b) Aplicación de la técnica TSVD con λ obtenido mediante GCV.

cionadas arrojó los resultados presentados en las Fig. 4 (a) y (b). Nuevamente utilizando GCV se logró mejorar los resultados en el intervalo crítico de $\omega/\omega_1 = [0, 2]$.

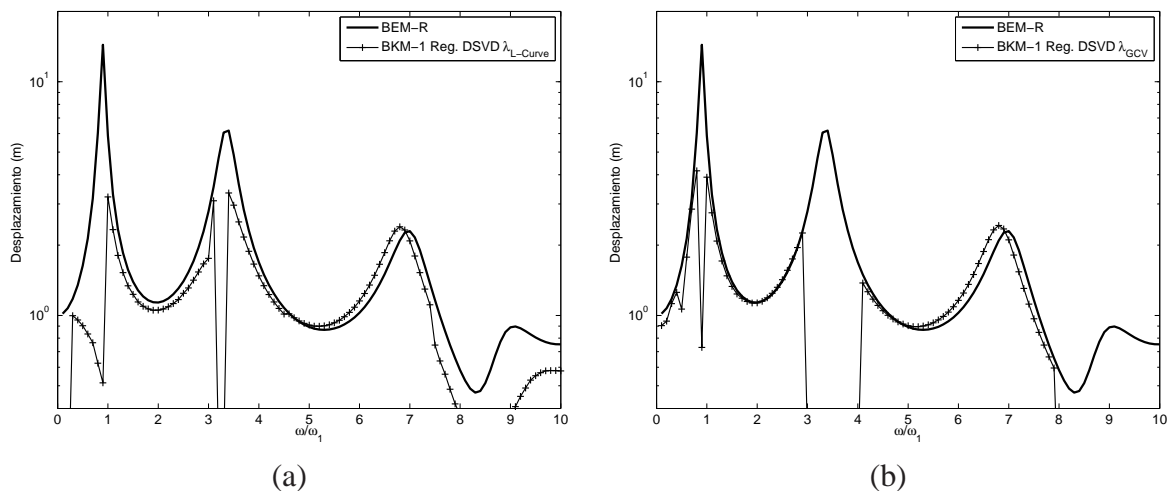


Figura 4: (a) Aplicación de la técnica DSVD con λ obtenido mediante Curva-L. (b) Aplicación de la técnica DSVD con λ obtenido mediante GCV.

En la Fig. 5 se presenta la gráfica con los resultados obtenidos utilizando la estrategia de regularización LSQR. Estas pruebas no alcanzaron resultados alentadores.

También fueron evaluados las técnicas CGM y Método- ν , arribando a resultados muy alejados de los correctos en todos los casos, por ende no se profundiza en los resultados de las mismas.

5.3. Estudios preliminares

Si bien en la sección anterior se obtuvieron algunos resultados promisorios, por ejemplo utilizando la regularización de Tikhonov con GCV, en ningún caso se logró representar en forma correcta los desplazamientos en todo el rango de frecuencias considerado. Por esta razón, en

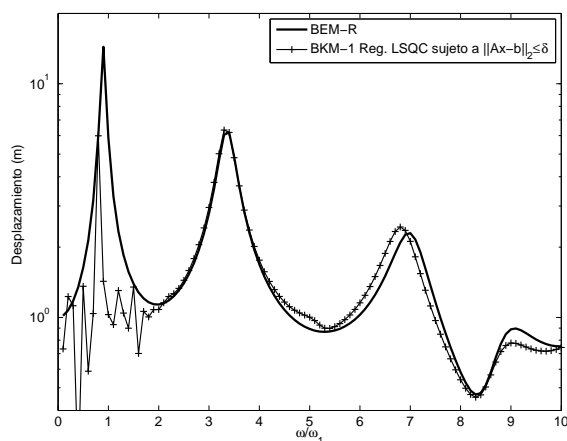


Figura 5: Aplicación de la técnica LSQC.

esta sección se analizan en forma preliminar algunas estrategias que podrían arrojar resultados positivos.

5.3.1. Utilización selectiva de regularización

En la Fig. 3 (b) se observa que la solución regularizada utilizando la técnica TSVD difiere en forma importante de la solución obtenida por el BEM para la región $\omega/\omega_1 = [1, 2] \cup [3, 4] \cup [8, 10]$. Para los dos últimos tramos se observó que el rango de A_k difiere sustancialmente con el rango de la matriz original del sistema, por lo tanto una posible mejora al algoritmo es mantener el rango de la matriz A si el rango de A_k es menor. En la Fig. 6 se presenta la solución aplicando la técnica de regularización en forma selectiva.

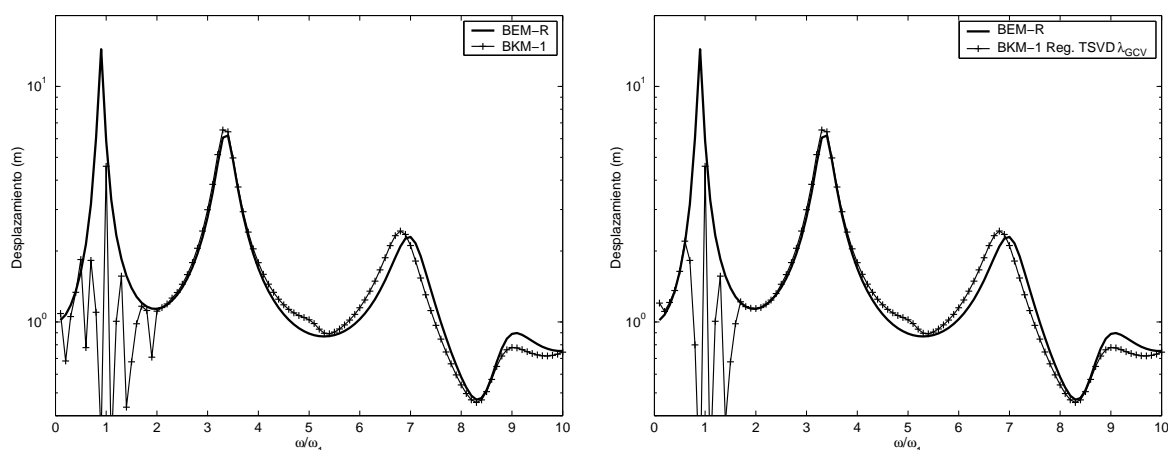


Figura 6: (a) Resultados originales (b) Resultados obtenidos mediante la utilización selectiva de regularización.

5.3.2. Perturbación diagonal

Una situación detectada en el estudio realizado, es que las matrices poseen gran cantidad de ceros en la diagonal. Esto se debe a la forma de construcción de la matriz en la que los coeficientes son calculados, evaluando una combinación lineal de las funciones de Bessel. Notar

que los coeficientes K_{ij} son función de la distancia entre los puntos x_i y x_j , y por lo tanto aquellos de la diagonal son calculados para distancias nulas.

En este método se sumó un valor δ a la diagonal principal de la matriz \mathbf{K} . El objetivo que persigue esta perturbación es obtener entradas no nulas en la diagonal y así intentar disminuir el número de condición de la matriz del sistema y a su vez afectar lo menos posible la solución. Estas pruebas no han mostrado resultados exitosos.

5.3.3. Utilización de más puntos de campo

Otro problema encontrado al representar el problema fue que las matrices obtenidas tenían rango numérico deficiente. Es más, en muchas secuencias de ω el rango de las matrices decrece considerablemente. Teniendo en cuenta esta situación se estudió en forma preliminar agregar ecuaciones a través de puntos de colocación adicionales. Así, se obtienen matrices rectangulares que permitieron mejorar levemente los números de condición, esto se expresa en la Fig. 7. Sin embargo, los resultados en cuanto a los desplazamientos obtenidos no fueron satisfactorios.

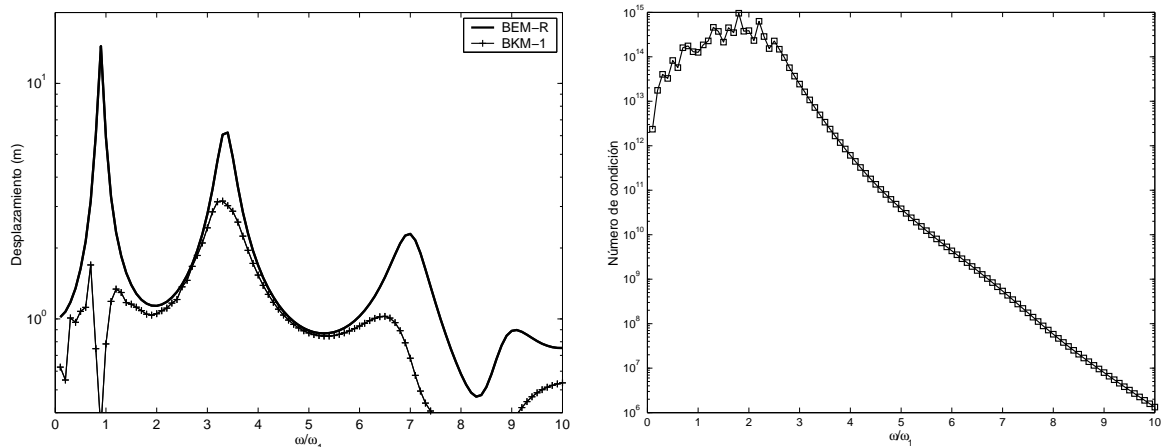


Figura 7: (a) Desplazamientos obtenidos con más puntos de campo. (b) Número de condición con más puntos de campo.

5.3.4. Tikhonov con estimación de la solución

Otra variación de las técnicas de regularización que fue evaluada, es el uso de información extra para comenzar la búsqueda de la solución en la técnica de regularización. En particular, el método de Tikhonov permite ingresar un vector solución inicial. En este sentido, y teniendo en cuenta la estrategia de cálculo utilizada, que itera en los valores de ω , se evaluó ingresar en cada paso como solución inicial el vector solución de la frecuencia ω anterior. En la Fig. 8 se presentan los resultados obtenidos con esta estrategia, escogiendo el parámetro de regularización con las técnicas Curva-L y GCV.

Este experimento es el que arrojó mejores resultados, principalmente en lo que refiere al rango más conflictivo para el método original $\omega/\omega_1 = [0, 2]$.

6. CONCLUSIONES

En el trabajo se evaluó la aplicación de estrategias de regularización a los sistemas lineales del método BKM para modelar una ménsula de 4,0 m de altura por 8,0 m de longitud sujeta a

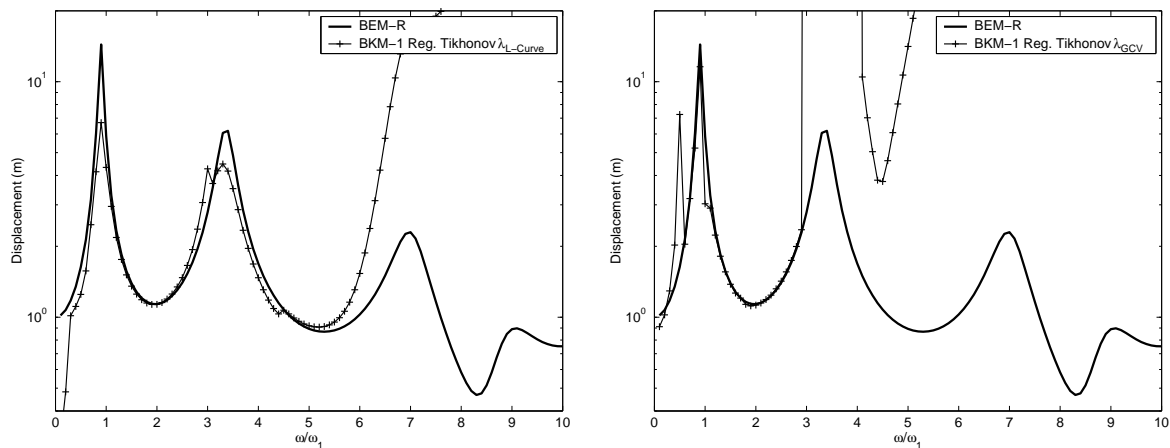


Figura 8: (a) Tikhonov con estimación de la solución usando la Curva-L. (b) Tikhonov con estimación de la solución usando GCV

un desplazamiento vertical uniforme del extremo empotrado.

Los resultados obtenidos al aplicar las técnicas de regularización no alcanzaron niveles satisfactorios, sin embargo algunos resultados preliminares son alentadores en varios aspectos. Se logró aumentar el rango de las matrices de los sistemas utilizando más puntos de campo, se avanzó en la utilización de las técnicas de regularización en forma selectiva, aplicando únicamente las técnicas en las zonas duras y se aproximó en forma notoriamente mejor el problema en el rango originalmente más problemático al utilizar información inicial para comenzar la búsqueda de la solución.

Algunas líneas de trabajo futuro incluyen avanzar en la utilización de las técnicas estudiadas en este trabajo y en particular profundizar en el estudio de técnicas híbridas. También resulta interesante el estudio en el manejo de la precisión en la etapa de generación de las matrices, buscando abatir el problema de generación de matrices con rango deficiente.

AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen a la Comisión Sectorial de Investigación Científica (CSIC) por el apoyo financiero. El tercer autor agradece a la Agencia Nacional de Investigación e Innovación (ANII) por el apoyo financiero.

REFERENCIAS

- Alves C.J.S. On the choice of source points in the method of fundamental solutions. *Eng. Anal. Bound. Elem.*, 33(12):1348–1361, 2009.
- Buhmann M.D. *Radial basis functions: theory and implementations*, volumen 12 de *Cambridge Monographs on Applied and Computational Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2003.
- Canelas A. y Sensale B. A boundary knot method for harmonic elastic and viscoelastic problems using single-domain approach. *Eng. Anal. Bound. Elem.*, 34(10):845–855, 2010.
- Chen C.S., Cho H.A., y Golberg M.A. Some comments on the ill-conditioning of the method of fundamental solutions. *Eng. Anal. Bound. Elem.*, 30(5):405–410, 2006.
- Chen W., Shen L.J., Shen Z.J., y Yuan G.W. Boundary knot method for Poisson equations. *Eng. Anal. Bound. Elem.*, 29(8):756–760, 2005.
- Chen W. y Tanaka M. A meshless, integration-free, and boundary-only RBF technique. *Comput.*

- Math. Appl.*, 43(3-5):379–391, 2002.
- Christensen R.M. *Theory of Viscoelasticity, An Introduction*. Academic Press, New York, second edición, 1982.
- Cisilino A.P. y Sensale B. Application of a simulated annealing algorithm in the optimal placement of the source points in the method of the fundamental solutions. *Comput. Mech.*, 28(2):129–136, 2002.
- Dominguez J. *Boundary elements in dynamics*. International Series on Computational Engineering. Computational Mechanics Publications, Southampton, 1993.
- Golub G.H. y Van Loan C.F. *Matrix computations (3rd ed.)*. Johns Hopkins University Press, Baltimore, MD, USA, 1996. ISBN 0-8018-5414-8.
- Han S.M., Benaroya H., y Wei T. Dynamics of transversely vibrating beams using four engineering theories. *J. Sound Vibration*, 225(5):935–988, 1999.
- Hansen P.C. *Rank-deficient and discrete ill-posed problems: numerical aspects of linear inversion*. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA, USA, 1998a. ISBN 0-89871-403-6.
- Hansen P.C. Regularization tools - a Matlab package for analysis and solution of discrete ill-posed problems - version 3.0 for Matlab 5.2. *Numer. Algorithms*, 6:1–35, 1998b.
- Jin B. y Zheng Y. Boundary knot method for some inverse problems associated with the Helmholtz equation. *Internat. J. Numer. Methods Eng.*, 62(12):1636–1651, 2005.
- Kang S.W. y Lee J.M. Free vibration analysis of arbitrarily shaped plates with clamped edges using wave-type functions. *J. Sound Vibration*, 242(1):9–26, 2001.
- Kang S.W., Lee J.M., y Kang Y.J. Vibration analysis of arbitrarily shaped membranes using non-dimensional dynamic influence function. *J. Sound Vibration*, 221(1):117–132, 1999.
- Kupradze V.D. A method for the approximate solution of limiting problems in mathematical physics. *USSR Comput. Math. Math. Phys.*, 4:199–205, 1964.
- Pipkin A.C. *Lectures on Viscoelasticity Theory*. Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1972.
- Ramachandran P.A. Method of fundamental solutions: singular value decomposition analysis. *Commun. Numer. Meth. Eng.*, 18(11):789–801, 2002.
- Saad Y. *Iterative Methods for Sparse Linear Systems*. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA, USA, 2003. ISBN 0898715342.
- Schmidt A. y Gaul L. Finite element formulation of viscoelastic constitutive equations using fractional time derivatives. *Nonlinear Dyn.*, 29(1–4):37–55, 2002.
- Sensale B., Partridge P.W., y Creus G.J. General boundary element solution for ageing viscoelastic structures. *Internat. J. Numer. Methods Eng.*, 50(6):1455–1468, 2001.
- Tikhonov A.N. Solution of incorrectly formulated problems and the regularization method. *Soviet Math. Dokl.*, 4:1035–1038, 1963.
- Wang F., Chen W., y Jiang X. Investigation of regularized techniques for boundary knot method. *Commun. Numer. Meth. Eng.*, 2009. doi:10.1002/cnm.1275.
- Wei T., Hon Y.C., y Ling L. Method of fundamental solutions with regularization techniques for Cauchy problems of elliptic operators. *Eng. Anal. Bound. Elem.*, 31(4):373–385, 2007.