

SELEÇÃO DE TOPOLOGIAS ÓTIMAS PARA ESTRUTURAS DO CONTÍNUO COM MINIMIZAÇÃO DE VOLUME SUJEITA A RESTRIÇÃO DE TENSÃO VIA “SMOOTHING ESO” (SESO)

Hélio L. Simonetti, Francisco de A. das Neves, Valério S. Almeida

*Departamento de Engenharia Civil, Universidade Federal de Ouro Preto
Campus Morro do Cruzeiro, Bauxita, 35400-000, Ouro Preto - MG – Brasil
heliosimonetti@ig.com.br, fassis@em.ufop.br, valerio@em.ufop.br,
<http://www.propec.ufop.br>*

Palavras-Chave: Otimização evolucionária topológica, Método dos elementos finitos, Formulação livre, Elemento finito triangular.

Resumo. O artigo aborda a otimização topológica em problemas de elasticidade plana linear considerando a minimização do volume com restrição de tensão e empregando um índice de performance como monitoramento para o encontro da região de ótimo. Utiliza-se para este fim o método clássico da otimização evolucionária estrutural, ou ESO - Evolutionary Structural Optimization. Este procedimento de otimização baseia-se na retirada sistemática e gradativa dos elementos com menores tensões em comparação com a tensão máxima da estrutura. Procedimento este também conhecido como um processo “hard-kill”. Propõe-se neste trabalho uma variante do método ESO, denominado de SESO - Smoothing ESO, cuja filosofia baseou-se na observação de que se o elemento não for realmente necessário à estrutura, naturalmente sua contribuição de rigidez vai diminuindo progressivamente, até que ele não tenha mais influência. Isto é, sua remoção é feita de forma suave, atenuando os valores da matriz constitutiva do elemento, como se este estivesse em processo de danificação. Define-se também o índice de performance para o monitoramento deste processo evolucionário suavizado. As aplicações do ESO e do SESO são feitas com o método dos elementos finitos, mas considerando um elemento finito triangular e de alta ordem. Por fim, implementou-se um filtro espacial em termos de controle de tensão, o qual associado à técnica SESO se mostrou ser bastante estável e eficiente na eliminação da formação do tabuleiro.

1 INTRODUÇÃO

A otimização topológica (OT) é um campo de pesquisa da engenharia que tem o objetivo de projetar a topologia ótima de estruturas segundo determinado conjunto de critérios de projeto, podendo ser a procura do menor peso da estrutura, ou a restrição a um dado valor limite de tensão, deslocamento ou de frequência do projeto.

A OT é um tema recente no campo da otimização estrutural. Entretanto, os conceitos básicos que dão suporte teórico ao método foram estabelecidos há mais de um século, conforme descreve Rozvany et al. (1995). A grande vantagem da OT em contraste com os métodos tradicionais de otimização, como a otimização de forma ou a otimização paramétrica, é que esses métodos não são capazes de alterar o leiaute da estrutura original, sendo assim não auxiliam o projeto conceitual da estrutura. Desta forma, a aplicação da OT tem se mostrado um caminho profícuo de pesquisas ligadas a projetos de interesse de indústrias, uma vez que facilita a moldagem de materiais sob certas condições de projeto.

Os métodos de OT buscam a solução ótima através da variação do domínio, isto é, topologia da estrutura e no que diz respeito a estruturas contínuas, são divididos em duas grandes classes de abordagens, conforme Eschenauer e Olhoff (2001): a abordagem micro, ou baseado no material, e abordagem macro, ou baseada na geometria.

A abordagem micro trata da existência de uma micro estrutura porosa, que define as relações constitutivas do material em função da sua geometria e da densidade volumétrica de uma célula unitária representativa do material, que por sua vez é representada por variáveis contínuas, sucessivamente distribuídas no espaço do domínio fixo estendido, que consiste numa região do espaço onde pode existir a estrutura, Stump (2006). Um exemplo para este grupo é o método SIMP (Simple Isotropic Material with Penalization), Bendsøe (1989) e Rozvany et al. (1992).

Na abordagem macro, a topologia da estrutura é modificada mediante a inserção de furos no domínio. Como exemplo deste grupo de OT se pode citar o ESO (Evolutionary Structural Optimization) que é baseado no cálculo da função objetivo quando um elemento é removido da malha de elementos finitos e TSA (Topological Sensitivity Analysis), baseado em uma função escalar, denominada Derivada Topológica, que fornece para cada ponto do domínio de definição do problema a sensibilidade da função custo quando um pequeno furo é criado, Labanowski et al. (2004).

Alem destes métodos, tem-se aplicado na resolução de problemas de OT as técnicas estocásticas, com destaque para o uso do algoritmo genético, Kane et al. (1995), Kawamura et al. (2002), Krishnamoorthy et al. (2002), Lagaros et al. (2002), e a técnica do simulated annealing, Kirkpatrick et al. (1983). Entretanto, a principal desvantagem destas técnicas aplicadas na OT é a busca da região ótima quando está associado à otimização de centenas ou até milhares de parâmetros, o que aumenta exponencialmente o tempo e de processamento, muitas vezes inviabilizando sua

aplicação.

Dentre os trabalhos mais aplicados na OT, o ESO tem se destacado por ser um método heurístico com formulação simples a qual é baseada na observação na natureza, de fácil inserção dentro de um código computacional clássico do MEF, sem intrincadas manipulações matemáticas e de fácil adição de novas restrições ao projeto, mas o ESO tem levado a uma condição topológica ótima.

Neste contexto, este artigo apresenta uma variante do método ESO, denominado de SESO, por se aplicar um procedimento de suavização do ESO, e, em adição, ao invés de se usar uma malha estruturada com elementos finitos quadrilaterais, o que é comum, empregam-se elementos finitos triangulares de alta ordem, permitindo a geração de malhas não-estruturadas e assim facilitando geometrias mais complexas. São apresentados alguns exemplos clássicos obtidos na literatura, que demonstram que o procedimento desenvolvido é robusto e genérico.

2 OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL EVOLUCIONÁRIA ESO

O método ESO foi desenvolvido a partir de observações das estruturas na natureza tais como ossos, árvores e conchas, numa tentativa de se analisar como essas estruturas adquiriram forma ao longo do processo de evolução natural. Assim, Xie e Steven (1993) desenvolveram uma maneira bem simples de impor modificações na topologia da estrutura, feita mediante heurística de remoção gradual e sistemática de elementos finitos da malha, correspondentes a regiões que não contribuem efetivamente para a boa performance da estrutura.

Define-se inicialmente uma malha de elementos finitos que circunscreva toda a estrutura, ou domínio de projeto, de forma a incluir as condições de contorno em forças e deslocamentos, cavidades e demais condições iniciais de projeto. Em um processo iterativo, avaliam-se os parâmetros de interesse de otimização, neste artigo em especial é a diminuição da massa mediante um critério de tensão máxima da estrutura. Assim, avaliam-se as tensões de cada elemento, conforme o uso da inequação:

$$\sigma_e^{vm} < RR \cdot \sigma_{max}^{vm} \quad (1a)$$

$$RR_{i+1} = RR_i + RE \quad i=0,1,2,3,\dots \quad (1b)$$

com σ_e^{vm} e σ_{max}^{vm} sendo, respectivamente, as tensão principais de Von Mises do elemento "e" e máxima da estrutura na iteração efetiva "i", RR é um fator denominado de razão de rejeição.

Em cada iteração, os elementos que satisfaçam a inequação (1a) são retirados da estrutura, Figura 1. O fator RR é aplicado para controlar o processo da remoção da estrutura $(0,0 \leq RR \leq 1,0)$. O mesmo ciclo de remoção dos elementos usados pela desigualdade (1a) é repetido até que não haja mais elementos que satisfaçam mais esta inequação (1a). Quando esta situação ocorre, um estado de equilíbrio é alcançado. O processo evolucionário é definido adicionando a RR uma razão de evolução (RE). Assim, um novo ciclo de evolução inicia-se, até que não existam mais

elementos a serem eliminados com esta nova RR. A RR será atualizada conforme a equação (1b), até a obtenção de uma configuração otimizada, alcançada pelo controle de um parâmetro de performance, denominado de índice de performance (PI). Este procedimento, também é conhecido como um método "hard-kill" e pode ser interpretado como segue:

$$D_i(j) = \begin{cases} D_0 & \text{se } j \in \Gamma_i \\ 0 & \text{se } j \in \bar{\Gamma}_i \end{cases} \quad (2)$$

onde $D_i(j)$ é a matriz constitutiva do elemento $j \in \Omega$ na i -ésima iteração, D_0 é a matriz constitutiva inicial do projeto, a qual é definida para cada elemento finito. Na seção 6 deste artigo, os termos desta matriz são definidos na equação (15) e representada por D_m . $W = G_i + \bar{G}_i$ é o domínio da estrutura e $G_i = \{W / (s_e / s_{VM}^{MAX}(W))^3 RR_i\}$ é o conjunto dos elementos que não serão removidos da estrutura (sólido), $\bar{G}_i = W - G_i = \{W / (s_e^{VM} / s_{VM}^{MAX}(W)) < RR_i\}$ é o conjunto dos elementos que serão removidos da estrutura (vazio), todos na i -ésima iteração.

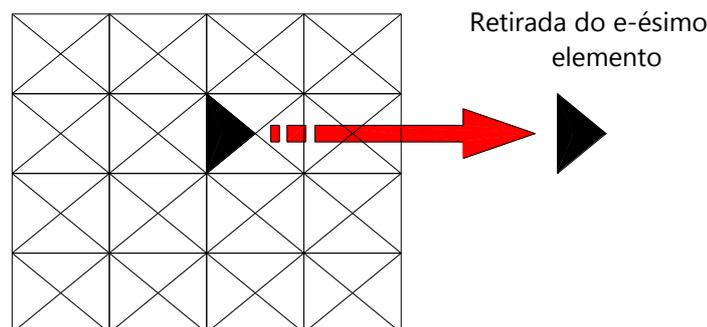


Figura 1: Algoritmo Evolucionário: baseado na retirada de elemento da malha.

3 SUAVIZAÇÃO DA OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL EVOLUCIONÁRIA (SESO)

Pode-se aplicar sobre o método ESO uma condição de relaxação, ou, de suavização do ESO, apresentando assim um procedimento ("soft-kill"), de modo que o material, ou seja, os elementos que deveriam ser removidos pelo critério ESO - seguindo a inequação (1a) - são organizados em n grupos e alocados em ordem crescente de tensões sendo ponderados segundo uma função $0 \leq \eta(j) \leq 1$.

Assim, $p\%$ destes n grupos são removidos, os grupos que contém os elementos com menores tensões (domínio G_{LS}), e os grupos $(1-p\%)$ são devolvidos a estrutura, domínio G_{GS} . Esta remoção e devolução de elementos à estrutura pode ser feita por uma função, linear ou hiperbólica, que pondera a razão $\sigma_e^{VM} / \sigma_{VM}^{MAX}$ dentro do domínio $\bar{\Gamma}$, isto é, permite que elementos que tenham suas tensões próximas e abaixo da tensão máxima, σ_{VM}^{MAX} sejam reintegrados a estrutura a cada iteração, o que proporciona um melhor condicionamento do novo sistema de equações, e a

diminuição da formação do “tabuleiro de xadrez” quando comparado ao ESO, isto porque estes elementos são importantes para a estrutura, não devendo ser eliminados ainda nesta iteração. Isto porque eles, quando avaliados pela esquerda, apesar de atender a restrição de tensão, a sua contribuição na rigidez da estrutura nesta iteração é aproximadamente igual à contribuição de um elemento pela direita. Assim, a retirada brusca deste elemento pode levar a outro caminho no procedimento evolucionário de otimização. A retirada ou não deste elemento pode ser confirmada em iterações posteriores, uma vez que o fluxo de tensões vai sendo iterativamente definido ao longo do processo. Desta forma, os elementos que estão próximos ao limite pela esquerda desta tensão máxima são mantidos na estrutura, definindo assim um procedimento de retirada “não radical” (hard-kill) e sim, de forma suave.

O procedimento “soft-kill” usado no SESO pode ser interpretado assim:

$$D_i(j) = \begin{cases} D_0 & \text{se } j \in \Gamma_i \\ D_0 \cdot \eta_j(\bar{\Gamma}) & \text{se } \Gamma_{GS} \\ 0 & \text{se } \Gamma_{LS} \end{cases} \quad (3)$$

onde $\bar{\Gamma} = G_{LS_i} + G_{GS_i}$ é o domínio dos elementos que atendem a inequação (1a), G_{LS_i} é o domínio dos elementos que devem ser excluídos efetivamente, G_{GS_i} o domínio dos elementos que são devolvidos a estrutura, $0 \leq \eta(\bar{\Gamma}) \leq 1$ é função reguladora que pondera o valor da razão $\sigma_e^{VM} / \sigma_{VM}^{MAX}$ dentro do domínio $\bar{\Gamma}$ e pode eliminar o problema do “tabuleiro de xadrez”, tudo dentro da iteração “i”, veja esquema da Figura 2.

A suavização proposta pode ser realizada através de $\eta(\bar{\Gamma})$ usando uma função linear do tipo $\eta(\bar{\Gamma}) = \alpha j + \beta$, uma função trigonométrica do tipo $\eta(\bar{\Gamma}) = \text{sen}(\alpha j)$, pois estas funções são contínuas, portanto, diferenciáveis em todo o domínio $\bar{\Gamma}$ e tem imagem variando de 0 a 1.

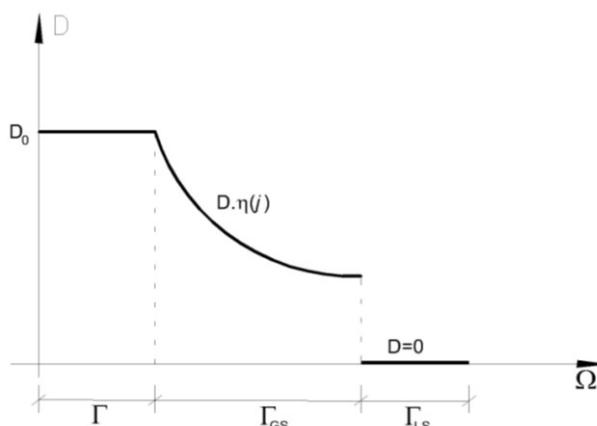


Figura 2: Ilustra o valor da matriz constitutiva de cada grupo do domínio, iteração “i”

4 FILTRO ESPACIAL PARA O ELEMENTO FINITO TRIANGULAR

Constata-se que quanto mais discretizado o domínio inicial do projeto melhor o contorno da topologia ótima, além de descrever melhor o campo de deslocamentos e conseqüentemente o campo das deformações e tensões. Entretanto, o aumento desta discretização no domínio inicial do projeto, em conjunto com o uso de elementos finitos triangulares e de baixa ordem provocam o aumento da formação do "tabuleiro de xadrez".

Para tentar diminuir a formação deste tabuleiro, empregou-se neste artigo um elemento finito não - conforme de alta ordem, um elemento de membrana triangular com graus de liberdade rotacionais desenvolvido mediante a formulação livre, descrito por Bergan e Felippa (1985), mas que sua convergência é garantida por atender o "teste do elemento individual", proposto por Bergan e Hanssen (1975).

Além disso, desenvolveu-se um filtro espacial de tensão que tem o objetivo de diminuir a formação do tabuleiro. Este filtro suaviza a distribuição espacial das variáveis de projeto ao longo do domínio inicial e minimiza, também, a dependência da malha de elementos finitos e permite o controle da complexidade da topologia.

O parâmetro de controle do filtro é o raio de abrangência e quanto maior for o raio, maior será a suavização da distribuição das tensões de Von Mises do elemento central no interior do domínio inicial. Porém, não se deve usar um valor pequeno, pois, corre-se o risco de voltar ao problema da formação do "tabuleiro de xadrez", e não se deve usar um valor grande, uma vez que culmina numa quantidade muito grande de elementos para calcular as tensões intermediárias de Von Mises, já que esta é calculada observando a distância entre os centróides do elemento central e os vizinhos de nós e arestas, e os elementos cujos centróides estiverem dentro do círculo de raio r . Além disso, pode-se extrapolar o domínio de projeto e o algoritmo não consegue buscar a solução ótima, ver Figura 3.

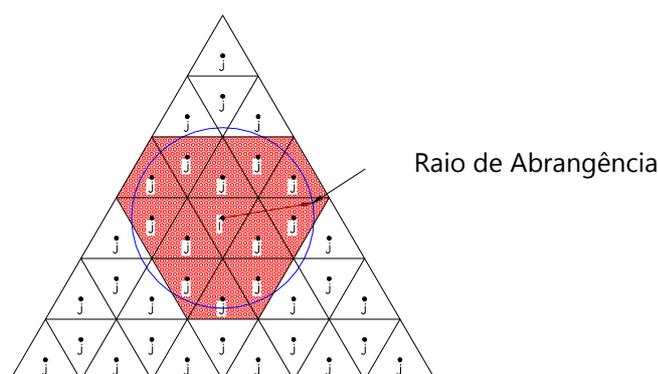


Figura 3: Elemento central i sofrendo influência dos elementos vizinhos dentro de um círculo de raio r

O modo como a tensão do elemento i sofre influência das tensões dos elementos j dentro de uma circunferência raio r é dada pela equação:

$$\sigma_i^{\text{ponderado}} = \frac{\sigma_i^{\text{vm}} \cdot A_i + \bar{w} \cdot \sum_j^{\text{NE}} \sigma_j^{\text{vm}} \cdot A_j}{A_i + \bar{w} \cdot \sum_j^{\text{NE}} A_j} \quad (4)$$

Onde o termo $\sigma_i^{\text{ponderado}}$ é a tensão de Von Mises ponderado do elemento "i", que inicialmente apresenta tensão de Von Mises σ_i^{vm} , A_i é a área deste elemento "i", A_j área do elemento "j" e σ_j^{vm} é a tensão de Von Mises do elemento "j". O peso \bar{w} é dado pela equação:

$$\bar{w} = \frac{\sum_{j=1}^{\text{NE}} w_j}{\text{NE}} \quad (5)$$

onde:

$$w_j = \frac{R_{\text{max}} - R_{ij}}{R_{\text{max}}} \quad (6)$$

Na equação 5, NE representa o número de elementos finitos cujos centróides estão no interior da circunferência de raio de abrangência R_{max} . Na equação 6, R_{ij} é a distância entre os centróides dos elementos "i" e "j". Assim, mesmo que haja um refinamento da malha, mas o raio seja mantido, a região delimitada pelo círculo será a mesma agora com mais elementos triangulares que influenciam a tensão do elemento central, isso justifica a redução da dependência da solução com relação ao nível de discretização da malha de EF, adicionalmente, é possível diminuir também a instabilidade de tabuleiro.

Em termos matemáticos, os filtros espaciais, é uma restrição adicional à formulação do problema de otimização. Com o aumento do raio, os gradientes ficam restritos a valores menores, logo, a transição entre sólido (material) e vazio (sem material) torna-se mais suave, gerando mais elementos com tensões intermediárias. Percebe-se, fortemente, a sensibilidade da formulação do elemento finito utilizado à escolha do raio de abrangência, quando este assume um valor muito grande, pois os gradientes das variáveis de projeto podem ficar restritos a taxas de variações bem pequenas tais que o problema de otimização pode não ter solução para a condição inicial proposta.

5 ÍNDICE DE PERFORMANCE PARA O SESO

O índice de performance (PI) é um parâmetro adimensional desenvolvido para controlar a retirada evolucionária dos elementos no processo iterativo, de forma a monitorar a razão entre o volume inicial e na iteração atual, quantificando as mudanças no volume e nos níveis de tensão máxima do processo de otimização. Ele mede a eficiência da topologia em cada iteração, identificando o instante em que a estrutura atinge seu ótimo topológico, Liang (2005).

Ele é definido como sendo inversamente proporcional ao volume atual da estrutura, e seu equacionamento parte da minimização do peso da estrutura, dado por:

$$\begin{aligned} \text{minimizar } W &= \sum_{e=1}^{NE} w_e = \sum_{e=1}^{NE} \rho_e \cdot V_e, \quad V = \sum_{e=1}^{NE} V_e \\ \text{sujeito a } \sigma_{j_{\max}}^{\text{vm}} - \sigma^{\text{projeto}} &\leq 0 \end{aligned} \quad (7)$$

onde V é o volume total da estrutura, V_e é o volume de cada elemento. Assim, minimizar o peso da estrutura representa minimizar o volume desta, uma vez que o peso específico de cada elemento - ρ_e - da estrutura é constante.

Adota-se o peso ótimo de projeto na iteração inicial por:

$$W_0^s = \left(\frac{\sigma_{0,\max}^{\text{vm}}}{\sigma^{\text{projeto}}} \right) \cdot W_0 \quad (8)$$

e na iteração i :

$$W_i^s = \left(\frac{\sigma_{0,\max}^{\text{vm}}}{\sigma^{\text{projeto}}} \right) \cdot W_i \quad (9)$$

Define-se o índice de performance, como a razão entre o peso de projeto ótimo do projeto inicial sobre o peso ótimo na iteração i , ou seja:

$$PI = \frac{W_0^s}{W_i^s} = \left(\frac{\sigma_{0,\max}^{\text{vm}}}{\sigma_{i,\max}^{\text{vm}}} \right) \cdot \frac{W_0}{W_i} = \left(\frac{\sigma_{0,\max}^{\text{vm}}}{\sigma_{i,\max}^{\text{vm}}} \right) \cdot \frac{\rho_0 \cdot V_0}{\rho_i \cdot V_i} = \left(\frac{\sigma_{0,\max}^{\text{vm}}}{\sigma_{i,\max}^{\text{vm}}} \right) \cdot \frac{V_0}{V_i} \quad (10)$$

Sendo r_0 peso específico inicial e r_i o peso específico na iteração i . A propriedade peso específico é considerada constante para o material, sendo assim $\rho_0 = \rho_i$, e o material é dito incompressível, portanto independe do estado de tensões que este sofra, e V_0 e V_i os volumes na primeira e i -ésima iteração. Pela expressão (10), minimizar o volume na i -ésima iteração, equivale a maximizar o índice PI, ou seja:

$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad PI &= \frac{\sigma_{0,\max}^{\text{vm}} \cdot V_0}{\sum_{i=1}^{NE} \sigma_{i,\max}^{\text{vm}} \cdot V_i} \\ \text{sujeito a} \quad \sigma_{i,\max}^{\text{vm}} - \sigma^{\text{projeto}} &\leq 0 \end{aligned} \quad (10.1)$$

e sabendo-se que para o estudo de problemas de estado plano de tensões, a influência da espessura é diretamente proporcional a matriz constitutiva, a suavização aplicada pela equação (3) pode ser empregada à espessura, resultando em:

$$PI = \left(\frac{\sigma_{0,\max}^{vm}}{\sigma_{i,\max}^{vm}} \right) \cdot \frac{A_0 \cdot t}{\sum_{j=1}^{NE} A_j \cdot t_j} = \left(\frac{\sigma_{0,\max}^{vm}}{\sigma_{i,\max}^{vm}} \right) \cdot \frac{A_0 \cdot t_0}{\sum_{j=1}^{NE} A_j \cdot t_j \cdot \eta(j)} \quad (11)$$

de modo que o controle do ótimo é feito por este índice de performance.

6 FORMULAÇÃO DO ELEMENTO FINITO DE ALTA ORDEM

O elemento finito empregado é advindo da formulação livre, destacando-se que toda a formulação foi baseada no trabalho de Bergan e Felippa (1985). A formulação da matriz de rigidez do elemento finito triangular de alta ordem, em concordância com a formulação livre, é formada pela superposição da matriz referente aos modos básicos com a matriz referente aos modos de alta ordem:

$$K = K_b + K_s \quad (12)$$

A matriz dos modos básicos, para o caso bidimensional, é dada por:

$$K_b = \frac{1}{A} \cdot L \cdot D_m \cdot L^T \quad (13)$$

onde L é denominada matriz "amontoadora", dada pela equação a seguir:

$$L_j = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} y_{ki} & 0 & x_{ik} \\ 0 & x_{ik} & y_{ki} \\ \frac{\alpha}{6}(y_{ji}^2 - y_{kj}^2) & \frac{\alpha}{6}(x_{ij}^2 - x_{jk}^2) & \frac{\alpha}{3}(x_{ij} \cdot y_{ji} - x_{jk} \cdot y_{kj}) \end{bmatrix} \quad (14)$$

onde $x_{ij} = x_i - x_j$, $x_{ji} = x_j - x_i$ e i, j e k denotam a permutação cíclica de 1, 2 e 3. D_m é a matriz constitutiva do elemento. É fundamentalmente a matriz constitutiva da elasticidade, C , integrada ao longo da espessura do elemento. Esta integração reduz o volume V para A , área do elemento.

Para um elemento de espessura t , material com módulo de elasticidade longitudinal E e coeficiente de Poisson ν , a matriz D_m é dada por:

$$D_m = \frac{E \cdot t}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \nu}{2} \end{bmatrix} \quad (15)$$

onde $C = \frac{1}{t} \cdot D_m$.

O parâmetro $\alpha \geq 0$ introduzido na formulação da matriz L aparece como um fator de escala nas funções de forma, multiplicando os termos relacionados com os graus de liberdade rotacionais. O valor de α afeta a matriz dos modos básicos e o cálculo

das deformações.

Na equação 14, se $\alpha = 0$, tem-se a matriz L para o triângulo com deformação constante (CST). Para este elemento as forças nodais são relacionadas apenas com translações.

A matriz dos modos de alta ordem é dada por:

$$K_s = H^T \cdot K_{qs} \cdot H_s \quad (16)$$

aqui $H = G^{-1}$, onde G é a matriz que relaciona os coeficientes associados com os deslocamentos nodais e os parâmetros generalizados q , fazendo-se as devidas substituições das coordenadas nodais nas funções de forma.

Para um elemento bidimensional, a matriz generalizada de alta ordem é:

$$K_{qs} = \int_A B_s^T \cdot D_m \cdot B_s \, dA \quad (17)$$

onde B_s é a matriz de deformação para os modos de alta ordem.

A matriz de alta ordem pode ser multiplicada por um escalar positivo β , logo a matriz de rigidez total do elemento é dada por:

$$K = K_b + \beta \cdot K_s \quad (18)$$

que satisfaz ao *patch-test* e a condição de ser positiva definida para a convergência. O parâmetro $\beta \geq 0$ para a matriz de alta ordem é utilizado para calibrar a matriz de rigidez total, K , e com isso otimizar a convergência. Os valores ótimos sugeridos por Bergan e Felippa (1985) para α e β são, respectivamente, 1,5 e 0,5.

7 EXEMPLOS NUMÉRICOS

Apresentam-se a seguir três exemplos numéricos, onde os parâmetros dos métodos empregados foram os mesmos, a saber: o emprego do grupo de 20%, a função reguladora dada por $h(j) = 10^{-4}$, os coeficientes da formulação livre do elemento finito são alfa de 1,5 e beta de 0,5, exceto, para RR e ER que será comentado em cada exemplo. Empregou-se o índice de performance (PI) como critério de parada.

7.1 Exemplo 1

Este exemplo, retirado de Liang (2005), é uma estrutura de Michell, onde o módulo de elasticidade longitudinal é dado por $E = 200$ GPa, o coeficiente de Poisson de 0,3, e sua espessura de 2mm.

Liang (2005) avalia este exemplo usando o método PBO – Performance-based Optimization, que combina otimização topológica e paramétrica em um esquema único para conseguir a topologia e o projeto ótimo da espessura da estrutura do contínuo.

Na Figura 4, mostra-se a geometria, as condições de contorno e ações do

problema. Este domínio foi discretizado com uma malha refinada de (100x50) com 10000 elementos finitos triangulares de alta ordem. Na Figura 5, compara-se o leiaute obtido na presente formulação com o obtido por Liang (2005). Destaca-se que o valor obtido por Liang (2005) para o índice de performance é igual 6,8. Apesar da metodologia usada neste trabalho ser com um elemento finito diferente de Liang (2005), o valor obtido para o PI é 11% menor do que o valor obtido por Liang (2005). A Figura 6 mostra a mesma estrutura discretizada com uma malha refinada de 160x80, totalizando 25600 elementos triangulares. Nota-se que o aumento da discretização do domínio proporciona o aparecimento de mais membros na estrutura mostrando que a topologia é dependente do refinamento da malha mesmo com a suavização utilizada pela técnica SESO.

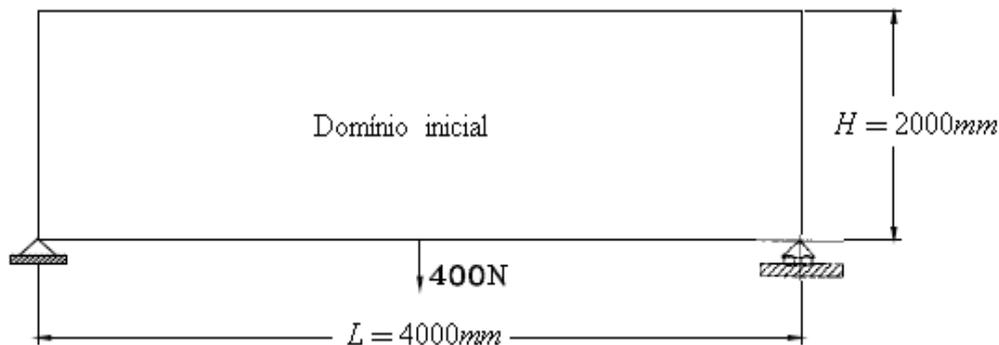


Figura 4: Domínio inicial de projeto de uma estrutura de Michell

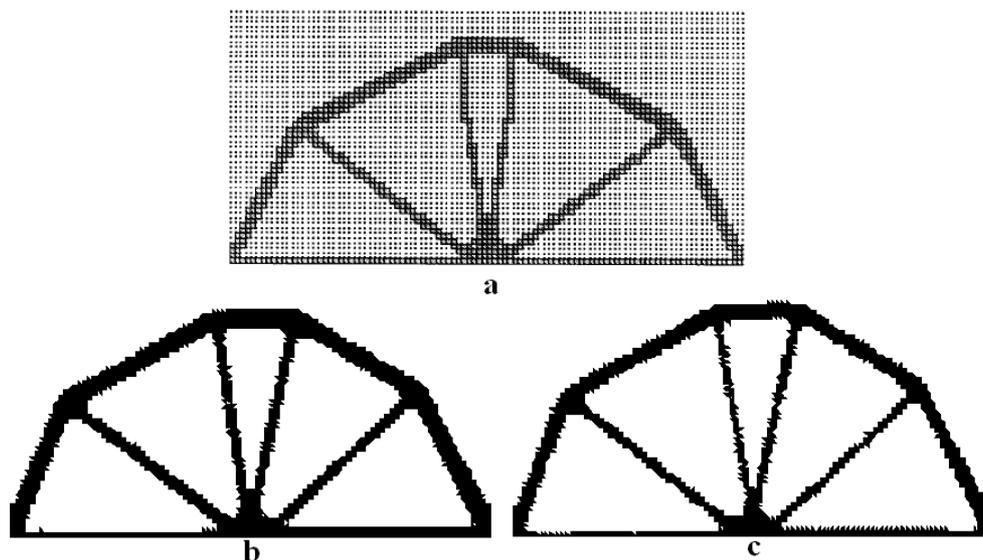


Figura 5: a) Topologia ótima obtida por Liang (2005); b) SESO - presente formulação $V=0,21 V_0$
c) SESO - presente formulação $V=0,16 V_0$.



Figura 6: configuração ótima obtida usando SESO para 25600 elementos triangulares, $V = 0,25 V_0$

Na Figura 7 nota-se que o índice de performance da formulação SESO apresenta uma queda brusca na iteração 278. Neste ponto, o volume mínimo alcançado, é de 21%, otimizados sem a estrutura se transformar em membros hipostáticos, ou seja, onde há esta queda brusca de PI, sabe-se que a topologia otimizada é alcançada no processo evolucionário.

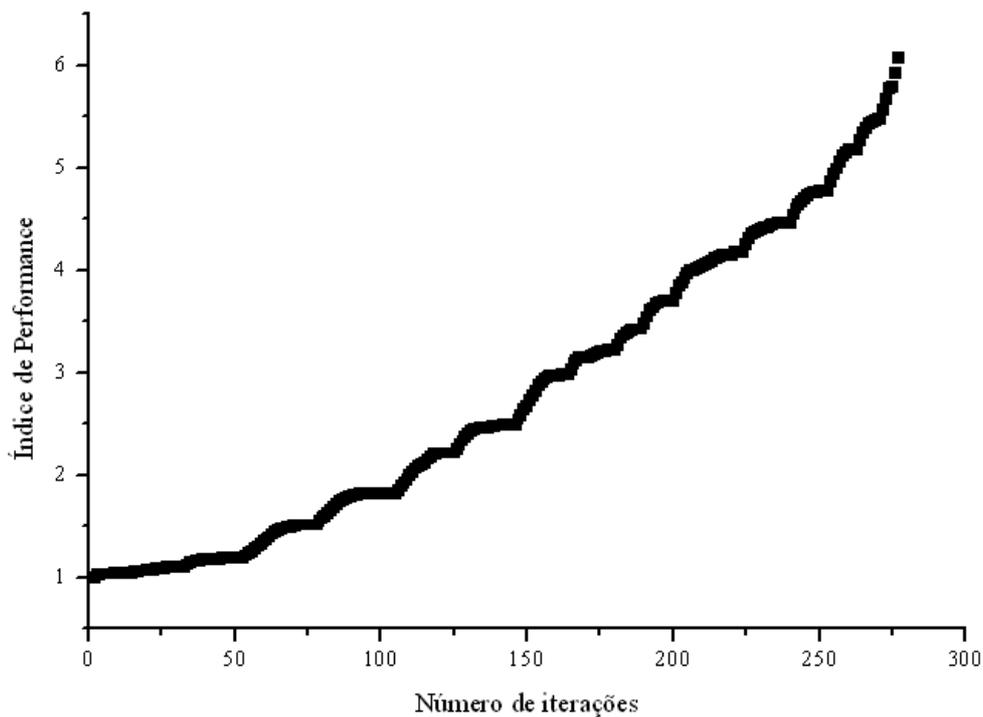


Figura 7: Índice de Performance por número de iterações Estrutura de Michell – SESO

O gráfico a seguir, Figura 8, indica as características da performance da estrutura otimizada, além de medir o sucesso desta otimização. Nota-se que a região acima da curva é uma região viável, mas, a estrutura feita com este material será superdimensionada. A região abaixo da curva é uma região não viável, pois o material utilizado irá violar a restrição de tensão imposta no processo de otimização. Assim, a região sobre a curva é a região que atende as condições de ótimo proposta para a estrutura.

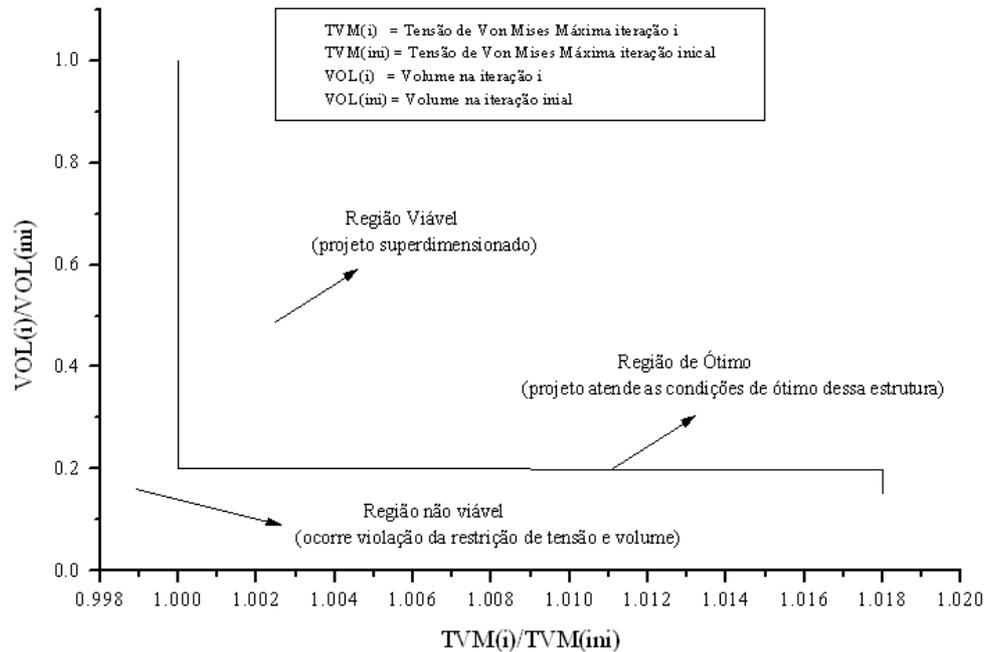


Figura 8: Curva característica de Performance para estruturas com restrição de tensão, para a malha de 10000 elementos

7.2 Exemplo 2

A viga possui geometria indicada na Figura 9, com $E = 200$ GPa, o coeficiente de Poisson de 0,3, e sua espessura de 1mm. O exemplo retirado de Liang (1999) é de uma viga curta em balanço, e na Figura 10a. é apresentada à topologia ótima obtidas pelo autor com o uso do ESO e com 2304 elementos quadrangulares e nas Figuras 10b e 10c apresentam-se as respostas obtidas com a presente formulação, usando o SESO com 4608 elementos finitos e com um tempo de processamento de 4 minutos enquanto o ESO teve um custo computacional de 5 minutos.

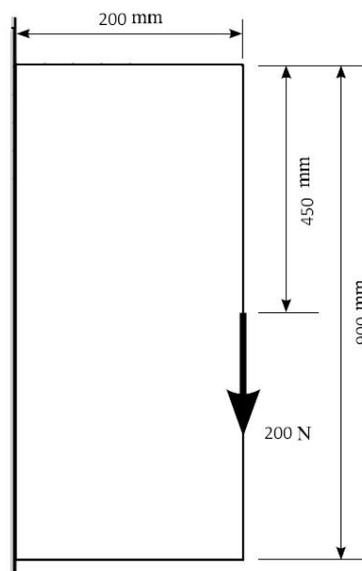


Figura 9: Domínio inicial de projeto

Destaca-se que o PI obtido por Liang et al. (1999) foi de 10,86 e o obtido neste artigo foi de 10,85 e 10,83 para, respectivamente, o método ESO e sua variante SESO, demonstrando muito boa concordância neste aspecto também, mesmo para diferenças de metodologias e de elementos finitos serem distintas.

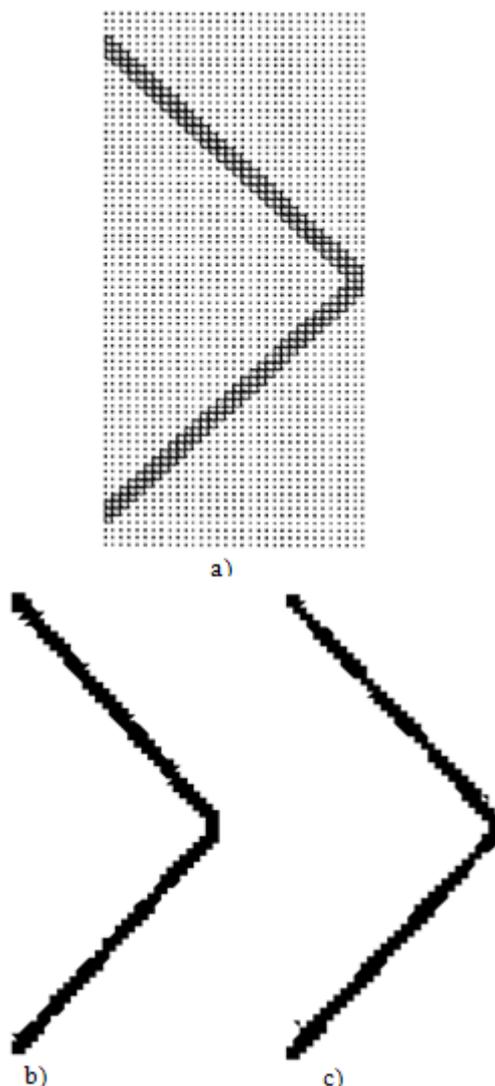


Figura 10: Topologia ótima obtida por (a) Liang et al. (1999); b) SESO - presente formulação c) ESO - presente formulação.

As Figuras 11 e 12 mostram a eficiência do PI ao monitorar a otimização evolucionária. Verifica-se que após o volume máximo atingido ocorre uma queda brusca no PI mostrando que a estrutura se tornou hipostática e não é mais viável para projeto. Destaca-se também que o PI de 10,86, exatamente igual ao obtido por Liang et al. (1999), foi alcançado com a presente formulação na iteração 315, mas com uma malha refinada de 14400 elementos finitos triangulares. O custo computacional para esta malha, usando a técnica SESO, foi de aproximadamente 34 minutos.

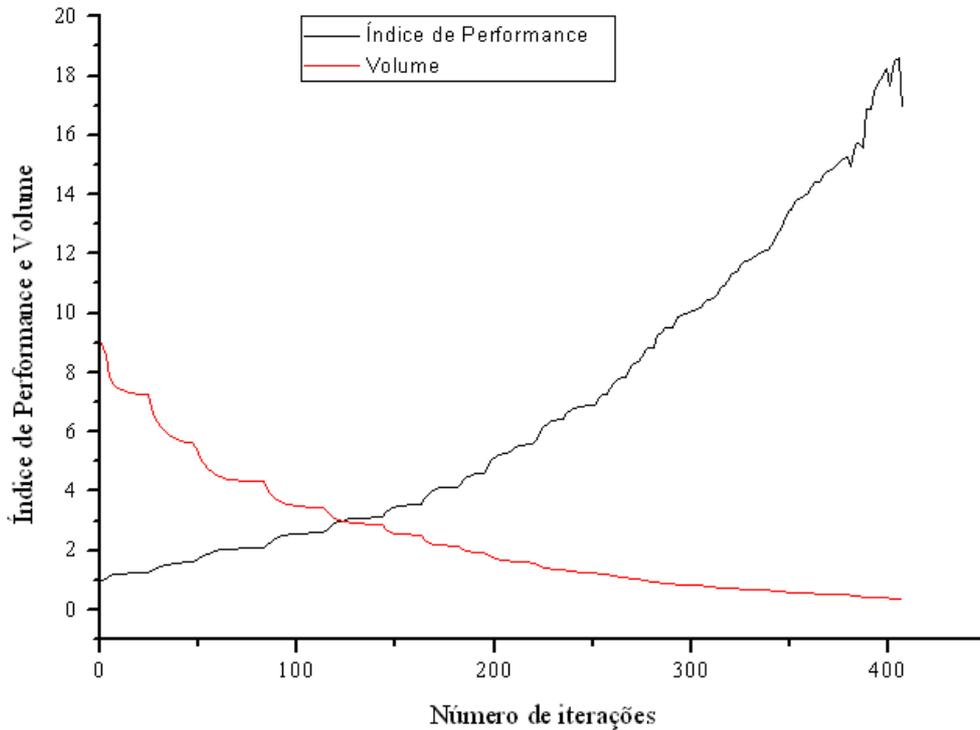


Figura 11: Gráfico do índice de performance e volume por número de iteração, para o SESO, com 14400 elementos

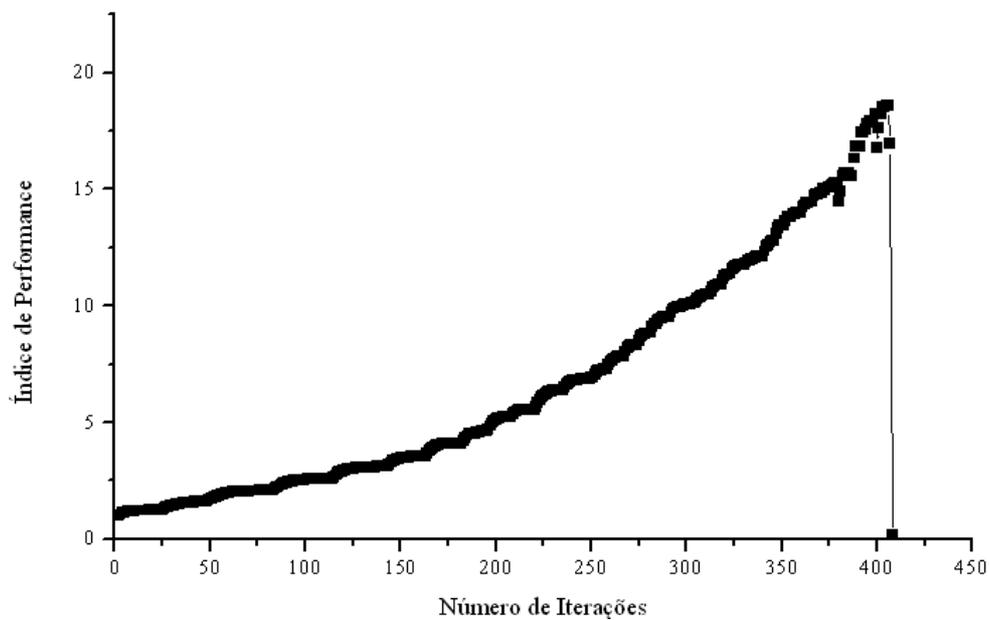


Figura 12: Gráfico do índice de performance versus número de iteração, para o SESO, com 14400 elementos

7.3 Exemplo 3

O exemplo a seguir é retirado de Li et al. (1999), e na Figura 13 é apresentada a geometria, condições de contorno e ações do problema. As Figuras 14 e 15 mostram

as topologias obtidas por Li et al. (1999) e pelas técnicas ESO e SESO, respectivamente. Destaca-se também, uma topologia com uma razão de 60% de volume e a presença acentuada do “tabuleiro de xadrez”, que também foi observada na presente formulação quando o filtro estava desativado.

A topologia ótima obtida por Li et al. (1999) com uma razão de volume igual 35% é realizada com um procedimento evolucionário com critérios de tensão e rigidez.

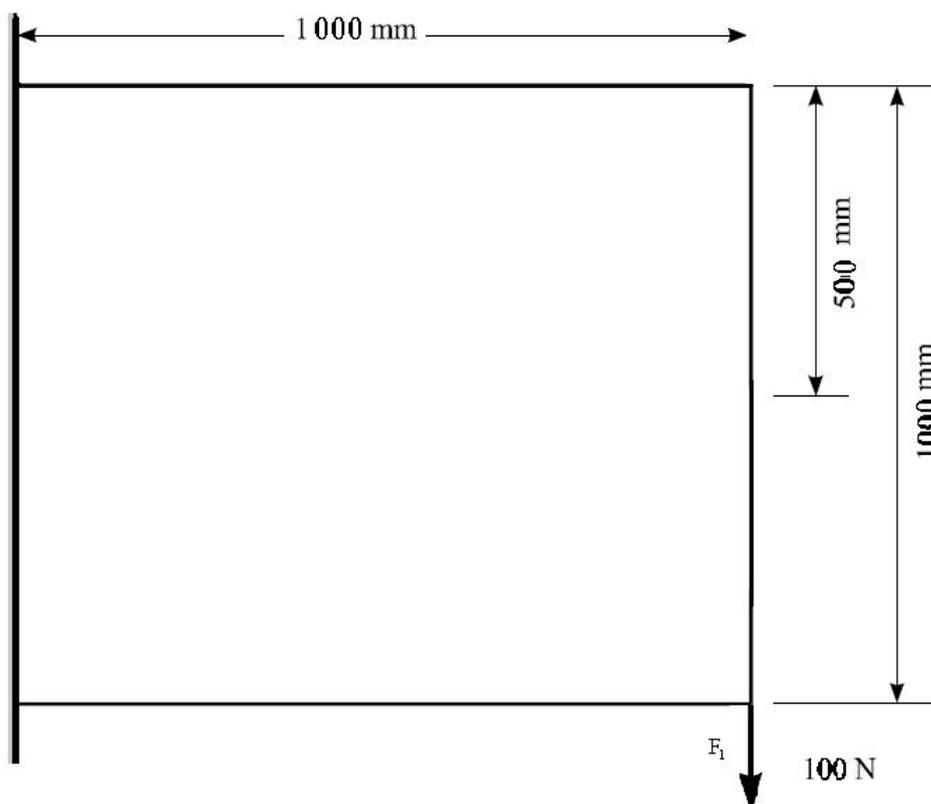


Figura 13: Domínio inicial de projeto por Liang et al. (1999)

O processo evolucionário começou com uma razão de rejeição (RR) igual 1% e uma razão evolucionária de 1%. As propriedades do material utilizado são coeficiente de Poisson $\nu = 0,30$, módulo de Young $E = 210\text{MPa}$ e volume desejado igual a 35% do volume inicial, o volume retirado por iteração foi de 5%. O volume retirado em cada iteração foi dividido em 10 grupos sendo 80% removidos da estrutura e 20% ponderado com um fator 10^{-4} e devolvido à estrutura devido a sua importância na resolução do sistema na iteração seguinte.

Com filtro desativado		Com filtro desativado	
V=60%		V=60%	
Com filtro ativado		Com filtro ativado	
V=80%		V=80%	
V=60%		V=60%	
V=35%		V=35%	

ESO

Li et al (1999)

Figura 14: Topologias ótimas obtidas

Com filtro desativado		Com filtro desativado	
V=60%		V=60%	
Com filtro ativado		Com filtro ativado	
V=80%		V=80%	
V=60%		V=60%	
V=35%		V=35%	

SESO

Li et al (1999)

Figura 15: Topologias ótimas obtidas

A seguir apresenta-se o fluxo de tensão da estrutura para a primeira e a última iteração, usando as técnicas ESO e SESO, ver Figuras 16 e 17. Constata-se que o ótimo é alcançado com um custo computacional de 5 e 8 minutos, respectivamente, para as técnicas ESO e SESO.

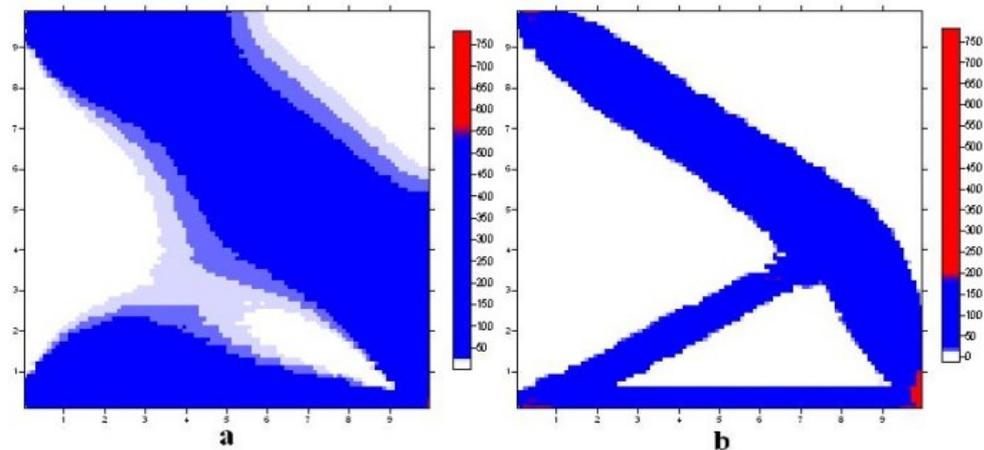


Figura 16: Fluxo de Tensão: a) primeira iteração; b) topologia ótima – ESO

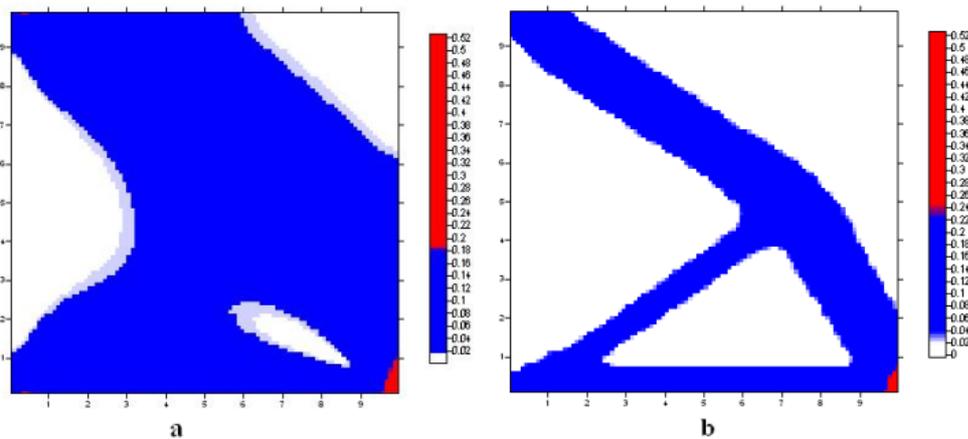


Figura 17: Fluxo de Tensão: a) primeira iteração; b) topologia ótima - SESO

O gráfico a seguir (Figura 18) mostra que o PI máximo obtido usando a técnica SESO foi de 2,88 quando a razão de volume desejada (35%) é atingida na iteração 135. Constata-se que após o PI máximo de 2,88, o PI tem uma queda brusca informando que a estrutura sofreu algum tipo de dano. Neste caso a estrutura ainda não se tornou hipostática, mas o PI teve a capacidade de monitorar com eficiência o desempenho desta estrutura até o ótimo.

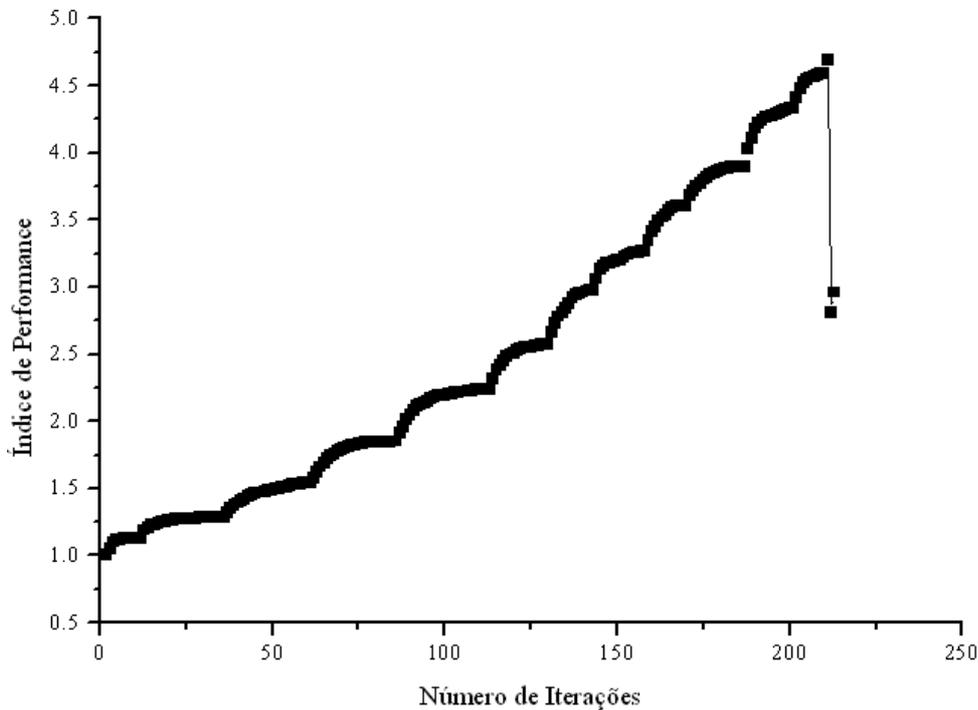


Figura 18: Gráfico do índice de performance versus número de iteração, para o SESO, com 6400 elementos

8 CONCLUSÃO

O procedimento proposto neste trabalho para otimização topológica de estruturas bidimensionais usando uma variante do método clássico ESO, que aqui fora denominado de SESO mostrou-se eficiente e apto a capturar o comportamento evolucionário e a determinar a forma ótima sobre critério de tensão máxima da estrutura com restrições de volume.

Na otimização topológica via ESO para melhor calibração dos parâmetros RR e ER devem-se realizar testes numéricos preliminares, pois elevados valores de RR e ER provocam singularidade à estrutura. Esta calibração não é relevante à técnica SESO quanto notado em alguns exemplos usando o método ESO.

Tanto no ESO quanto no SESO quanto mais discretizada for a malha mais membros podem aparecer na sua configuração ótima, mostrando que em alguns exemplos existe uma grande dependência da malha de elementos finitos, entretanto a técnica SESO é menos sensível a esta discretização.

O SESO apresenta em geral um custo computacional mais baixo. No entanto, no exemplo 3, o tempo do SESO foi maior que o do ESO. Isto se deve ao fato de que a suavização no campo das tensões permite uma retirada maior de elementos do que na técnica ESO. Assim mesmo exigindo mais passos de RR devido a sua heurística de remoção de elementos a técnica SESO mostrou-se mais eficiente computacionalmente.

Os problemas de instabilidade numérica "tabuleiro de xadrez" e da dependência da malha, foram resolvidos com a implementação de um filtro de densidade de

tensão, entretanto o parâmetro de controle deste filtro é o raio de abrangência que não deve ser muito pequeno, pois se corre o risco de voltar ao problema do tabuleiro e não deve ser muito grande, já que extrapolaria o domínio de projeto e o algoritmo não consegue buscar uma solução ótima. O ESO mesmo com o filtro em alguns exemplos apresentou o tabuleiro e o SESO não apresentou em nenhum exemplo este problema.

Por fim, a formulação do índice de performance para o caso do uso do SESO demonstrou ser adequada para o monitoramento da região ótima de projeto, em virtude dos resultados obtidos.

9 AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem a Fundação Gorceix e a Universidade Federal de Ouro Preto pelo financiamento deste trabalho.

10 REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Bendsøe, M.P. Optimal Shape design as a material distribution problem, *Structural Optimization*, v. 1, pp. 193-202, 1989.
- Bergan, P.G. e Felippa, C.A. *A triangular membrane element with rotational degrees of freedom*. *Comp. Meths. in Appl. Mech. Eng.*, v.50, p.25-69, 1985.
- Bergan, P.G. e Hanssen, L. A new approach for deriving "good" finite elements, *MAFELAP II Conference*, Brunel University, 1975, in: J.R. Whiteman, ed., *The mathematics of finite elements and applications* (Academic Press, London, 1976), p.483-498, 1975.
- Eschenauer, H. A. e Olhoff, N. Topology optimization of continuum structures. *Applied Mechanic Review*, v.54, n.4, p. 331-390, 2001.
- Kane, C., Jouve, F., Schoenauer, M. Structural optimization in linear and nonlinear elasticity using genetic algorithms. *21st ASME Design Automatic Conference*, Boston, MA, 1995.
- Kawamura, H., Ohmori, H., Kito, N. Truss topology optimization by a modified genetic algorithm. *Structre and multidisciplinary optimization*, v. 23, p. 467-472, 2002.
- Kim, Hyunsun; Querin, O. M., Steven, G. P., Xie, Y. M. Determination of an Optimal Topology with a Predefined Number of Cavities. *AIAA JOURNAL*, v. 40, n. 4, april, 2002.
- Kirkpatrick, S., Gelatt Jr., C. D., Vecchi, M. P. Optimization by Simulated Annealing, *Science*, 220, n. 4598, p. 671-680, 1983.
- Krishnamoorthy, P., Prasanna, P.V., Sudarshan. Objected-oriented framework for genetic algorithms with application to space truss optimization. *Journal of computing in civil engineering*, vol. 16, 2002.
- Labanowski, A. Fancello, E. A. Novotny, A.A. SIMP, ESO e TSA: uma análise comparativa de métodos de otimização topológica para elasticidade 2d; *CILAMCE 2004*; Recife; 10/11/2004; 12/11/2004; Publicação: *Proceedings of the XXV Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering*. CILAMCE

2004.

- Lagaros, M., Papadrakakis, M., Kokossalaris, G. Structural optimization using evolutionary algorithms. *Computers and Structures*, v. 80, p. 571-589, 2002.
- Li, Q., Xie, Y.M., Steven, G.P. On equivalence between stress criterion and stiffness criterion in evolutionary structural optimization, *Structural Optimization* 18,67-13, Springer – Verlag 1999.
- Liang, Q.Q. *Performance-based Optimization of Structures: Theory and applications*, Spon Press, London, 2005.
- Liang, Q.Q., Xie, Y.M., Steven, G.P. Optimal selection of topologies for the minimum-weight design of continuum structures with stress constraints, *Proc Instn Mech Engrs, Part C*, v. 213, p. 755-762, 1999.
- Rozvany, G.I.N. Bendsøe, M.P., Kirsch U. Layout optimization of structures, *Applied Mechanics Review*, v. 48, p. 41-119, 1995.
- Rozvany, G.I.N., Zhou, M., Birker, T. Generalized shape optimization without homogenization, *Structural Optimization*, v. 4, p. 250-252, 1992.
- Stump, F. V. *Otimização Topológica Aplicada ao Projeto de Estruturas Tradicionais e Estruturas com Gradação Funcional sujeitas a Restrição de Tensão*. 2006. Dissertação (Mestrado) - Escola Politécnica da USP, São Paulo.
- Xie, Y.M., Steven, G.P. A simple evolutionary procedure for structural optimization, *Computers & Structures*, Vol. 49, n. 5, p. 885-896, 1993.