

INFLUENCIA DE LA GEOMETRÍA Y LA CONFIGURACIÓN EXPERIMENTAL SOBRE MEDICIONES DE EXCITACIÓN POR IMPULSO

S. Tognana^a, W. Salgueiro^b

^a IFIMAT, Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires, Pinto 399, B7000GHG Tandil, Argentina y, Comisión de Investigaciones Científicas de la Provincia de Buenos Aires, Calle 526 entre 10 y 11 CP: 1900, La Plata, Argentina stognana@exa.unicen.edu.ar,
<http://ifimat.exa.unicen.edu.ar/es/index.html>

^b IFIMAT, Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires, Pinto 399, B7000GHG Tandil, Argentina y Comisión de Investigaciones Científicas de la Provincia de Buenos Aires, Calle 526 entre 10 y 11 CP: 1900, La Plata, Argentina, wsalgue@exa.unicen.edu.ar,
<http://ifimat.exa.unicen.edu.ar/es/index.html>

Palabras clave: Técnica de excitación por impulso, Módulo de Young, vibración libre.

Resumen. En este trabajo se estudia numéricamente la influencia de la geometría y la configuración experimental sobre determinaciones del módulo de Young en materiales, usando la técnica de excitación por impulso. Dentro de las técnicas no destructivas, la excitación por impulso permite obtener el módulo de Young o el módulo de corte de un material a partir de la medición de la frecuencia de resonancia de una barra simplemente apoyada del material en estudio. El método usual consiste en colocar una muestra sobre soportes de geometría definida y a posteriori excitar en ella las frecuencias naturales mediante un impacto. Resulta de gran importancia conocer la influencia que tienen sobre dichas determinaciones experimentales las posibles variaciones en geometría de la barra y de los apoyos, el no paralelismo entre los apoyos y la incorrecta ubicación de la barra sobre los mismos. Con ese objetivo se seleccionaron geometrías y configuraciones experimentales típicas y con ellas se obtuvo numéricamente la frecuencia de resonancia de la barra modelada mediante un programa de elementos finitos. Haciendo uso de las frecuencias obtenidas se calculó el módulo de Young siguiendo procedimientos usuales de la técnica. El análisis de los resultados obtenidos arrojó una estimación de la influencia que tiene sobre la frecuencia de resonancia el realizar pequeñas variaciones en algunos parámetros de la medición, las cuales generalmente se producen por diferentes causas durante el desarrollo del trabajo experimental.

1. INTRODUCCION

La técnica de excitación por impulso (IET) constituye una alternativa atractiva para obtener el valor del módulo de Young (E) en materiales isotrópicos, ya que la misma es una técnica no destructiva, de bajo costo, de implementación simple y de fácil operación. Estas características la hacen sumamente atractiva para su uso en pequeñas industrias y laboratorios. Sin embargo, es necesario tener en cuenta como afecta a una medición mediante IET el hecho de ser aplicada por operarios en planta; en especial, los errores que se producen por una operación incorrecta de las muestras a estudiar y del dispositivo de medición.

La técnica IET se basa fundamentalmente en calcular el valor de E a partir de la medición de la frecuencia de resonancia de una barra tras ser excitada en modo flexión por un impacto puntual tanto temporal como espacialmente. La técnica IET ha sido usada desde hace algunos años cobrando cada vez mayor importancia; en la actualidad es posible adquirir sistemas que se basan en los principios mencionados para poder obtener los valores de las constantes elásticas, ya sea tanto para un uso a nivel académico como industrial. Sin embargo, la simplicidad de la técnica permite construir estos sistemas usando material disponible en un laboratorio para alumnos, con lo cual es posible obtener el módulo de Young con gran exactitud. De esta manera, autores del presente trabajo han realizado una serie de estudios en distintos materiales usando un sistema de medición fabricado en el laboratorio (Tognana, 2006; Tognana, 2010).

En este trabajo, se analizó la influencia que tienen algunos factores de índole experimental sobre la frecuencia de resonancia de una muestra en modo flexión y, por lo tanto, como se pueden introducir errores sobre el valor del módulo de Young calculado. Estos factores pueden deberse a una incorrecta posición de la muestra o a una geometría inadecuada de la misma. El estudio se realizó calculando las frecuencias de resonancia mediante el método de elementos finitos. Asimismo, se analizó la validez de la ecuación dada en la literatura, usualmente utilizada para calcular el módulo E .

2. TÉCNICA DE EXCITACIÓN POR IMPULSO

La técnica de excitación por impulso, en la forma en que usualmente se la utiliza para estudiar diferentes materiales, permite obtener el módulo de Young a partir de la frecuencia en la vibración libre de una barra simplemente apoyada en dos puntos (Roebben et al. 1997; Schmidt et al. 2005a, b; Heritage et al. 1998; Tilbrook et al. 2005). La vibración de la muestra se genera mediante un impacto puntual, donde se excitan todas las frecuencias, pero luego de un lapso de tiempo despreciable solo sobreviven las frecuencias naturales de la muestra. De esa manera, la ecuación de movimiento para un dado punto de la barra es:

$$y(t) = Ae^{-kt} \text{sen}(2\pi f t + \phi) \quad (1)$$

donde A y k son constantes, la última relacionada con la fricción interna del material, f es la frecuencia de resonancia y ϕ es un ángulo de fase inicial.

En el modo flexión la frecuencia de resonancia permite calcular el módulo de Young, a partir de la ecuación dada por Spinner y Tefft, basada en la teoría de Pickett (Spinner y Tefft, 1961).

$$E = 0.94642 \frac{\rho L^4 f^2}{t^2} T \quad (2)$$

donde ρ es la densidad del material, L y t son la longitud y el espesor de la barra, y T es un factor de corrección, que para muestras con una relación t/L pequeña, se puede aproximar por la función:

$$T = 1 + 6.585 \left[1 + 0.0752\mu + 0.8109\mu^2 \right] \left(\frac{t}{L} \right)^2 - 0.868 \left(\frac{t}{L} \right)^4 - \frac{8.340 (1 + 0.2023\mu + 2.173\mu^2) \left(\frac{t}{L} \right)^4}{1 + 6.338 (1 + 0.1408\mu + 1.536\mu^2) \left(\frac{t}{L} \right)^2} \quad (3)$$

siendo μ el coeficiente de Poisson.

En una experiencia de excitación por impulso, la muestra se coloca apoyada sobre dos soportes ubicados a una distancia $0.224 L$ a partir de los extremos de la muestra. Para producir la vibración de la barra se realiza un impacto con una bolilla de plástico la cual se deja caer desde una cierta altura, justo sobre el centro de la barra. La vibración se capta utilizando un detector ubicado debajo del punto de impacto. A tal fin, un micrófono unido a un circuito de amplificación y recolección de datos utilizando una computadora personal ha brindado buenos resultados en la medición de E en distintos materiales (Tognana et al. 2010). Las frecuencias son obtenidas realizando una descomposición por transformada de Fourier (ver ejemplo obtenido de la medición de una muestra de aluminio en Figura 1).

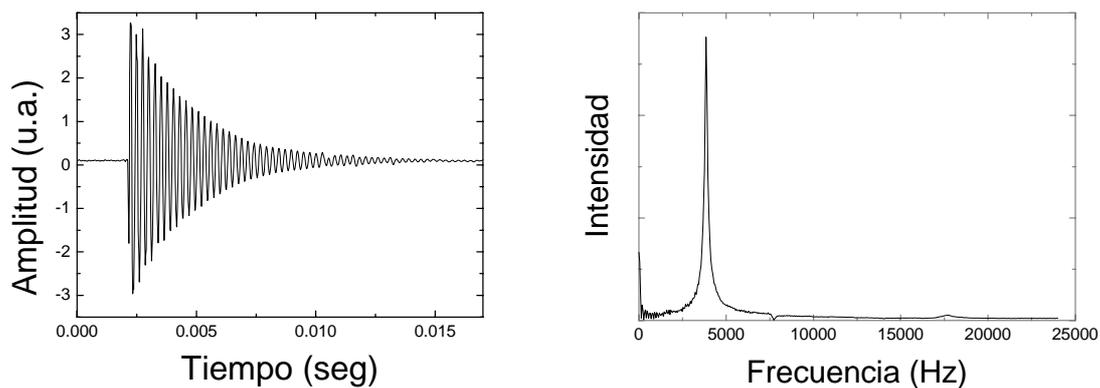


Figura 1. A la izquierda, espectro típico de la vibración de una muestra de aluminio puro. A la derecha, resultante de la descomposición en frecuencias usando transformada de Fourier.

Por otro lado, cuando se realiza una medición de excitación por impulso, existen diversos factores de índole experimental que pueden influenciar el valor de la frecuencia de resonancia y, por lo tanto, el valor calculado para el parámetro E resulta erróneo. Algunos factores que pueden introducir variaciones en la frecuencia de resonancia y que se estudian en este trabajo son: una incorrecta posición de los puntos de apoyo, una geometría inadecuada de la muestra, es decir no paralelismo entre las caras de la muestra y una geometría inadecuada de los puntos de apoyo.

Para realizar el análisis se supuso una barra de prueba cuadrada de aluminio ($E=70$ GPa y $\mu=0.35$) de sección cuadrada ($10 \text{ mm} \times 10 \text{ mm}$) y longitud de 200 mm .

Usando el software de elementos finitos ABAQUS se obtuvo la frecuencia de resonancia fundamental para la barra de prueba, con la que, introduciéndola en la Ec. (2) se calculó el modulo E que se mediría experimentalmente.

3.1 INFLUENCIA DE LA GEOMETRIA DE LA BARRA

Se obtuvo el valor de la frecuencia fundamental de vibración en modo flexión para la barra de prueba y usando la Ec. (2) se obtuvo el valor de E . El mismo concuerda perfectamente con el valor nominal de la mencionada barra (70.0 GPa).

Posteriormente, se realizó el procedimiento antes descrito sobre barras de prueba de 100 mm y 50 mm de longitud. También en este caso, de las frecuencias de resonancia obtenidas mediante elementos finitos, se calculó el módulo E usando la Ec. (2). Se encontró que si fuese obtenido de esta manera, el valor de E sería 70.1 GPa y 70.4 GPa para barras de longitud igual a 100 mm y 50 mm, respectivamente. El error sería entonces del 0.16% y del 0.5% en cada caso. El origen de este error proviene del factor T , para el cual, en este trabajo, se utilizó la aproximación dada en la Ec. (3).

Para realizar una medición mediante excitación por impulso las dimensiones de la muestra deben ser conocidas con exactitud. Para ello, usualmente las muestras son cortadas y mecanizadas con el fin de obtener la geometría final. Sin embargo, en este proceso, fácilmente se pueden introducir errores en la geometría de las muestras que se trasladan luego al valor del módulo E determinado mediante la Ec. (2). A continuación se analiza la influencia que tiene sobre el valor de la frecuencia de resonancia el hecho de que las superficies laterales de la barra de prueba sean no paralelas. En la Tabla 1 se muestran los resultados calculados a partir de usar la Ec. (2) con los valores de las frecuencias que se obtuvieron mediante elementos finitos para las geometrías mostradas. En todos los casos el plano de vibración es vertical. Para hacer una analogía con una medición experimental, se supuso que en la cara no paralela la dimensión característica es el valor promedio entre el menor y mayor valor.

De los valores presentados en la Tabla 1, se observa que cuando se pierde el paralelismo entre las superficies horizontales, es decir las caras que son perpendiculares al plano de vibración, el módulo E estimado usando la frecuencia de vibración disminuye levemente. Por otro lado, cuando el no paralelismo se produce en las superficies laterales de la barra, el módulo E estimado mediante la frecuencia de vibración aumenta. Este aumento es, en valores relativos, mayor a la disminución para el caso antes mencionado. Esto plantea el problema de que, como están dadas tanto la Ec. (2) como la Ec. (3) (aproximación del factor T) son independientes de las dimensiones laterales de la muestra, por lo que no es posible corregir los valores obtenidos para E . De todas maneras, desde el punto de vista experimental, los errores que se introducen en los valores de E medidos a partir de la frecuencia de resonancia no son significativos dentro de diferencias razonables en la geometría de las muestras.

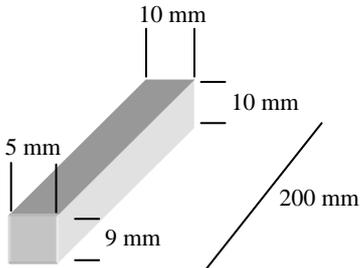
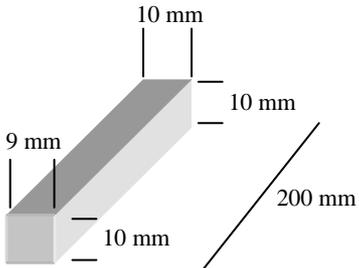
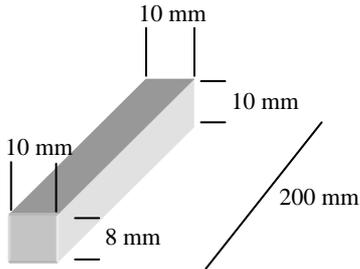
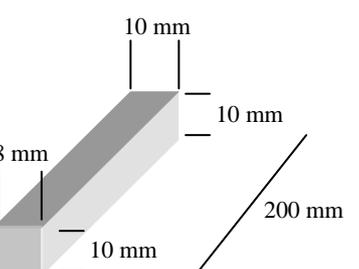
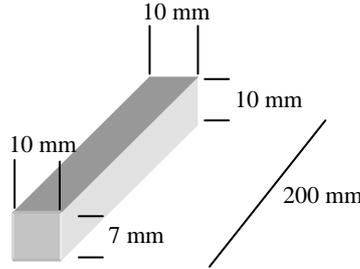
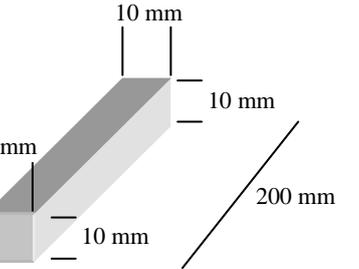
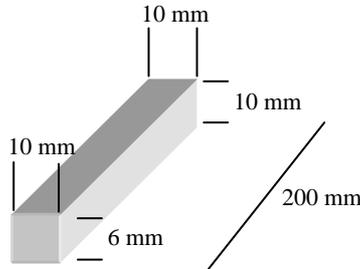
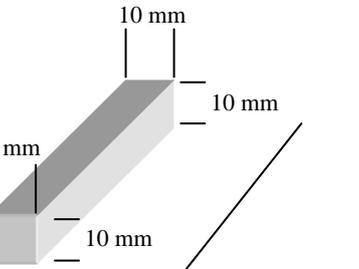
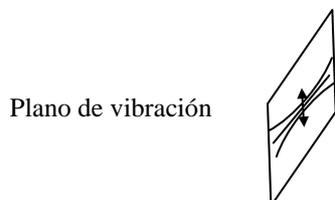
Geometría	E (GPa)	Geometría	E (GPa)
	70.0 (0%)		70.1 (0.1%)
	70.0 (0%)		70.2 (0.4%)
	69.9 (-0.2%)		70.6 (0.8%)
	69.7 (-0.4%)		71.1 (1.6%)

Tabla 1. Valores de E calculados a partir de la frecuencia de resonancia para las geometrías mostradas. Entre paréntesis se consigna la diferencia porcentual respecto al valor nominal (70 GPa).



3.2 INFLUENCIA DE LA CURVATURA DE LA BARRA.

Continuando con la posibilidad de que en una medición experimental la muestra tenga una geometría incorrecta, la cual puede introducir errores en la medición del valor del módulo E , se analizó la variación de la frecuencia para barras curvadas. En la [Figura 2](#) se muestra la diferencia relativa de E en función del cociente *radio de curvatura/longitud* de la barra. Las

frecuencias se obtuvieron para una barra de aluminio de $200 \text{ mm} \times 10 \text{ mm} \times 10 \text{ mm}$. En la mencionada figura se puede observar que el error introducido es menor al 1.2% si el cociente *radio de curvatura/L* es mayor a 4.

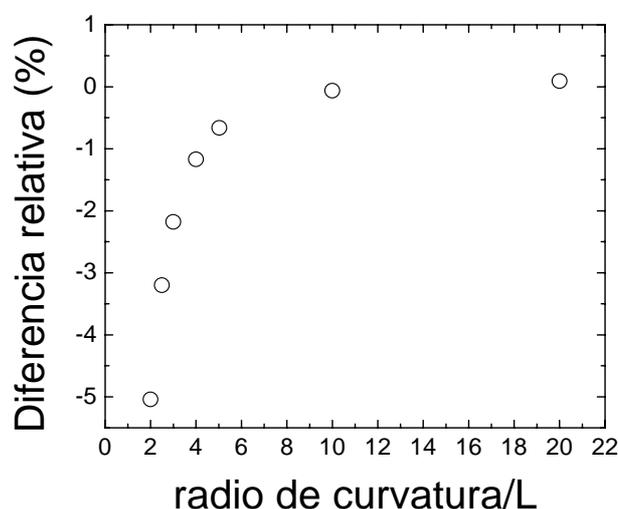


Figura 2. Valor de E respecto al valor nominal (70 GPa) en función del radio de curvatura, respecto a la longitud de la barra.

3.3 INFLUENCIA DE LA GEOMETRÍA DE LOS PUNTOS DE APOYO.

Con el objetivo de representar una situación más real de la configuración experimental que se utiliza para medir el módulo E se analizó la frecuencia de vibración de resonancia de muestras apoyadas sobre apoyos de geometría de prisma triangular y cuyas dimensiones son 5 mm de base, 5 mm de altura y 40 mm de largo. La muestra se encuentra apoyada sobre uno de los bordes de estos prismas, pero se consideró que el mismo no es un borde agudo sino que el apoyo se produce sobre una superficie de contacto (ver Figura 3a)). Se varió el espesor de la superficie de contacto entre valores de 0.02 mm y 1 mm. Al modificar el espesor de la superficie de contacto, la frecuencia de resonancia se modifica y por lo tanto el valor de E que se obtendría experimentalmente sería erróneo.

En la Figura 3b) se presenta la diferencia relativa de E respecto al valor nominal (70 GPa) calculado a partir de usar la frecuencias de resonancia obtenidas para los diferentes espesores de contacto.

Por otro lado, para el caso particular de una superficie de contacto de 0.5 mm se supuso un extremo curvado, con un radio de curvatura de 0.5 mm. El valor de la diferencia relativa de E , respecto al valor nominal, obtenido de la forma ya mencionada se muestra también en la Figura 3b), observándose que el mismo es considerablemente menor que para el caso de la geometría del apoyo sin una superficie curva.

De los resultados anteriores, se puede observar que la geometría del borde de apoyo es un factor que tiene influencia sobre el módulo E , sobre todo si la superficie de contacto es mayor a ~ 0.4 mm. Para valores menores, el valor de E no difiere del valor nominal en más del 1%.

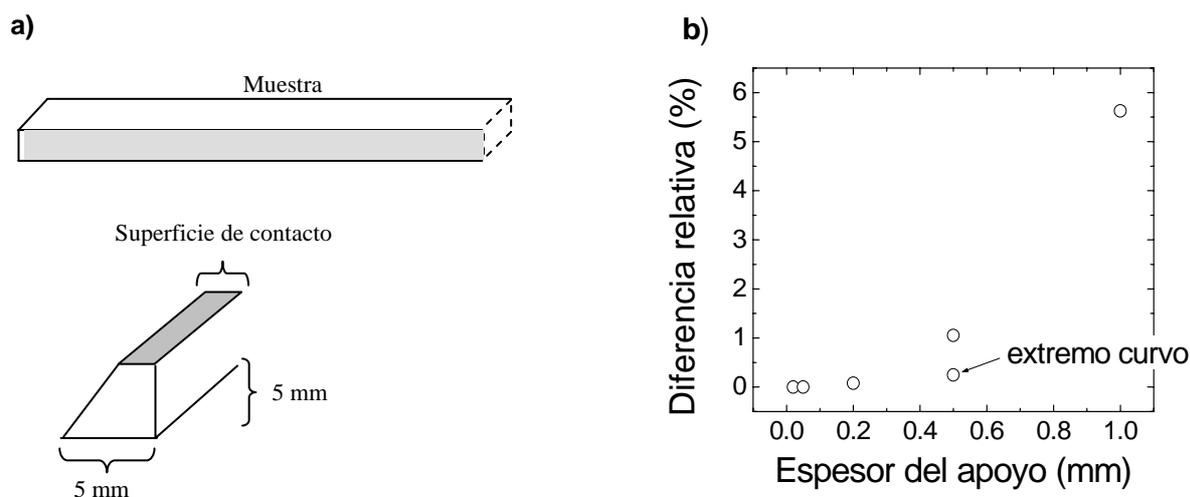


Figura 3. a) Esquema de la muestra y de la geometría de un apoyo. b) Diferencia relativa del módulo respecto al valor nominal (70 GPa) en función del espesor de la superficie de apoyo.

3.4 INFLUENCIA DE LA UBICACIÓN DE LOS PUNTOS DE APOYO.

Continuando con el análisis de la influencia de los puntos de apoyo sobre la frecuencia de resonancia, se modificó la posición de los mismos relativa a la barra manteniendo constante la geometría del apoyo, con un espesor de contacto de 0.05 mm. En la Figura 4 se presenta la diferencia relativa del módulo E en función de la distancia entre el extremo de la barra y el apoyo (teniendo en cuenta los dos apoyos), en unidades de la longitud total de la barra (L). Cabe recordar que la distancia recomendada por la literatura es $0.224 L$, a partir del extremo de la barra.

De la Figura 4 se puede observar que, una incorrecta colocación de los puntos de apoyo es una posible fuente de errores del valor de E obtenido. En particular, si se colocasen los apoyos a una distancia $0.21 L$ del extremo en lugar de $0.224 L$, lo cual en una barra de longitud igual a 200 mm equivale a un error de 2.8 mm, se obtiene un valor de E menor en 1.5% al valor nominal de 70 GPa. Este es uno de los errores más comunes que se puede cometer durante el desarrollo de una medición mediante IET.

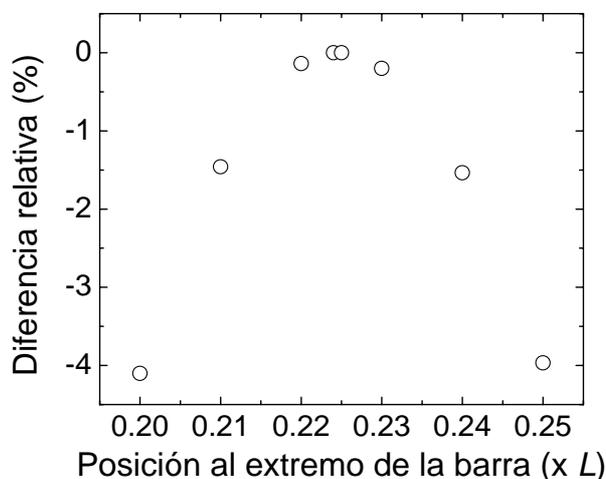


Figura 4. Diferencia relativa de E con respecto al valor nominal (70 GPa) en función de la posición de los apoyos respecto a los extremos de la barra en unidades de L .

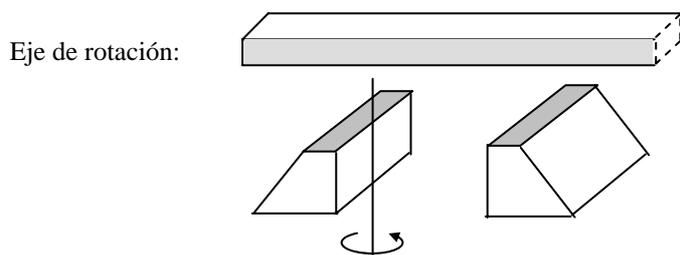
3.5 NO PARALELISMO DE LOS PUNTOS DE APOYO.

A continuación se analiza como posible fuente de error en la medición del valor de E mediante IET, una ubicación no paralela de los apoyos de la muestra. El procedimiento seguido fue el de mantener la configuración geométrica con un apoyo fijo y girar el otro apoyo un determinado ángulo. A partir de la frecuencia de resonancia se obtuvo la diferencia relativa de E , respecto al valor nominal, y en la [Tabla 2](#) se presentan los resultados para distintos ángulos de giro del apoyo.

Se observa que la variación del módulo E es despreciable en el caso de no paralelismo de los apoyos, ya que para rotaciones menores a 10° la diferencia relativa con respecto al valor nominal es menor al 0.2%, ángulos mayores constituyen una desviación grosera.

Angulo	Diferencia relativa
0°	0
1°	0
2°	0
5°	0.05%
10°	0.2%
45°	6.85%

Tabla 2. Diferencia relativa de E respecto al valor nominal (70 GPa) obtenido a partir de la frecuencia de resonancia para diferentes corrimientos angulares.



Para el caso de que la rotación de los apoyos sea ahora en el eje axial, es decir que superficie de contacto del apoyo deja de encontrarse en un plano paralelo a la superficie de la barra, se producen nuevos modos de vibración con respecto a la vibración de una barra apoyada en apoyos paralelos, correspondientes a modos de vibración fuera del modo flexión. Sin embargo, para bajos ángulos de rotación el modo fundamental no modifica su frecuencia.

4 CONCLUSIONES

En este trabajo se estudiaron los factores que pueden introducir errores en la medición del módulo de Young en una medición mediante la técnica de excitación por impulso, simulando la vibración mediante el método de elementos finitos. Se encontró que, dentro de límites razonables, la técnica no es sensible a errores en la configuración experimental.

Se concluye que el error más importante es el que se introduce debido a una incorrecta colocación de los puntos de apoyo, ya que si se trabaja con muestras de corta longitud, experimentalmente es difícil mantener la muestra en la ubicación correcta tras el impacto.

Asimismo, en este trabajo se encontró que las ecuaciones utilizadas comúnmente para calcular E a partir de la frecuencia de resonancia, brindan resultados satisfactorios, aunque sin embargo, tal como fueron dadas presentan el problema de que no dependen de la dimensión lateral de la muestra. Una forma de introducir la dimensión lateral de la muestra es, si en lugar

de considerar la densidad de la muestra como parámetro, se considera el cociente *masa* sobre *volumen* de la muestra, lo cual implica realizar una medición de la masa para cada muestra estudiada.

REFERENCIAS

- Heritage, K., Frisby C., Wolfenden A., Impulse excitation technique for dynamic flexural measurements at moderate temperatura, *Rev. Sci. Instrum.*, 59: 973-974, 1988.
- Roebben, G., Bollen B., Brebels, A., Van Humbeeck, J., Van der Biest, O., Impulse excitation apparatus to measure resonant frequencies, elastic moduli, and internal friction at room and high temperature, *Rev. Sci. Instrum.*, 68: 4511-4515, 1997.
- Schmidt, R., Wicher, V., Tilgner, R., Young's modulus of moulding compounds measured with a resonance method, *Polymer Testing*, 24: 197–203, 2005a.
- Schmidt, R., Alpern, P., Tilgner, R., Measurement of the Young's modulus of moulding compounds at elevated temperatures with a resonance method, *Polymer Testing*, 24: 137–143, 2005b.
- Spinner, S., y Tefft, W.E., A method for determining mechanical resonance frequencies and for calculating elastic moduli from these frequencies, *Proceedings ASTM*, 61:1221-1233, 1961.
- Tilbrook, M.T., Moon R.J., Hoffman M., On the mechanical properties of alumina–epoxy composites with an interpenetrating network structure, *Mater. Sci. and Eng. A*, 393: 170-178, 2005.
- Tognana, S., Salgueiro, W., Somoza, A., Toscano, O., Medición del módulo de elasticidad mediante excitación por impulso en compuestos epoxy, *Anales Afa*, 18: 180-183, 2006.
- Tognana, S., Salgueiro, W., Somoza, A., Marzocca, A., Measurement of the Young's modulus in particulate epoxy composites using the impulse excitation technique, *Mater. Sci. and Eng. A*, 527: 4619–4623, 2010.