

## COMBINED FEM-DEM: EXAMPLES OF BEAM-PARTICLE INTERACTION

Marcello G. Teixeira<sup>a</sup>, Kin K. Minato<sup>b</sup>, Andrea F. Borges<sup>c</sup>

<sup>a</sup>*Departamento de Ciência da Computação, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Av. Athos da Silveira Ramos – CCMN – Bloco E2000, Cidade Universitária, Rio de Janeiro, Brasil, marcellogt@dcc.ufrj.br, <http://www.dcc.ufrj.br>*

<sup>b</sup>*Instituto Militar de Engenharia, Praça General Tibúrcio 80, Praia Vermelha, Rio de Janeiro, Brasil, kuminato@hotmail.com, <http://www.ime.eb.br>*

<sup>c</sup>*Departamento de Geologia, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Av. Athos da Silveira Ramos – CCMN – Bloco G, Cidade Universitária, Rio de Janeiro, Brasil, [afborges@ufrj.br](mailto:afborges@ufrj.br), <http://geologia.ufrj.br>*

**Keywords:** Discrete element method, Finite element method, Beam-particle interaction.

**Abstract.** One way to solve engineering problems is the simulation that can be done with real or virtual models. A better approximation of reality is achieved through the use of real models. However this procedure is costly and in some situations it is technically impractical. The alternative is the simulation using virtual models, where several tests can be performed at a relatively low cost. One of the most used numerical methods in computer simulation of phenomena modeled by differential equations is the Finite Element Method (FEM). However, the FEM is not suitable for the simulation of systems where the effects of micro-mechanical discontinuity of the geometry should be taken into account, such as engineering problems involving fracture, fragmentation, impact and particulate media, among others. For these cases, the Discrete Element Method (DEM), first introduced by Cundall, interaction between each pair of particles considers the medium as being formed by a set of particles with interaction between each pair of them. But in some cases, it is necessary to take into account both continuous and particulate media. The main objective of this work is the simulation of beam-particle interaction using a computational tool developed in C++ object-oriented, where the beam dynamic is modelled with the FEM and the particles (circles) with the DEM. Among others, we introduce some examples of interaction between a structure and soil.

## 1 INTRODUÇÃO

A desestabilização de encostas de solo ou rocha pode ocasionar desastres quando o material desprendido da encosta atinge áreas ocupadas. As técnicas para evitar tais desastres incluem medidas de remoção do material instável, medidas de estabilização da encosta, com estruturas ativas ou passivas, e medidas de convivência, através da construção de túneis falsos ou muros de impacto, para proteger a área de interesse. Particularmente, eventos relacionados à queda de blocos rochosos são de difícil previsão, tanto em relação ao início do movimento quanto à trajetória e alcance dos blocos. Há diversos trabalhos na literatura sobre a análise de queda de blocos rochosos utilizando métodos numéricos (por exemplo, Bertrand et al., 2004; Ribeiro et al., 2008, 2009; Rocha, 2009). Estes trabalhos, em geral, são voltados para a previsão da trajetória e do alcance dos blocos, caso ocorra a queda.

Uma vez que não é possível prever ou evitar todos os eventos de queda de blocos, utilizam-se métodos de restringir tais eventos, incluindo bermas, túneis falsos, trincheiras, aterros e barreiras (Hoek, 2007), ilustrados na Figura 1.

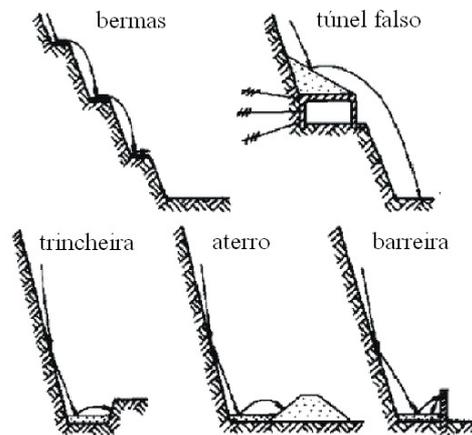


Figura 1: Possíveis medidas para reduzir o dano provocado por quedas de blocos em encostas (Spang, 1987).

As barreiras podem ser muros rígidos (muros de impacto) ou barreiras flexíveis, ou ainda estruturas semi-rígidas, construídas para conter blocos ou lascas de rocha ou um volume limitado de solo que se desprendem da encosta, que se acumulam em uma zona entre o muro e a encosta. São comuns ao longo das margens de rodovias e sobre o emboque de túneis. Tais estruturas são projetadas para resistir ao impacto do material e sua altura deve ultrapassar a altura alcançada pelos blocos que se deslocam em queda livre ou se chocam contra a encosta e o piso. Além disto, a zona de acumulação deve ter espaço suficiente para acomodar todo o material desestabilizado em um evento. Após um evento, o material deve ser removido da zona de acumulação para evitar que o volume útil seja reduzido para o próximo evento. Portanto, para o projeto de um muro de impacto, é necessária uma análise de estabilidade da encosta em particular, onde são estimados o volume de material que pode se desprender da encosta, a trajetória de queda deste material e a energia cinética do material ao se chocar com o muro. A norma brasileira NBR 11682 (ABNT, 1991) determina ainda que, para o dimensionamento de um muro de impacto, os parâmetros a serem considerados são o fator de armazenamento total, que é função do volume de acumulação a ser contido pelo muro e do volume deslocável pela instabilização; o coeficiente de impacto sobre o muro; o peso, a forma e a trajetória de queda das lascas e blocos rochosos ou material terroso; a frequência de quedas; o tempo de utilidade dos muros e previsão de sua recomposição. A norma sugere

valores para o projeto com base no risco de instabilidade e no grau de segurança necessário ao local.

Segundo Kohler (2009), a largura da zona de acumulação e a altura do muro devem ser determinadas por métodos numéricos que simulem a energia e a trajetória de blocos rochosos e de massas de terra em movimento.

Com esse objetivo, esse trabalho propõe-se a efetuar uma simulação numérica do impacto de rochas de tamanho variável, aqui consideradas como elementos discretos circulares, sobre um muro de impacto cujo cálculo de tensões devido ao impacto é realizado utilizando-se o Método dos Elementos Finitos. Para este fim, serão considerados parâmetros reais de projeto.

## 2 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS (MEF)

A abordagem do MEF aqui utilizada é mesma dos trabalhos de Zienkiewicz (1991) e Soriano (2003), onde foi formulado o modelo de deslocamentos para o problema do estado plano de tensões e de deformações utilizando elementos triangulares de três pontos nodais e dois graus de liberdade por nó. Para a discretização temporal foi utilizado o algoritmo SS22 de Zienkiewicz.

### 2.1 Formulação matricial e integração no tempo

Após a discretização usual pelo Método dos Elementos Finitos, obtém a seguinte formulação matricial para o problema de vibração: dados  $\{u_0\}$  e  $\{\dot{u}_0\}$ , respectivamente posição inicial e velocidade inicial nos nós da malha, determinar o vetor de deslocamentos  $\{u\}$  tal que

$$[M]\{\ddot{u}\} + [C]\{\dot{u}\} + [K]\{u\} = \{F\} \quad (1)$$

onde  $[M]$  é a matriz de massa,  $[K]$  a matriz de rigidez e a matriz de amortecimento  $[C]$  é considerada como uma combinação linear das outras duas matrizes.

O algoritmo SS22 utilizado neste trabalho, descrito por Zienkiewicz (1991), é um método de passo simples baseado no Método dos Resíduos Ponderados aplicável a equações de segunda ordem e é similar, em desempenho ao Método de Newmark: dados  $\{u_n\}$  e  $\{\dot{u}_n\}$ , respectivamente deslocamento e velocidade nos nós da malha no instante  $n$ ,

$$u_{n+1} = u_n + \Delta t \dot{u}_n + \frac{1}{2} \Delta t^2 \alpha \quad (2)$$

e

$$\dot{u}_{n+1} = \dot{u}_n + \Delta t \alpha \quad (3)$$

com o vetor  $\alpha$  sendo obtido como solução da equação

$$[M]\{\alpha\} + [C]\{\dot{u}_n + \theta_1 \Delta t \alpha\} + [K]\left\{u_n + \theta_1 \Delta t \dot{u}_n + \frac{1}{2} \theta_2 \Delta t^2 \alpha\right\} = \{F\} \quad (4)$$

Para obter-se estabilidade incondicional os parâmetros utilizados foram  $\theta_1 = \theta_2 = 1/2$ .

## 3 MÉTODO DOS ELEMENTOS DISCRETOS (MED)

O Método dos Elementos Discretos é um método numérico para o cálculo da dinâmica de

um sistema formado por uma grande quantidade de partículas, normalmente modeladas por geometrias simples tais como esferas ou círculos. Este método é muito similar ao Método da Dinâmica Molecular, distinguindo-se apenas pelo fato de considerar graus de liberdade de rotação. A modelagem da dinâmica das rochas, dos solos e de fluxos granulares são exemplos de aplicações onde o MED é mais adequado do que outros métodos, como o MEF.

O algoritmo de solução consiste em realizar a checagem de contatos, para posteriormente calcular as forças resultantes das colisões. A partir destas forças e de outras, como por exemplo a gravitacional e a de atrito com o ar, pode-se calcular a velocidade e a posição das partículas utilizando um método de integração temporal explícito.

Nessa Seção serão abordados alguns conceitos básicos do MED.

### 3.1 Detecção de colisão

Esta etapa do método visa identificar os elementos em contato para que na etapa seguinte sejam calculadas as forças geradas nessas colisões. Por se tratarem de problemas dinâmicos, onde uma grande quantidade de elementos pode se mover livremente, nos exemplos abordados uma grande quantidade de processamento é exigida durante a detecção de colisão. Em alguns casos esta etapa pode representar mais de 60% do tempo de processamento (Munjiza, 2004).

Neste trabalho foi implementado o algoritmo Munjiza-NBS (Munjiza, 2004), cujo tempo de processamento e uso de memória é linear em relação ao número de elementos. Este algoritmo baseia-se na divisão do espaço em células quadradas de tamanhos iguais. O comprimento do lado das células deve ser escolhido de forma que qualquer elemento possa estar totalmente contido em uma célula, ou seja, o lado da célula é igual ao diâmetro do círculo que circunscreve o maior elemento.

Diz-se que um elemento pertence a uma célula quando esta contém o centro do elemento. Assim, pode-se determinar a que célula um dado elemento pertence conhecendo apenas a sua posição. Além disso, pode-se garantir que dois elementos pertencentes a células que não sejam vizinhas nunca estarão em contato. Na prática, basta verificar as células vizinhas mostradas na Figura 2, já que a cada iteração, todas as células testarão suas vizinhas, de forma que para cada célula serão realizados os testes necessários.

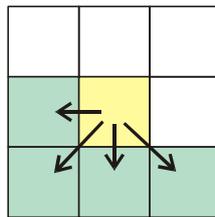


Figura 2: Vizinhança entre células.

### 3.2 Força de contato normal e força de contato tangencial

Nesse trabalho considera-se que as colisões entre os objetos geram forças normais aos elementos, aplicadas nas regiões de contato, sendo considerado o modelo de amortecimento linear (Pöschel), que estabelece que a intensidade da força normal atuante  $F_n$  em função dos parâmetros de rigidez normal  $k_n$  e de amortecimento  $c_n$ , além do valor da interpenetração  $u_n$  e da velocidade relativa normal  $v_n$ , pode ser dada com boa aproximação por

$$F_n = k_n u_n + c_n v_n \quad (5)$$

A força tangencial é determinada segundo o modelo de Cundall & Strack (1979), que estabelece que essa força é dada pelo menor valor entre a força visco-elástica na direção tangencial e a força de atrito, sendo esta última determinada pelo produto do coeficiente de atrito entre partículas  $\mu$  com a força de contato na direção normal  $F_n$ . A energia elástica tangencial armazenada durante o tempo de contato, dada por  $k_t \int v_t dt$ , compõe, juntamente com a parcela de amortecimento na direção tangencial, dada por  $v_t c_t$ , o valor da força visco-elástica. Os valores da velocidade relativa tangencial  $v_t$ , rigidez tangencial  $k_t$  e do amortecimento tangencial  $c_t$  são responsáveis por este efeito. Logo, a força tangencial oriunda do contato entre partículas é expressa por

$$F_t = \min \left\{ k_t \int v_t dt + v_t c_t, F_n \mu \right\} \quad (6)$$

#### 4 ACOPLAMENTO MED/MEF

A integração entre os métodos foi feita utilizando o Método das Pinballs, que consiste em realizar o cálculo da interpenetração apenas em elementos circulares embutidos nos elementos da superfície ou contorno da malha de elementos finitos (Figura 3). Estas “pinballs” não possuem massa e suas posições e velocidades são calculadas a partir das posições e velocidades nodais, podendo então serem utilizadas juntamente com os elementos discretos no algoritmo de detecção de colisão. As forças resultantes das colisões com outras pinballs ou com elementos discretos são transferidas aos nós da malha de elementos finitos.

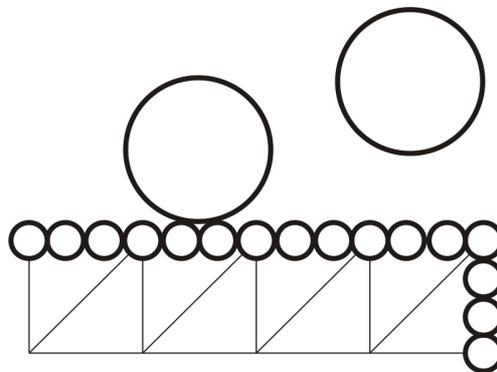


Figura 3: Colisão entre pinballs e elementos discretos

#### 5 RESULTADOS

A fim de alcançar os objetivos deste trabalho foi desenvolvido um programa computacional denominado Solid-FDEM, implementado em linguagem C++. Para o desenvolvimento da interface gráfica foram utilizadas as bibliotecas IUP e OpenGL, sendo ambas multiplataforma.

Em seu atual estágio de desenvolvimento, o programa é capaz de realizar simulações de carregamentos estáticos e dinâmicos em corpos de material isotrópico com elasticidade linear utilizando o MEF. Desta forma, foi feita a verificação da implementação do método por meio da simulação de problemas com solução analítica. Além disso, o programa efetua os cálculos relativos a colisão entre elementos discretos e entre elementos discretos e elementos finitos,

esta última ao considerar as pinballs no contorno da malha de elementos finitos.

Para a definição dos parâmetros geométricos das malhas de elementos finitos o programa Solid-FDEM lê um arquivo com essas informações gerado pelo programa Mtool (versão 4.00), propriedade do convênio TecGraf/Puc-Rio – CENPES/PETROBRAS, e para a definição dos elementos discretos e suas propriedades físicas o programa lê um arquivo com essas informações gerado pelo programa VISED – Visualização de Elementos Discretos (Minato et al, 2009).

O primeiro exemplo apresentado tem como objetivo validar tanto o cálculo da dinâmica da barra quanto a interação barra-partícula. Os outros exemplos tratam da simulação numérica de uma queda de encosta sobre um muro de impacto.

### 5.1 Vibração transversal de uma viga biapoiada

Uma viga de seção transversal retangular constante e de material homogêneo é submetida repentinamente a uma carga concentrada no seu ponto médio, passando então a vibrar transversalmente. Nestas condições, as frequências naturais de vibração são dadas pela equação (Rao, 2008)

$$f_n = \frac{n^2 \pi E b h^3}{24 L^2}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (7)$$

Considerando o comprimento  $L = 10\text{m}$ , a altura da seção transversal  $h = 1\text{m}$ , a largura da seção transversal  $b = 1\text{m}$ , o módulo de elasticidade  $E = 200\text{Gpa}$  e a massa específica  $\rho = 1000\text{kg/m}^3$ , encontra-se o valor teórico de  $64\text{Hz}$  para a frequência fundamental. Já com a simulação numérica obtém-se o valor de  $68\text{Hz}$ , representando então um erro de  $6,3\%$ . No cálculo da segunda frequência natural, obtém-se  $256\text{Hz}$  para o valor teórico e  $250\text{Hz}$  para o valor numérico, havendo então um erro de  $2,5\%$ . A malha de elementos finitos utilizada é como a mostrada na Figura 4 e o passo de integração é de  $1\text{e-}7$  segundos. As cores representam a tensões longitudinais. Os deslocamentos estão multiplicados por 100 para melhor visualização.

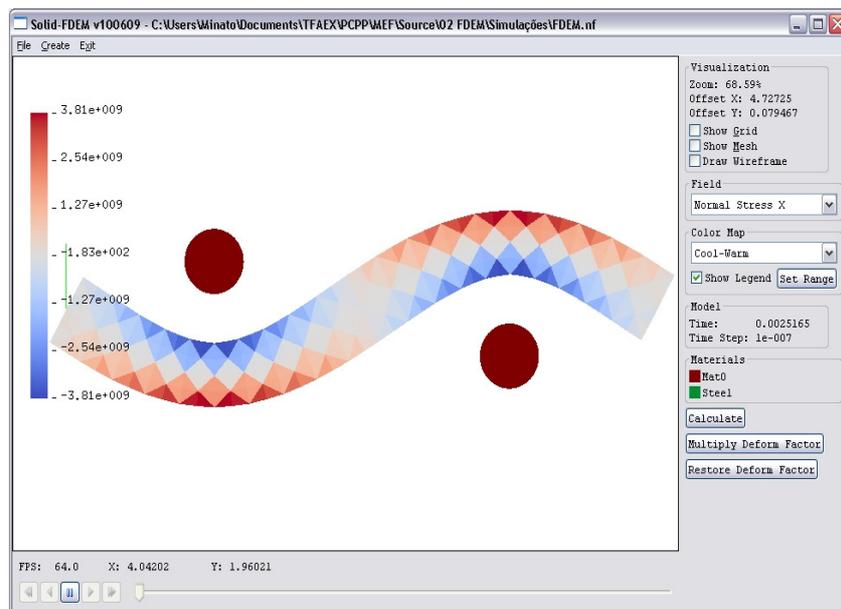


Figura 4: Viga biapoiada colocada no segundo modo de vibração através do impacto de dois elementos discretos.

## 5.2 Tensões em um muro de impacto

Um muro de impacto de seção transversal trapezoidal e constante, de material homogêneo, é submetido a um carregamento gerado pelo choque de 138 rochas, consideradas circulares e de raio entre 5 e 15cm, com densidade  $\rho_R = 2600\text{kg/m}^3$  e coeficiente de atrito  $\mu_R = 0,8$ . Considera-se o muro de concreto com altura  $h = 1\text{m}$ , base  $B = 0,5\text{m}$  e largura do topo  $b = 0,3\text{m}$ , densidade  $\rho_M = 2400\text{kg/m}^3$ , módulo de elasticidade  $E = 30\text{Gpa}$  e coeficiente de Poisson  $\nu = 0,2$ , discretizado com 240 elementos finitos T3. São utilizados na determinação das forças resultantes do choque da rocha com a superfície de concreto um coeficiente de restituição normal igual a 0,5 e um coeficiente de restituição tangencial igual a 0,9. A configuração inicial do problema, bem como a tela do programa desenvolvido, pode ser vista na Figura 5.

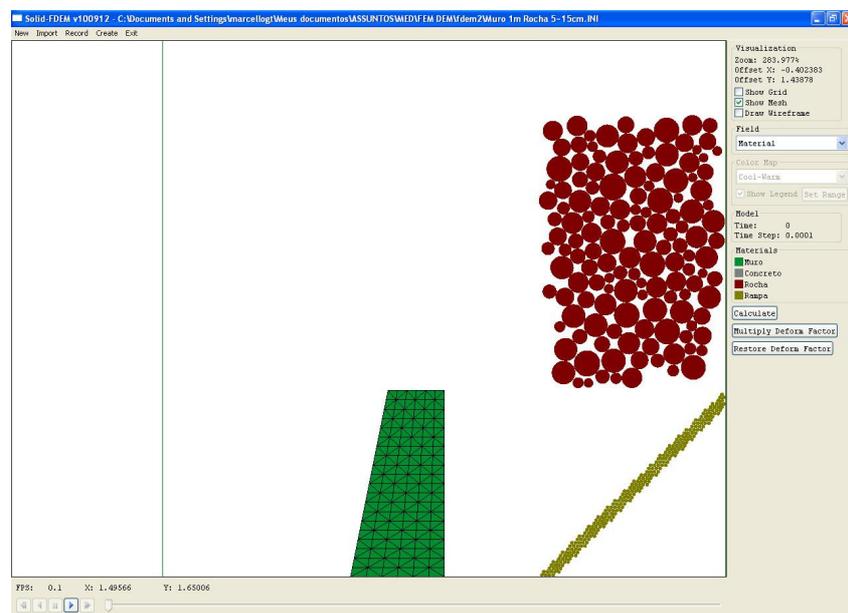
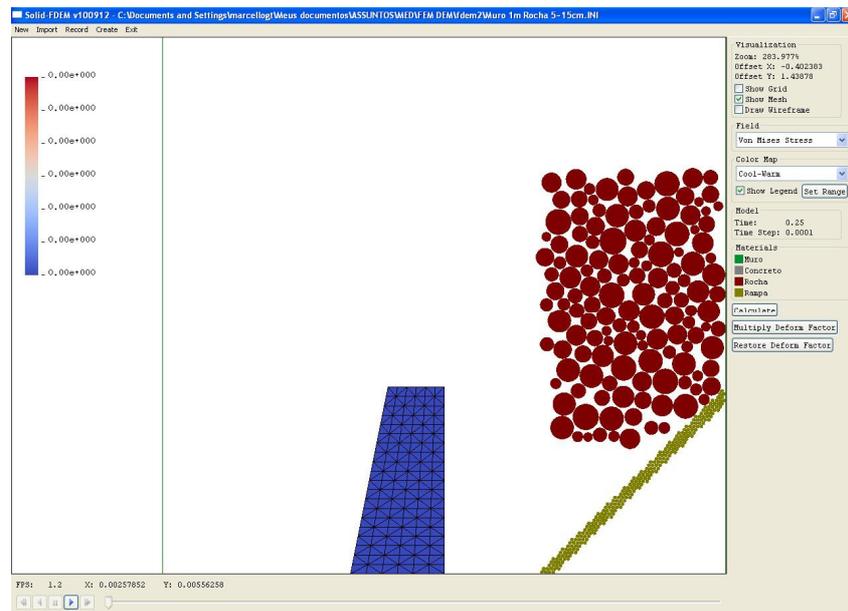
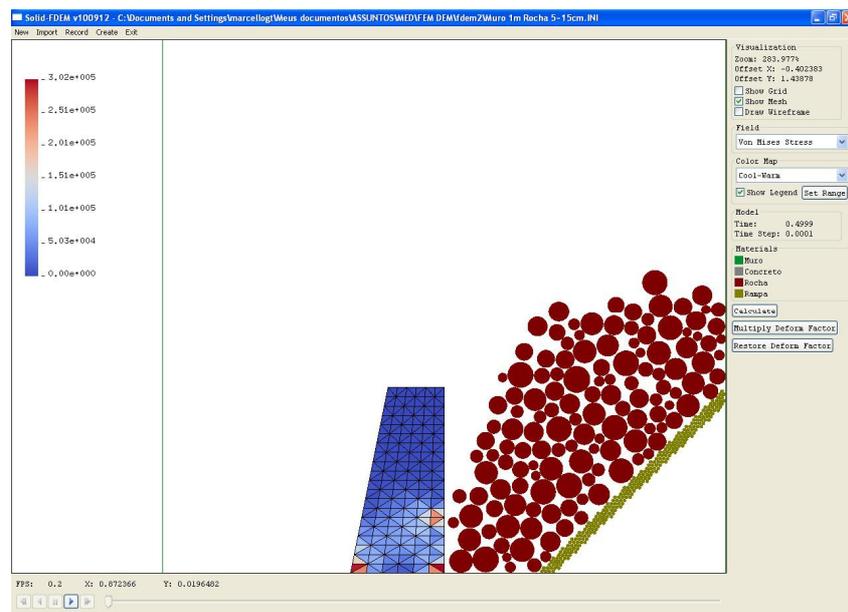


Figura 5: Configuração inicial da simulação

A Figuras 6, 7, 8 e 9 apresentam, respectivamente, o resultado da simulação em quatro instantes diferentes:  $t = 0,25\text{s}$ ,  $t = 0,5\text{s}$ ,  $t = 1,0\text{s}$  e  $t = 1,5\text{s}$ .

Figura 6: Simulação em  $t = 0,25s$ Figura 7: Simulação em  $t = 0,50s$

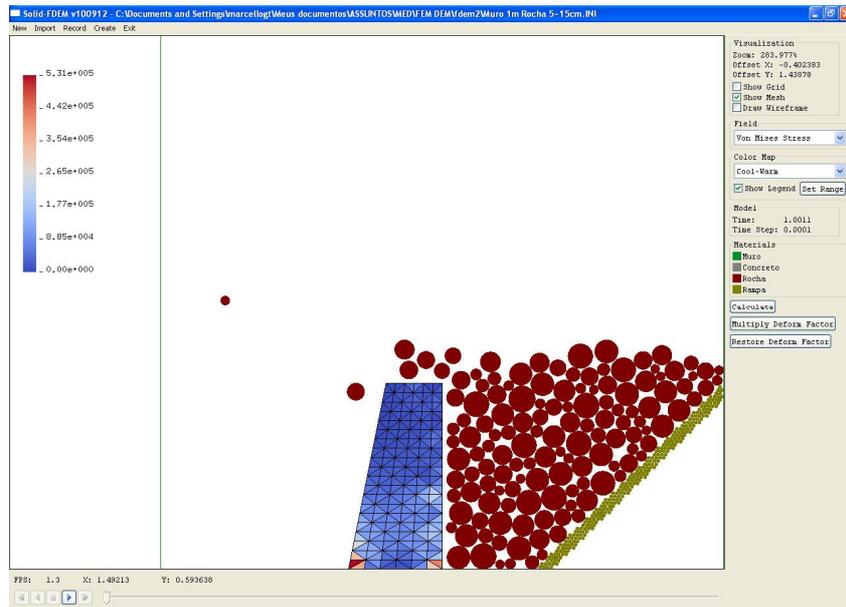


Figura 8: Simulación en  $t = 1,00s$

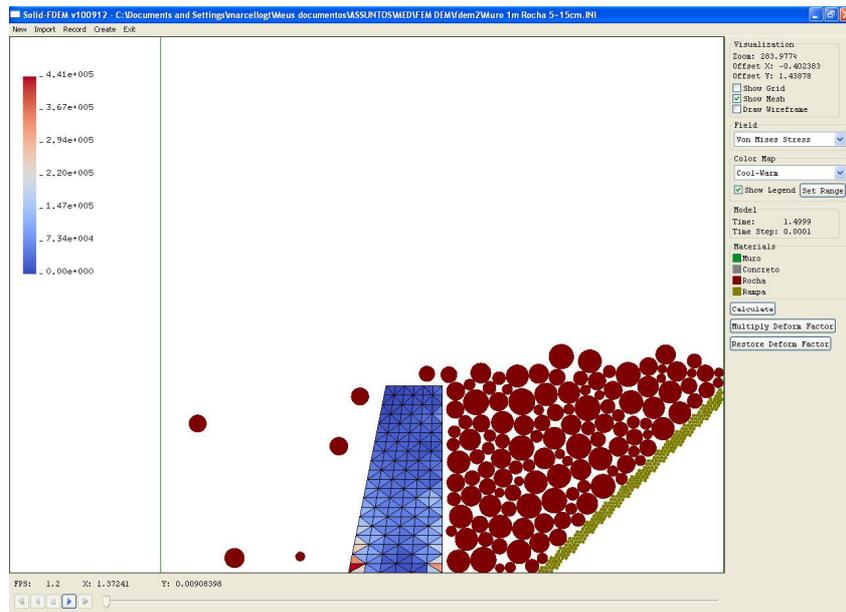


Figura 9: Simulación en  $t = 1,50s$

A Figura 10 a seguir apresenta a variação das tensões  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\sigma_{xy}$  e da tensão equivalente de von Mises no nó inferior direito da malha de elementos finitos ao longo de 3,0 s de simulação.

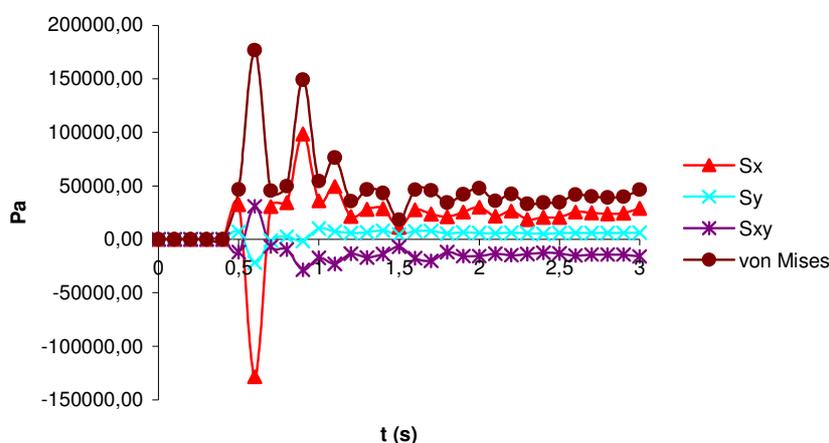


Figura 10: Variação das tensões ao longo de 3,0s de simulação

## 6 CONCLUSÕES

Neste trabalho apresentou-se uma modelagem numérica para a simulação de problemas que envolvam a interação barra-partícula, em particular aplicada à simulação de queda de rochas em um muro de impacto.

Após a validação do modelo por meio de um problema com solução analítica, conclui-se que a simulação do muro de impacto, obtida com a interação entre o Método dos Elementos Finitos e o Método dos Elementos Discretos, apresentou resultados válidos e coerentes.

Os programas computacionais desenvolvidos pelo grupo responsável por essa pesquisa, VISED para a modelagem de problemas com elementos discretos e Solid-FDEM para a simulações envolvendo a interação MEF-DEM, comprovaram ser úteis na simulação numérica de diversos problemas desse tipo, apesar de se encontrarem em fase inicial de desenvolvimento.

Em etapas posteriores dessa pesquisa pretende-se efetuar outras simulações de muro de impacto, bem como incorporar deformações plásticas nos domínios modelados pelo MEF.

## REFERÊNCIAS

- ABNT. NBR11682 – Estabilidade de taludes. *Associação Brasileira de Normas Técnicas*, 39 p. 1991.
- Bertrand, D., Nicot, F. e Gotteland, Ph. DEM modeling of soil geocomposite material for rockfall impact. *Numerical Modeling in Micromechanics via Particle Methods 1*, Part 2:13-20 Editors: Y. Shimizu; R. Hart; Peter Cundall, 2004.
- Cundall, P.A. A computer model for simulating progressive large scale movements in blocky rock systems. *Proc. Symp. Rock Fracture (ISRM)*, Nancy, Vol. I, paper 11–8. 1971.
- Dorfmann, A., Rothenburg, L. e Bruno, M.S. Micromechanical modeling of sand production and arching effects around a cavity. *Int. J. Rock Mech. & Min. Sci.* 34:1-14, paper No. 068, 1997.
- Hoek, E. *Practical Rock Engineering*. RockScience, 47 p. 2007. Disponível em: [www.rocscience.com](http://www.rocscience.com). Acesso em: 8 de julho de 2010.
- Kohler, A. *Normas para Estabilidade de Encostas. Apostilas Gratuitas*, 2009. Disponível em:

- <http://www.apostilasgratuitas.com/construcao/76-casa-eletrica-hidraulica-etc/300-normas-para-estabilidade-de-encostas>. Acesso em: 13 de setembro de 2010.
- Minato, K. K., Cantini, C. V., Teixeira, M. G. Estudo e implementação do método dos elementos discretos. *30º Congresso Ibero-Latino-Americano de Métodos Computacionais em Engenharia*, Búzios, RJ, 2009
- Munjiza, A. *The Combined Finite-Discrete Element Method*. John Wiley & Sons, 2004.
- Pöschel, T., Schwager, T. *Computational Granular Dynamics: Models and Algorithms*. Springer, 2005.
- Rao, S. *Vibrações Mecânicas*. 4 ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2008.
- Ribeiro, R.S.; Barroso, E.V. e Borges, A.F. Simulação do alcance de blocos rochosos em encosta urbana ocupada no Município de Petrópolis (RJ). *12º Congresso Brasileiro de Geologia de Engenharia e Ambiental*, Porto de Galinhas, PE, 1-11. ABGE. 2008.
- Ribeiro, R.S.; Barroso, E.V. e Borges, A.F. Análise de parâmetros relativos a queda/rolamento de blocos rochosos em uma encosta ocupada no Município de Petrópolis. *XI Simpósio de Geologia do Sudeste*, São Pedro, SP, 120-120. 2009.
- Rocha, J.S.A. Estudos numéricos sobre trajetória de queda de blocos rochosos. Dissertação (Mestrado - Programa de Engenharia Civil) – COPPE/UFRJ, 2009.
- Shigley, J. et al. *Mechanical Engineering Design*. 8 ed. Columbus : McGraw-Hill, 2006.
- Soriano, H. L. *Método de Elementos Finitos em Análise de Estruturas*. São Paulo : Edusp, 2003.
- Spang, R.M. Protection against rockfalls – stepchild in the design of rock slopes. *Proceedings of 6<sup>th</sup> Int. Congress on Rock Mechanics*, 551–557, 1987.
- Zienkiewicz, O.C., and Taylor, R.L., *The finite element method*, volume II. McGraw Hill, 1991.