

## APLICACIÓN DEL MÉTODO DE PUNTO FINITO PARA PROBLEMAS DE ACÚSTICA DE SALAS

**Carlos Spa<sup>a</sup>, Luis C. Pérez<sup>b</sup> and Franco O. Perazzo<sup>b</sup>**

<sup>a</sup>*Departamento de Matemáticas, Universidad Técnica Federico Santa María, Av. Vicuña Mackenna 3939, Santiago, Chile, [0carlos.spa0@gmail.com](mailto:0carlos.spa0@gmail.com)*

<sup>b</sup>*Departamento de Ingeniería Mecánica, Aula UTFSM-CIMNE, Universidad Técnica Federico Santa María, Av. España 1680, Valparaíso, Chile, [luis.perez@usm.cl](mailto:luis.perez@usm.cl) - [franco.perazzo@usm.cl](mailto:franco.perazzo@usm.cl), <http://www.mec.utfsm.cl>*

**Palabras Clave:** Acústica de salas, Ecuación de Ondas, Modelo de impedancia local, Método sin malla.

### Resumen.

El método de Punto Finito (MPF) es una técnica numérica sin malla que aproxima localmente la solución de una ecuación diferencial en cada uno de los puntos de la discretización del dominio. Este artículo presenta un modelo basado en este método para aplicaciones de acústica de salas. Una de las mayores ventajas de esta técnica es que permite trabajar de forma precisa con geometrías completamente irregulares a diferencia de otros métodos menos flexibles como Diferencias Finitas (DF) o el método Guía de Onda Digital (GOD) que están más restringidas por el tipo de malla que utilizan. Finalmente, se estudia mediante simulaciones numéricas 1D la idoneidad del método para la resolución de problemas en el campo señalado.

## 1 INTRODUCCIÓN

La acústica de salas es la ciencia encargada de estudiar la propagación del sonido en espacios cerrados. Estos estudios son de vital importancia en entornos específicos como teatros, auditorios o salas de concierto, ya que la calidad del sonido en estos espacios es sumamente importante para que el evento que se desarrolle tenga cierta calidad acústica. Uno de los objetivos más importantes en acústica de salas consiste en el cálculo de la respuesta de cualquier sala a un impulso de sonido. Esta respuesta impulsional permite obtener la información completa de las propiedades acústicas del entorno y, consecuentemente, tener un control total de todas las características relevantes en estudios de este tipo.

Cabe mencionar que a pesar de que la formulación del problema está bien definida, su solución analítica es, en general, extremadamente difícil de obtener, existiendo soluciones en casos muy simples y demasiado alejados de situaciones reales. Por tanto, una alternativa adecuada que ha emergido en las últimas décadas consiste en la utilización de computadores para dar soluciones aproximadas al problema con una buena precisión en un tiempo de computación razonable [Schroeder \(1973\)](#).

Típicamente, todos los métodos computacionales que se utilizan para obtener la respuesta impulsional de una sala están clasificados en dos grandes grupos [Savioja \(1999\)](#): los métodos geométricos y los métodos ondulatorios. Esta clasificación aparece en función de la aproximación que se utilice para tratar la propagación del sonido. Por ejemplo, los métodos geométricos hacen referencia a todas las técnicas que asumen que la longitud de onda del sonido es mucho menor que la dimensión de los objetos del espacio. Estos métodos aproximados tienen la virtud de ser muy eficientes en términos de tiempo de computación. A pesar de todo, la mayor desventaja de estos métodos es que, al tratarse de técnicas aproximadas, fenómenos ondulatorios como la difracción, que suceden cuando la longitud de onda es del mismo orden de magnitud que los objetos de la sala, no pueden ser simulado y consecuentemente, el sonido no es reproducido correctamente debido a que no se tiene en cuenta el carácter ondulatorio plausible en el rango audible de frecuencias más bajas. De todos estos métodos, los más representativos son los algoritmos basados en trazado de rayos (TR) [Krokstad et al. \(1968\)](#), o el método de las imágenes (MI) [Allen and Berkley \(1979\)](#) y el recientemente propuesto trazado de haces (TH) [Funkhouser et al. \(2004\)](#).

Por otro lado, el segundo grupo, el de los métodos ondulatorios, aparece como alternativa a todas estas técnicas geométricas que son incapaces de simular de forma natural fenómenos ondulatorios muy comunes a bajas frecuencias. Estos métodos parten de las ecuaciones diferenciales analíticas que describen el fenómeno físico a tratar, que en este caso es la propagación del sonido en espacios cerrados. Existen dos subgrupos dentro de los métodos ondulatorios: los que utilizan formulaciones analíticas en el dominio frecuencial (Ec. de Helmholtz) y en el dominio temporal (Ec. de Ondas).

En el primer subgrupo, comúnmente, los métodos utilizados son Elementos Finitos (MEF) [Wright \(1995\)](#); [Savioja et al. \(1996\)](#) o el método de Elementos de Contorno (MEC) [Ciskowski and Brebbia \(1991\)](#). El mayor problema de estos métodos formulados en el espacio de frecuencias es que para calcular una respuesta impulsional se necesita hacer una simulación diferente para cada frecuencia. Consecuentemente, estos algoritmos no suelen utilizarse en este tipo concreto de problema debido a su alto coste computacional.

Por otro lado, los métodos basados en formulaciones en el dominio temporal aparecen como una solución muy apropiada en el caso que se desee obtener la respuesta impulsional de una sala ya que con sólo una simulación se tiene la respuesta para todas las frecuencias simuladas. Los métodos más utilizados basados en formulaciones en el dominio temporal son los clásicos métodos de Diferencias Finitas (DF) [Botteldooren \(1995\)](#) y el método de Guía de Onda Digital (GOD) [Murphy et al. \(2007\)](#), junto con las versiones más sofisticadas como por ejemplo los métodos GOD interpolados [Savioja and Välimäki \(2003\)](#) y triangular/tetraédrico [Duyne and Smith \(1995\)](#); [Fontana and Rocchesso \(1998\)](#). Recientemente, otros métodos alternativos han aparecido como por ejemplo, el método de la Matriz

de Transmisión de Línea (MTL) [Miklavcic and Ericsson \(2004\)](#) o el método de la Transformación Funcional (TF) [Petrausch and Rabenstein \(2005\)](#). Cabe mencionar, que últimamente ha aparecido alguna contribución de MEF y MEC en el dominio temporal para aplicaciones de propagación acústica [Hargreaves and Cox \(2008\)](#).

Una alternativa a los métodos comunes formulados en el dominio temporal son los algoritmos basados en el método conocido como *métodos sin malla* o libres de malla. Estos métodos comprenden un conjunto de nuevas técnicas numéricas que, a diferencia de los métodos tradicionales como el de MEF [Zienkiewicz and Taylor \(2000\)](#), no requieren de una subdivisión del dominio en una malla. Estas técnicas han sido utilizadas ampliamente para resolver ecuaciones diferenciales parciales a partir de distribuciones de puntos regulares o irregulares. Aspectos generales, clasificación, ventajas y desventajas de estos métodos pueden encontrarse en las referencias [Duarte and Oden \(1996\)](#); [Belytschko et al. \(1996\)](#); [Oñate et al. \(1996b\)](#); [Fries and Matthies \(2003\)](#); [Liu \(2002\)](#); [Li and Liu \(2004\)](#); [Gu \(2005\)](#); [Chen et al. \(2006\)](#). Este artículo está estructurado de la siguiente manera: en la sección 2 se presenta el modelo analítico que se utilizará posteriormente para la formulación numérica desarrollada en la sección 3. Además, en la sección 4 se presenta una aplicación simple en una dimensión para mostrar resultados numéricos debidamente comparados con los resultados esperados. Por último se presentan las conclusiones y futuras líneas de investigación.

## 2 MODELO ANALÍTICO

Como se ha dicho en la sección anterior, uno de los objetivos más importantes en el campo de la acústica de salas consiste en el cálculo de la respuesta impulsional en entornos cerrados. Esta información permite un control absoluto de las propiedades acústicas de cualquier entorno, muy útiles en campos tan diversos como la arquitectura o las aplicaciones multimedia. Este documento se centra en los métodos ondulatorios, más en concreto, los que se formulan en el dominio temporal.

El punto de partida de todos estos métodos es el sistema de Ecuaciones en Derivadas Parciales (EDPs) que gobiernan la dinámica del problema, que en este caso consiste en la propagación del sonido en habitaciones. Este fenómeno está perfectamente descrito por una EDP que caracteriza la propagación del sonido en el aire y otra que modela el comportamiento de las paredes de la sala. En esta sección se presenta la formulación básica del problema de contorno que define matemáticamente la propagación del sonido en espacios cerrados y que es utilizada en todas las formulaciones numéricas desarrolladas para este tipo de aplicaciones.

Se define un dominio rectangular 2D rodeado por contornos  $\partial V$  que representan las paredes del entorno, ver figura 1 (izquierda). En  $\mathbf{x} \in V \cup \partial V$ , donde  $\mathbf{x} = (x, y)$  representa el vector de posición, se asume que la presión acústica,  $u$ , está bien definida a todo tiempo,  $t$ . Para posiciones  $\mathbf{x}$  dentro de  $V$ , se asume que el medio de propagación es un fluido, más concretamente aire, que está completamente en reposo antes de la emisión de la fuente de sonido. En este caso es razonable asumir que el sonido que se produzca se propagará según la ecuación diferencial hiperbólica conocida como la ecuación de Ondas cuya forma explícita en dos dimensiones es, [Morse and Ingard \(1986\)](#)

$$\frac{\partial^2 u(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} - c^2 \Delta u(\mathbf{x}, t) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0, t - t_0) \quad \mathbf{x}, \mathbf{x}_0 \in V, \quad (1)$$

donde  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ ,  $c$  es la velocidad del sonido en el aire y  $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0, t - t_0)$  es la función delta de Dirac que representa la fuente puntual de sonido localizada en  $\mathbf{x}_0$ , y que emite en  $t_0$ . Recalcar que esta ecuación es válida sólo para aquellas posiciones que estén dentro de  $V$ , para posiciones que están en los contornos  $\partial V$  se necesita otras ecuaciones que modelen de alguna manera el comportamiento del sonido tras impactar con una pared.

En algunas aplicaciones como acústica de salas o aeroacústica, es necesario definir condiciones de contorno parcialmente absorbentes. Esto quiere decir que cuando una onda de sonido impacta con

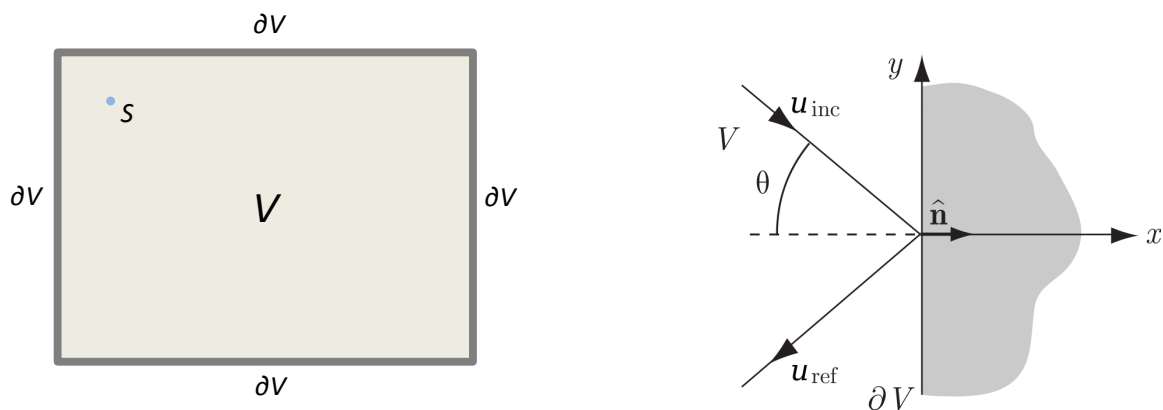


Figure 1: (Izquierda) Un dominio 2D  $V$  rodeado por paredes  $\partial V$ . La fuente  $S$  se localiza en  $(x_0, y_0)$ . (Derecha) Reflexión de una onda plana,  $\partial V$  y  $\hat{n}$  representa el vector normal de la superficie de impedancia.

este tipo de paredes, parte de su energía es absorbida en forma de calor, disminuyendo la energía reflejada de la onda resultante. Por ejemplo, existen materiales capaces de disipar eficientemente la energía acústica, i.e. materiales absorbentes y porosos. Se puede encontrar en la literatura muchos modelos numéricos de condiciones absorbentes para DF o para GOD, las más representativas son [Berenger \(1996\)](#); [Yuan et al. \(1997\)](#); [Zhou and Huang \(2001\)](#). Por otro lado, existen otros materiales, como muchas superficies planas, que reflejan una parte relevante del sonido incidente. Para este tipo de paredes, existen también numerosas contribuciones en DF como por ejemplo [Botteldooren \(1994\)](#), [Kowalczyk and van Walstijn \(2007\)](#); o, más recientemente, en algoritmos basados en técnicas pseudo-espectrales de Fourier (PS) como [Spa et al. \(2010\)](#).

Estas investigaciones están centradas en los modelos numéricos de materiales reflectantes. En este tipo de escenarios, es razonable asumir que localmente hay una relación lineal entre la componente normal de la velocidad de partícula y la presión acústica en un punto particular de la superficie. De hecho, estos materiales pueden ser caracterizados en términos de una única impedancia de contorno que permitirá controlar todas las propiedades acústicas del material. Esta impedancia de contorno específica,  $Z$ , se define, en el caso de una onda plana, como el cociente de la amplitud compleja de la presión acústica y la componente normal de la velocidad de partícula, [Morse and Ingard \(1986\)](#). Cabe mencionar, que a pesar de que los escenarios reales considerarían impedancias dependientes de la frecuencia, estas investigaciones se centran en impedancias constantes o independientes de la frecuencia. Por tanto, teniendo en cuenta estas suposiciones y asumiendo que la ecuación de conservación de masa se cumple a lo largo de la dirección normal, se puede obtener una ecuación que únicamente depende de la presión acústica,  $u$ , y que a su vez, está relacionada con la impedancia acústica y la dirección normal de la superficie de contorno de la siguiente manera

$$\frac{\partial^2 u(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} = -\frac{Z}{\rho} (\nabla \cdot \hat{\mathbf{n}}) \frac{\partial u(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \quad \mathbf{x} \in \partial V, \quad (2)$$

donde  $\hat{\mathbf{n}}$  es el vector normal a la superficie de contorno [Kuttruff \(2000\)](#), y  $\rho$  es la densidad del fluido, que en este caso es aire. Por último notar que la impedancia  $Z$  es una constante real y positiva.

El comportamiento de este modelo está estudiado para el caso de una onda plana. En la figura 1 (derecha) se ilustra el caso de una onda plana,  $u_{inc}$ , que incide contra una superficie de impedancia local, con una orientación  $\theta$ . Como resultado de esto, se obtiene una onda reflejada con orientación especular,  $u_{ref}$ , con una amplitud menor o igual a la incidente. Si se define el coeficiente de reflexión como el ratio entre estas dos presiones (i.e  $R = u_{ref}/u_{inc}$ ), está demostrado que  $R$  se relaciona con la

impedancia acústica,  $Z$ , y la orientación de la onda plana,  $\theta$ , de la siguiente manera

$$R = \frac{Z \cos \theta - \rho c}{Z \cos \theta + \rho c}. \quad (3)$$

En este caso, se puede ver que  $R$  sólo toma valores entre  $-1$  y  $1$ . Si esta expresión es evaluada en  $\theta = 0$  se obtiene el coeficiente de reflexión en la dirección normal,  $R_n$ . En acústica de salas, este parámetro define el comportamiento de la pared. Por ejemplo, para  $R_n = -1$  (i.e.  $Z = 0$ ) se tienen paredes que invierten la fase de la onda reflejada. para  $R_n = 0$  (i.e.  $Z = \rho c$ ) se tienen paredes perfectamente absorbentes, al menos en esta dirección. Finalmente, para  $R_n = 1$  (i.e.  $Z = \infty$ ), las superficies de impedancia se conocen como paredes duras. Típicamente, los materiales reflectantes reales suelen comportarse cerca del rango  $R_n > 0.5$ .

### 3 APROXIMACIÓN NUMÉRICA

A continuación se desarrolla el modelo numérico que se empleará para abordar la formulación analítica del problema acústico presentado en el ítem anterior. Para resolver el problema computacionalmente se utilizarán distintas aproximaciones numéricas para resolver tanto las derivadas temporales como las espaciales de las ecuaciones analíticas (1) y (2).

En primer lugar, el tiempo  $t$  se discretiza de la forma  $\tilde{t} = n\Delta t$  donde  $n$  es el paso temporal y  $\Delta t$  es el incremento en el tiempo del problema numérico a resolver. Por tanto la presión acústica  $u(\mathbf{x}, t)$  se transforma en la cantidad  $u^n(\mathbf{x})$ . Una vez discretizado el tiempo, se pueden calcular las derivadas temporales utilizando cualquier operador de diferencias finitas. Por tanto, las derivadas temporales presentes en las ecuaciones (1) y (2) se aproximan mediante operadores centrados de diferencias finitas, que para la primera derivada tiene la forma

$$\frac{\partial u(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \cong \frac{\partial u(\mathbf{x}, \tilde{t})}{\partial t} = \frac{u^{n+1}(\mathbf{x}) - u^{n-1}(\mathbf{x})}{2\Delta t}, \quad (4)$$

y para la segunda derivada se expresa

$$\frac{\partial^2 u(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} \cong \frac{\partial^2 u(\mathbf{x}, \tilde{t})}{\partial t^2} = \frac{u^{n+1}(\mathbf{x}) + u^{n-1}(\mathbf{x}) - 2u^n(\mathbf{x})}{\Delta t^2}. \quad (5)$$

Ambos operadores tienen una precisión  $\mathcal{O}[(\Delta t)^2]$  [Morse and Ingard \(1986\)](#). Notar que las expresiones anteriores sólo discretizan la parte temporal de presión acústica.

Por otro lado, las posiciones  $\mathbf{x}$  pertenecientes al dominio  $V$  se transforman a las cantidades discretas  $\tilde{\mathbf{x}}_k$ , donde el subíndice  $k$  identifica un nodo del dominio discretizado.

Una vez discretizado espacialmente el dominio, se puede utilizar la aproximación del MPF para obtener numéricamente las derivadas espaciales del sistema dinámico. El MPF fue propuesto por [Oñate et al. \(1996a,b\)](#) inicialmente con el propósito de resolver problemas de transporte convectivo y fluidos. Posteriormente su aplicación se extendió a transporte difusivo advectivo [Oñate and Idelsohn \(1998\)](#) y fluidos incompresibles [Oñate et al. \(2000\)](#). En el contexto de la mecánica de sólidos el MPF ha sido aplicado exitosamente en problemas de elasticidad [Oñate et al. \(2001\)](#), [Perazzo \(2002\)](#), [Perazzo et al. \(2006\)](#), [Martin \(2006\)](#), dinámica de sólidos [Perazzo et al. \(2004\)](#), refinamiento adaptivo [Perazzo et al. \(2007\)](#); [Angulo et al. \(2009\)](#) y recientemente en comportamiento no-lineal de materiales [Pérez-Pozo and Perazzo \(2007\)](#); [Pérez-Pozo et al. \(2009\)](#).

En el MPF, la aproximación local de la función incógnita (presión)  $u^n(\mathbf{x})$  en el subdominio o *nube*  $V_I$  se construye de la siguiente forma

$$u(\mathbf{x}) \cong \hat{u}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^m p_i(\mathbf{x}) \alpha_i^n = \mathbf{p}^T(\mathbf{x}) \alpha^n \quad \forall \mathbf{x} \in V_I \quad (6)$$

siendo  $\alpha^n = [\alpha_1^n \ \alpha_2^n \ \dots \ \alpha_m^n]^T$  un vector de parámetros variables en cada incremento temporal, es decir, válidos únicamente en la respectiva *nube*  $V_I$  y que no dependen de las coordenadas espaciales  $\tilde{\mathbf{x}}$ , y  $\mathbf{p}^T(\mathbf{x})$  la *base de interpolación* que contiene típicamente monomios, ver [Oñate et al. \(1996a,b\)](#) para una descripción mas detallada. Tal como en una interpolación por mínimos cuadrados, la condición de que el número de puntos  $n_{nube}$  en la *nube* sea mayor que el número de términos  $m$  de la *base de interpolación*, impide que la aproximación  $\hat{u}(\mathbf{x})$  se ajuste a todos los valores nodales  $u(\tilde{\mathbf{x}}_j) = u_j^{h,n}$  con  $j = 1, \dots, n_{nube}$ . Para solventar esto se recurre a la minimización de la suma del error en cada punto, ponderado por una función fija como

$$J_I^n = \sum_{j=1}^{n_{nube}} w(\tilde{\mathbf{x}}_I - \tilde{\mathbf{x}}_j) \left( u_j^{h,n} - \mathbf{p}^T(\tilde{\mathbf{x}}_j) \alpha^n \right)^2 \tag{7}$$

cuya forma compacta matricial es

$$J_I^n = (\mathbf{u}^{h,n} - \mathbf{P}(\tilde{\mathbf{x}}_I) \alpha^n)^T \mathbf{W}_I (\mathbf{u}^{h,n} - \mathbf{P}(\tilde{\mathbf{x}}_I) \alpha^n) \tag{8}$$

donde

$$\mathbf{u}^{h,n} = \left[ u_1^{h,n} \ u_2^{h,n} \ \dots \ u_{n_{nubes}}^{h,n} \right]^T, \in Vec(n_{nubes}) \tag{9}$$

$$\mathbf{P}(\tilde{\mathbf{x}}_I) = \begin{bmatrix} p_1(\tilde{\mathbf{x}}_1) & p_2(\tilde{\mathbf{x}}_1) & \dots & p_m(\tilde{\mathbf{x}}_1) \\ p_1(\tilde{\mathbf{x}}_2) & p_2(\tilde{\mathbf{x}}_2) & \dots & p_m(\tilde{\mathbf{x}}_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_1(\tilde{\mathbf{x}}_n) & p_2(\tilde{\mathbf{x}}_n) & \dots & p_m(\tilde{\mathbf{x}}_n) \end{bmatrix}, \in Mat(n_{nubes} \times m) \tag{10}$$

$$\mathbf{W}_I = \begin{bmatrix} w(\tilde{\mathbf{x}}_I - \tilde{\mathbf{x}}_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & w(\tilde{\mathbf{x}}_I - \tilde{\mathbf{x}}_2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & w(\tilde{\mathbf{x}}_I - \tilde{\mathbf{x}}_{n_{nube}}) \end{bmatrix}, \in Mat(n_{nube} \times n_{nube}) \tag{11}$$

siendo  $w(\tilde{\mathbf{x}}_I - \tilde{\mathbf{x}}_j)$  la *función de ponderación* fija de Gauss [Oñate et al. \(1996a,b\)](#); [Oñate \(1996\)](#) dada por

$$w(\tilde{x}_I - \tilde{x}_j) = \begin{cases} \frac{\exp(-(d_j/\lambda)) - \exp(-(r/\lambda))}{1 - \exp(-(r/\lambda))} & \text{si } d_j \leq r \\ 0 & \text{si } d_j > r \end{cases} \tag{12}$$

con  $d_j = \| \tilde{x}_I - \tilde{x}_j \|$ ,  $r = q \max_{\tilde{x}_j \in V_I} \| \tilde{x}_I - \tilde{x}_j \|$  y  $\lambda = \beta r$ . El soporte de esta función es isotropico, circular y esférico en dos y tres dimensiones respectivamente. Una descripción detallada de los efectos de los parámetros  $q$  y  $\beta$  junto con algunos comentarios para su elección se presenta en [Ortega et al. \(2007\)](#). La minimización estándar del funcional (7) respecto del vector  $\alpha^n$  permite obtener

$$\alpha^n = \mathbf{C}_I^{-1} \mathbf{u}^{h,n}, \quad \text{con } \mathbf{C}_I^{-1} = \mathbf{A}_I^{-1} \mathbf{B}_I \tag{13}$$

con  $\mathbf{A}_I = \mathbf{A}(\tilde{\mathbf{x}}_I)$  (matriz de momentos), y  $\mathbf{B}_I = \mathbf{B}(\tilde{\mathbf{x}}_I)$  respectivamente

$$\mathbf{A}_I = \mathbf{P}^T(\tilde{\mathbf{x}}_I) \mathbf{W}_I \mathbf{P}(\tilde{\mathbf{x}}_I) \tag{14}$$

$$[A_I]_{ij} = \sum_{k=1}^{n_{nube}} p_i(\tilde{\mathbf{x}}_k) w(\tilde{\mathbf{x}}_I - \tilde{\mathbf{x}}_k) p_j(\tilde{\mathbf{x}}_k) \quad i, j = 1, \dots, m \tag{15}$$

$$\mathbf{B}_I = \mathbf{P}^T(\tilde{\mathbf{x}}_I)\mathbf{W}_I \quad (16)$$

$$[B_I]_{ij} = p_i(\tilde{\mathbf{x}}_j)w(\tilde{\mathbf{x}}_I - \tilde{\mathbf{x}}_j) \quad i = 1, \dots, m \quad j = 1, \dots, n_{nube} \quad (17)$$

La aproximación final en el MPF se consigue reemplazando la ecuación (13) en (6), con lo que se obtiene

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x}) &\cong \hat{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T(\tilde{\mathbf{x}}_I)\mathbf{C}_I^{-1}\mathbf{u}^{h,n} \\ &= \sum_{i=1}^{n_{nube}} \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m p_k(\tilde{\mathbf{x}}_I) [A_I]_{kj}^{-1} [B_I]_{ji} u_i^{h,n} \quad \forall \tilde{\mathbf{x}} \in V_I \end{aligned} \quad (18)$$

siendo las funciones de forma

$$\begin{aligned} \phi_I^i(\tilde{\mathbf{x}}_I) &= \mathbf{p}^T(\tilde{\mathbf{x}}_I)\mathbf{C}_I^{-1} = \mathbf{p}^T(\tilde{\mathbf{x}}_I)\mathbf{A}_I^{-1}\mathbf{B}_I \\ &= \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m p_k(\tilde{\mathbf{x}}_I) [A_I]_{kj}^{-1} [B_I]_{ji}, \quad i = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (19)$$

Si en la ecuación (7) se elige una función de ponderación igual a la unidad, se obtiene una aproximación por mínimos cuadrados estándar. Se debe notar, de acuerdo con la ecuación (6), que la aproximación se define para cada subdominio de interpolación  $V_I$ . En consecuencia, un punto  $i$  que pertenezca a dos nubes  $V_I$  y  $V_J$  respectivamente, y entre las cuales exista cierto traslape, tendrá asociadas diferentes funciones de forma según si se adscribe a una u otra nube, lo que significa que  $\phi_I^i(\tilde{\mathbf{x}}) \neq \phi_J^i(\tilde{\mathbf{x}})$ . La interpolación resulta ahora multievaluada en  $i$ , por lo que es preciso tomar alguna decisión que limite la elección a un único valor. En el MPF, por ejemplo, esta disyuntiva se resuelve utilizando un procedimiento de colocación puntual Oñate et al. (1996a,b); Oñate (1996). Un estudio más extenso de esta técnica, sus propiedades y características respecto de las aproximaciones utilizadas en otros métodos sin malla, ha sido desarrollada en Oñate et al. (1996a,b); Oñate (1996); Perazzo (2002).

Cabe mencionar que en este tipo de problema las discretizaciones temporales y espaciales están estrechamente relacionadas por el número de Courant,  $S$ . En el caso de una discretización no homogénea, la distancia mínima,  $d_{min}$ , entre todos los nodos será la más restrictiva ya que

$$S = c \frac{\Delta t}{d_{min}} \leq \frac{1}{\sqrt{D}} \quad (20)$$

donde  $D$  es la dimensión del problema. Por último en el caso concreto en el que la discretización es homogénea, directamente la distancia mínima  $d_{min}$  pasa a ser la discretización espacial del problema Courant (1943).

## 4 EJEMPLOS NUMÉRICOS

En esta sección se va a presentar unos ejemplos 1D que servirán para demostrar la idoneidad del modelo presentado en las secciones anteriores. Este experimento consiste en un primer paso hacia la implementación de futuras extensiones a 2 y 3 dimensiones. Además, para simplificar, se ha trabajado con una discretización homogénea, ya que el objetivo principal de este artículo es simplemente mostrar la viabilidad del esquema numérico. Cabe mencionar que el hecho de trabajar con una discretización homogénea y con el número óptimo de Courant nos permite realizar un experimento en

el que se eliminan los errores producidos por la propagación del impulso (i.e. error de dispersión) que, por un lado, afectarían a las medidas experimentales realizadas y no darían información real de la precisión del modelo numérico de impedancia local presentado en la sección anterior.

Para mostrar esto, se ha generado una línea de longitud  $L = 10$  m. La discretización temporal se ha fijado a  $\Delta t = 1/16000$  s mientras que la discretización espacial,  $\Delta x$ , se ha obtenido a través del número mínimo de Courant permitido, ecuación (20). En cuanto al MPF, se utilizan nubes de puntos con  $n_{nube} = 5$  y una base de interpolación con  $m = 3$ . Los parámetros  $q$  y  $\lambda$  de la función de ponderación  $w(\tilde{x}_I - \tilde{x}_j)$  corresponden a 1.1 y 0.25 respectivamente. Como ya se ha dicho, en este experimento simple se ha trabajado con una discretización homogénea, eso quiere decir que todos los nodos de la línea están colocados a la misma distancia. En uno de los extremos, se ha colocado una pared de impedancia local descrita por la ecuación (2) mientras que en el otro extremo se ha fijado una condición de Dirichlet. En la posición  $x_0 = 5$  m se ha colocado una fuente puntual que, para evitar problemas de estabilidad, ha sido aproximada mediante la función *sinc*, que en este caso concreto se ha expresado,

$$\delta(t - t_0) \cong \frac{\sin(2\pi f(t - t_0))}{2\pi f(t - t_0)}, \quad (21)$$

donde  $f$  es la frecuencia umbral de la *sinc* que en este caso vale 4000 Hz. Notar que la fuente se ha emitido un tiempo finito para controlar la energía emitida en la simulación. Por último, notar que el tiempo de simulación ha sido suficientemente corto para evitar rebotes no deseados que afectarían a la medida.

Básicamente, el experimento ha consistido en comparar los espectros de la señal reflejada por la pared de impedancia local con la señal emitida por la fuente para así obtener el coeficiente de reflexión  $R$ . Este coeficiente obtenido a través de la simulación se ha comparado con la ecuación analítica (3), pero en este caso cuando  $\theta = 0$  ya que se trata de un caso 1D.

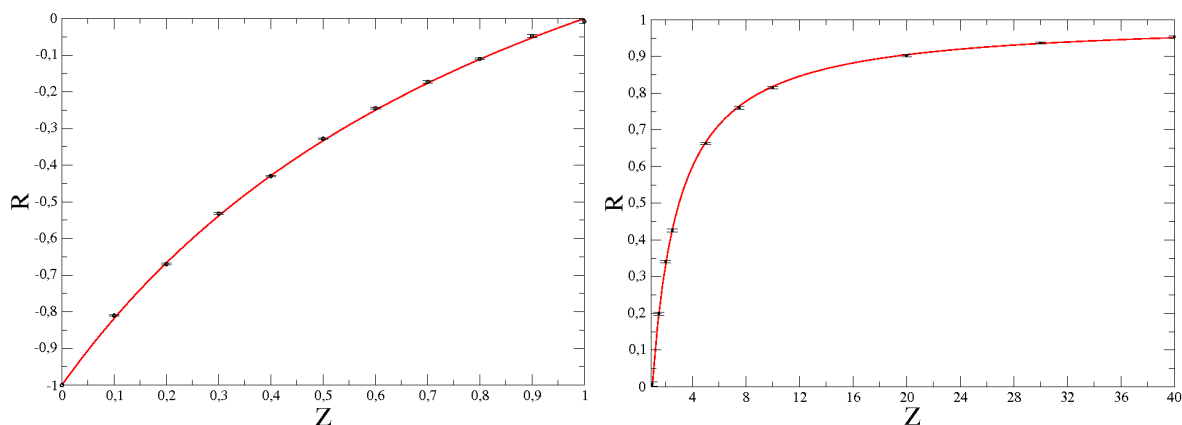


Figure 2: Resultados analíticos (línea roja) y numéricos (puntos y barras) que representan el valor medio y el error respectivamente del coeficiente de reflexión  $R$  (eje  $y$ ) frente a la impedancia normalizada  $Z$  (eje  $x$ ). (Izquierda) En el rango de  $-1 < R < 0$ . (Derecha) En el rango de  $0 < R < 1$ .

En la figura 2 se presentan los resultados obtenidos en los experimentos. La línea continua representa el resultado analítico obtenido con la ecuación (3) mientras que los puntos y las barras de error corresponden al valor medio promediado en frecuencia y su error absoluto asociado. Se han realizado 20 experimentos para distintos valores  $Z$ , tratando de abarcar todo el rango de  $R$  existente. Como se puede observar, la precisión de los resultados es casi exacta. Los errores más grandes se observan en el rango de  $0.2 \leq R \leq 0.5$  donde el error es del orden de  $1/50$ . Por otro lado, en el resto del rango, se puede ver como los errores son mucho menores llegando a precisiones del orden del  $1/1000$ . Esto indica la idoneidad del esquema numérico en este tipo de problemas.



## 5 CONCLUSIONES

En este artículo se ha presentado la formulación analítica de un modelo utilizado en aplicaciones de acústica de salas. Básicamente, este modelo formulado en el dominio temporal consta de dos EDPs, una que consiste en la ecuación de Ondas que describe la propagación del sonido en el aire y otra basada en el modelo conocido como de impedancia local para caracterizar las paredes del entorno cerrado.

Además, se ha presentado un modelo numérico basado en distintas técnicas computacionales. Para aproximar las derivadas temporales, se ha utilizado técnicas de diferencias finitas mientras que para las derivadas espaciales se ha formulado una aproximación mediante un método sin malla.

Finalmente, se ha presentado un experimento 1D para demostrar la viabilidad del método obteniendo unos resultados con precisiones remarcables. Cabe mencionar, que este artículo presenta los primeros pasos hacia un estudio más elaborado del método, tanto para discretizaciones no uniformes como para algoritmos en 2 y 3 dimensiones. En futuros trabajos se espera abordar todos estos problemas de forma exhaustiva y detallada.

### Agradecimientos

Los autores agradecen el auspicio de la Dirección General de Investigación y Postgrado de la Universidad Técnica Federico Santa María a través del proyecto de investigación USM-251014 y al Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería y su red de Aulas CIMNE.

### REFERENCES

- Allen J. and Berkley D. Image method for efficiently simulating small-room acoustics. *J. Acoust. Soc. Am.*, 65:943–950, 1979.
- Angulo A., Pérez-Pozo L., and Perazzo F. A posteriori error estimator and an adaptive technique in meshless finite point method. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 33:1322–1338, 2009.
- Belytschko T., Krongauz Y., Organ D., Fleming M., and Krysl P. Meshless methods: An overview and recent developments. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 139:3–47, 1996.
- Berenger J.P. Three-dimensional perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves. *Journal of Computational Physics*, 127:363–379, 1996.
- Botteldooren D. Acoustical finite-difference time-domain simulation in a quasi-cartesian grid. *Acoustical Society of America*, 95:2313–2319, 1994.
- Botteldooren D. Finite-difference time-domain simulation of low-frequency room acoustic problems. *J. Acoust. Soc. Am.*, 98:3302–3308, 1995.
- Chen Y., Lee J., and Eskandarian A. *Meshless methods in solids mechanics*. Springer, New York, 2006.
- Ciskowski R. and Brebbia C. *Boundary element methods in acoustics*. Computational Mechanics Publications Southampton Boston Co-published with Elsevier Applied Science, 1991.
- Courant R. Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations. *Bull. Am. Math. Soc.*, 49:1–23, 1943.
- Duarte C. and Oden J. An h-p adaptive method using clouds. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 139:237–262, 1996.
- Duyne S.V. and Smith J. The tetrahedral digital waveguide mesh. In *Proc. of the IEEE Workshop on Applications of Signal Processing of Audio and Acoustics*, pages 234–237. 1995.
- Fontana F. and Rocchesso D. Physical modeling of membranes for percussion instruments. *Acta*

- Acustica United with Acustica*, 83:529–542, 1998.
- Fries T. and Matthies H. Clasification and overview of meshfree methods. *Department of Mathematics and Computer Science, Technical University of Braunschweig*, 2003.
- Funkhouser T., Tsingos N., Carlbom I., Elko G., Sondhi M., J. West, Pingali G., Min P., and Ngan A. A beam tracing method for interactive architectural acoustics. *J. Acoust. Soc. Am.*, 115:739–756, 2004.
- Gu Y. Meshfree methods and their comparisons. *International Journal of Computational Methods*, 4:477–515, 2005.
- Hargreaves J. and Cox T. A transient boundary element method model of schroeder diffuser scattering using well mouth impedance. *J. Acoust. Soc. Am.*, 124(5):2942–2951, 2008.
- Kowalczyk K. and van Walstijn M. Multichannel sound reproduction based on Wave Field Synthesis. In *International Symposium on Room Acoustics. Satellite Symposium of the 19th International Congress on Acoustics, Seville*. 2007.
- Krokstad A., Strom S., and Sorsda S. Calculating the acoustical room response by the use of a ray tracing technique. *J. Sound Vibration*, 8:118–125, 1968.
- Kuttruff H. *Room Acoustics*. Spon Press, 2000.
- Li S. and Liu W. *Meshfree particle methods*. Springer, Berlin, 2004.
- Liu G. *Mesh Free Methods: Moving Beyond the Finite Element Method*. CRC press, USA, 2002.
- Martin A. *Análisis y formulación de un estimador del error en el método sin malla de puntos finitos*. Universidad Técnica Federico Santa María, Valparaíso Chile, 2006. Trabajo de Titulo.
- Miklavcic S. and Ericsson J. Practical implementation of the 3d tetrahedral tlm method and visualization of room acoustics. In *Int. Conference on Digital Audio Effects (DAFx04)*, pages 262–267. 2004.
- Morse P. and Ingard K. *Theoretical Acoustics*. Princeton University Press, 1986.
- Murphy D., Kelloniemi A., Mullen J., and Shelley S. Acoustic modeling using the digital waveguide mesh. *IEEE Signal Processing Magazine*, 24:55–66, 2007.
- Ortega E., Oñate E., and Idelsohn S. An improved finite point method for three-dimensional potential flows. *Computational Mechanics*, 40:949–963, 2007.
- Oñate E. On the stabilization of numerical solution for advective-diffusive transport and fluid flow problems. *CIMNE*, 81, 1996.
- Oñate E. and Idelsohn S. A mesh free finite point method for advective-diffusive transport and fluid flow problems. *Computational Mechanics*, 21:283–292, 1998.
- Oñate E., Idelsohn S., Zienkiewicz O., Taylor R., and Sacco C. A stabilized finite point method for analysis of fluid mechanics problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 139:315–346, 1996a.
- Oñate E., Idelsohn S., Zienkiewicz O., and Taylor R. A finite point methods in computational mechanics, application to convective transport and fluid flow. volume 39, pages 3839–3866. 1996b.
- Oñate E., Perazzo F., and J. Miquel. A finite point method for elasticity problems. *Computer and Structures*, 79:2151–2163, 2001.
- Oñate E., Sacco C., and Idelsohn S. A finite point method for incompressible flow problems. *Computer Visual Science*, 3:67–75, 2000.
- Perazzo F. *Una metodología numérica sin malla para la resolución de las ecuaciones de elasticidad mediante el método de puntos finitos*. Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona España, 2002. Tesis Doctoral.
- Perazzo F., Lohner R., and Perez-Pozo L. Adaptive methodology for meshless finite point method. *Advances in Engineering Software*, 22:153–168, 2007.
- Perazzo F., Miquel J., and Oñate E. El método de puntos finitos para problemas de la dinámica de sólidos. *Revista Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería*, 20:235–246, 2004.

- Perazzo F., Oller S., Miquel J., and Oñate E. Avances en el método de puntos finitos para la mecánica de sólidos. *Revista Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería*, 22:153–168, 2006.
- Petrausch S. and Rabenstein R. Simulation of room acoustics via block-based physical modeling with the functional transformation method. In *IEEE Workshop on Applications of Signal Processing to Audio and Acoustics (WASPAA'05)*, pages 195–198. 2005.
- Pérez-Pozo L. and Perazzo F. Non-linear material behaviour analysis using meshless finite point method. In *2nd ECCOMAS Thematic Conference on Meshless Methods*, pages 251–268. Porto, Portugal, 2007.
- Pérez-Pozo L., Perazzo F., and Angulo A. A meshless fpm model for solving nonlinear material problems with proportional loading based on deformation theory. *Advances in Engineering Software*, 40:1148–1154, 2009.
- Savioja L. *Modeling Techniques for Virtual Acoustics*. Ph.D. thesis, Finland, 1999.
- Savioja L., Järvinen A., Melkas K., and Saarinen K. Determination of the low frequency behaviour of an iec listening room. In *Proc. of the Nordic Acoustical Meeting*, pages 55–58. 1996.
- Savioja L. and Välimäki V. Interpolated rectangular 3-d digital waveguide mesh algorithms with frequency warping. *IEEE Trans. on Speech and Audio Processing*, 11:783–790, 2003.
- Schroeder M. Computer models for concert hall acoustics. *Am. J. Phys.*, 41:461–471, 1973.
- Spa C., Garriga A., and Escolano J. Impedance boundary conditions for pseudo-spectral time-domain methods in room acoustics. *Applied Acoustics*, 71:402–410, 2010.
- Wright J. An exact model of acoustic radiation in enclosed spaces. *J. Audio Eng. Soc.*, 43:813–820, 1995.
- Yuan X., Borup D., J.W. Wiskin M.B., Eidens R., and Johnson S. Formulation and validation of berenger's pml absorbing boundary for the fdtd simulation of acoustic scattering. *IEEE Trans. on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control*, 44:816–822, 1997.
- Zhou D. and Huang W.P. The perfectly matched layer boundary condition for scalar finite-difference time-domain method. *IEEE Photonics Technology Letters*, 13(5):454–456, 2001.
- Zienkiewicz O. and Taylor R. *El método de los elementos finitos*, volume 1. Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería, Barcelona España, 2000.