

ANÁLISE NUMÉRICA DE FALHAS EM LAMINADOS USANDO UM CRITÉRIO BASEADO EM FENÔMENOS FÍSICOS

Dalmo I.G. Costa^a, Éder L. Albuquerque^b, Adriana Reis^b, Gustavo Panosso^a e Paulo Sollero^a

^a*Departamento de Projeto Mecânico, Universidade Estadual de Campinas, Rua Mendeleiev, 200 - Cidade Universitária Zeferino Vaz Barão Geraldo - Campinas - Brasil, dalmodj@fem.unicamp.br, <http://www.fem.unicamp.br>*

^b*Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade de Brasília, Campus Universitário Darcy Ribeiro, Asa Norte - Brasília - Brasil, eder@unb.br, <http://www.unb.br>*

Palavras Chave: Materiais Compósitos, Método dos Elementos de Contorno, Critério de Falha.

Resumo. Este artigo apresenta uma análise numérica de falhas de materiais compósitos laminados sob a ação de carregamentos quase estáticos aplicados no plano do laminado através do uso de um critério baseado em fenômenos físicos. As tensões em cada lâmina são calculadas utilizando o método dos elementos de contorno para elasticidade plana. O critério LaRC03 é usado para avaliar se há dano em algum ponto do laminado. Comparações são feitas com o critério Tsai-Wu.

1 INTRODUÇÃO

Os materiais compósitos consistem de um sistema formado a partir de duas ou mais fases, cujas propriedades mecânicas são projetadas para serem superiores àquelas dos constituintes quando considerados isoladamente, comumente uma das fases é descontínua e mais resistente que a outra, o que a faz ser conhecida como reforço. A fase menos resistente que dá continuidade ao material é também conhecida como matriz. Dessa diferença de propriedades e dependendo da disposição do reforço na matriz, muitas das vezes os materiais compósitos possuem um certo grau de anisotropia. Por possuírem propriedades superiores aos materiais comuns, seu uso em aplicações de engenharia cresce cada vez mais, o que demanda um melhor entendimento de seu comportamento. Para aplicações desta natureza os métodos numéricos são largamente utilizados, entre eles está o Método dos Elementos de Contorno (MEC) que é bastante utilizado por possuir, entre outras características, alta taxa de convergência em problemas com altos gradientes. Várias formulações foram desenvolvidas utilizando o MEC, que tem como principal dificultador para esse tipo de aplicação a obtenção de soluções fundamentais tendo em vista a complexidade destas para materiais anisotrópicos. Entre as formulações de elasticidade plana pode-se citar [Sollero e Aliabadi \(1993, 1995\)](#), [Deb \(1996\)](#) e [Albuquerque et al. \(2002, 2004, 2003a,b\)](#).

Para se fazer uma análise estrutural de um material compósito laminado é necessário avaliar as falhas e os respectivos danos causados na estrutura. De maneira geral um elemento estrutural falha quando deixa de realizar sua função adequadamente. Portanto a definição de falha pode variar para cada tipo de aplicação. No caso dos materiais compósitos de acordo com [Agarwal e Broutman \(1990\)](#) a falha pode se dar das seguintes maneiras: quebra das fibras, microtrinçamento da matriz, separação das fibras da matriz (descolamento das fibras) e separação das lâminas do laminado compósito (delaminação). Para prever o estado de tensão no qual as falhas irão ocorrer são utilizados ensaios experimentais que mostram os limites de resistência do material em carregamentos com direções específicas. Com o conhecimento dos valores limites de tensão do material, deve-se aplicar um critério de falha para avaliar se o material falha em um estado de tensão qualquer. Um dos critérios de falha mais utilizados para materiais compósitos é o critério de [Tsai e Wu \(1971\)](#), que apesar da fácil implementação não permite identificar, sozinho, o modo de falha sofrido pelo material. Este critério foi obtido através de uma interpolação polinomial de dados experimentais. Segundo [Hashin \(1980\)](#) um critério de falha ideal para compósitos fibrosos unidirecionais é aquele que consegue distinguir entre os vários modos de falha e modelar cada um separadamente. A identificação de cada modo de falha ainda segundo [Hashin \(1980\)](#) é indispensável para modelagem da propagação de danos. Por exemplo, através de uma análise das tensões do laminado é possível utilizando-se um critério desta natureza, dizer não só que o material falhou mas também como o material falhou, se por ruptura da fibra, trinçamento da matriz, delaminação etc. Os modelos desenvolvidos por [Hashin \(1980\)](#) ficaram conhecidos como critério de Hashin. Por nem sempre se ajustar aos dados experimentais, vários trabalhos sugeriram mudanças, dentre eles o trabalho de [Puck e Schurmann \(1998\)](#) que sugere um plano de ação que leva em conta um aumento da resistência ao cisalhamento da matriz quando existe uma tensão normal transversal de compressão moderada. Em trabalho posterior, [Puck e Schurmann \(2002\)](#) mostraram que este critério (conhecido como critério de Puck) apresenta boa concordância com dados experimentais do trabalho de [Hinton e Soden \(1998\)](#) que ficou conhecido como World-wide failure exercise. Porém, [Davila et al. \(2005\)](#) afirma que a abordagem semi-empírica do critério de Puck usa vários parâmetros não físicos do material e que podem ser difíceis de quantificar sem que se tenha conhecimento aprofundado do material.

Davila et al. (2005) propuseram mudanças no critério de Puck de maneira que este utilizasse apenas parâmetros físicos e que fossem de obtenção mais simples em laboratório. Este último critério foi denominado pelos autores de LaRC03.

Neste trabalho, o critério LaRC03 foi implementado em um programa de elementos de contorno, os resultados foram comparados com o critério de Tsai-Wu.

2 CRITÉRIOS DE FALHA PARA MATERIAIS COMPÓSITOS

Os mecanismos de falha de um material compósito variam bastante com suas propriedades e com o tipo de carregamento. Mesmo que os mecanismos de falha obtidos através de uma análise micromecânica sejam conhecidos, a interação entre os mesmos no caso de um carregamento genérico pode tornar as predições de resistência do material não confiáveis. Diante disso, uma abordagem macromecânica e principalmente fenomenológica é preferível para a análise de falha. De um ponto de vista macroscópico, a resistência de uma lâmina é uma propriedade anisotrópica, isto é, varia com a orientação das fibras. Por isso os critérios de falha procuram relacionar a resistência em uma direção arbitrária com parâmetros básicos do material que são as resistências em direções específicas. Para o caso de compósitos laminados, estes parâmetros são as resistências a compressão e tração nas direções normal e perpendicular a fibra além da resistência ao cisalhamento.

2.1 Critério de Falha LaRC03

O critério de falha LaRC03 é baseado nos conceitos propostos por Hashin (1980) e no plano de fratura proposto por Puck e Schurmann (1998). O ângulo de fratura é calculado usando a tensão efetiva de Mohr-Coulomb.

O critério LaRC03 pode ser resumido em seis índices de falha, cada um baseado em um diferente tipo de falha micro-estrutural. Uma vez que os modos de falha se devem a mecanismos diferentes, estes índices de falha não são relacionados de maneira explícita entre si.

As propriedades que necessitam ser obtidas experimentalmente são E_1 , E_2 , G_{12} , ν_{12} , X^T , X^C , Y^T , Y^C , S^L , $G_{Ic}(L)$ e $G_{IIc}(L)$, onde X^T e X^C são, respectivamente, os limites de resistência longitudinais de tração e compressão, Y^T e Y^C são, respectivamente, os limites de resistência transversais de tração e compressão, S^L é o limite de resistência ao cisalhamento da matriz na direção longitudinal às fibras. As tenacidades à fratura em modo I e II , dadas por $G_{Ic}(L)$ e $G_{IIc}(L)$, respectivamente, podem ser obtidas em ensaios padronizados de mecânica da fratura Davila et al. (2005).

Os índices de falha do critério LaRC03 podem ser divididos nos que prevêm a falha da matriz (trincamento da matriz) e falha da fibra (quebra da fibra) que serão detalhados a seguir.

i. Para o trincamento da matriz, os índices de falha do critério LaRC03 são dados por:

a) Se $\sigma_{22} \geq 0$ (a matriz está sob tração):

$$FI_M = (1 - g) \left(\frac{\sigma_{22}}{Y_{is}^T} \right) + g \left(\frac{\sigma_{22}}{Y_{is}^T} \right)^2 + \left(\frac{\tau_{12}}{S_{is}^L} \right)^2, \quad (1)$$

onde

$$g = \frac{G_{Ic}(L)}{G_{IIc}(L)}$$

para lâminas finas e

$$g = 1.12^2 \frac{\Lambda_{22}^0}{\Lambda_{44}^0} \left(\frac{Y^T}{S^L} \right)^2$$

para os demais tipos de lâminas. O sub-índice "is" significa que é o valor da propriedade no local (*in situ*), que, neste caso, é diferente da obtida experimentalmente (valor da propriedade global). Os valores locais são dados por:

$$Y_{is}^T = \sqrt{\frac{8G_{Ic}(L)}{\pi\Lambda_{22}^0}}$$

e

$$S_{is}^L = \sqrt{\frac{8G_{IIc}(L)}{\pi t \Lambda_{44}^0}},$$

onde

$$\Lambda_{22}^0 = 2 \left(\frac{1}{E_2} - \frac{\nu_{21}^2}{E_1} \right)$$

e

$$\Lambda_{44}^0 = \frac{1}{G_{12}}.$$

b) Se $\sigma_{22} < 0$ (a matriz está sob compressão):

$$FI_M = \left(\frac{\tau_{eff}^{mT}}{S^T} \right)^2 + \left(\frac{\tau_{eff}^{mL}}{S_{is}^L} \right)^2 \quad (2)$$

para $\sigma_{11} < Y^C$ e

$$FI_M = \left(\frac{\tau_{eff}^T}{S^T} \right)^2 + \left(\frac{\tau_{eff}^L}{S_{is}^L} \right)^2 \quad (3)$$

para $\sigma_{11} \geq Y^C$,
onde

$$\begin{cases} \tau_{eff}^T = -\sigma_{22} \cos \alpha (\sin \alpha - \eta^T \cos \alpha) \\ \tau_{eff}^L = \cos \alpha (|\tau_{12}| + \eta^L \sigma_{22} \cos \alpha) \end{cases}$$

ii. Para a quebra da fibra, os índices de falha do critério LaRC03 são dados por:

a) Se $\sigma_{11} \geq 0$ (a fibra está sob tração):

$$FI_F = \frac{\varepsilon_{11}}{\varepsilon_1^T}, \quad (4)$$

onde ε_{11} é a deformação do material na direção da fibra e ε_1^T é a deformação em que ocorre a falha do material quando o mesmo é solicitado na direção da fibra.

b) Se $\sigma_{11} < 0$ (a fibra está sob compressão):

$$FI_F = \left(\frac{|\tau_{12}|^m + \eta^L \sigma_{22}^m}{S_{is}^L} \right) \quad (5)$$

para $\sigma_{22}^m < 0$ e

$$FI_F = (1 - g) \left(\frac{\sigma_{22}^m}{Y_{is}^T} \right) + g \left(\frac{\sigma_{22}^m}{Y_{is}^T} \right)^2 + \left(\frac{\tau_{12}^m}{S_{is}^L} \right)^2 \quad (6)$$

para $\sigma_{22}^m \geq 0$, onde

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^m &= \cos^2 \phi \sigma_{11} + \sin^2 \phi \sigma_{22} + 2 \sin \phi \cos \phi \tau_{12} \\ \sigma_{22}^m &= \sin^2 \phi \sigma_{11} + \cos^2 \phi \sigma_{22} - 2 \sin \phi \cos \phi \tau_{12} \\ \tau_{12}^m &= -\sin \phi \cos \phi \sigma_{11} + \sin \phi \cos \phi \sigma_{22} + (\cos^2 \phi - \sin^2 \phi) \tau_{12} \end{aligned}$$

são as tensões que atuam nas fibras que encontram-se desalinhadas devido a flambagem localizada. O ângulo ϕ é dado por:

$$\phi = \frac{|\tau_{12}| + (G_{12} - X^C)\phi^C}{G_{12} + \sigma_{11} - \sigma_{22}}$$

e

$$\phi^C = \tan^{-1} \left(\frac{1 - \sqrt{1 - 4(S_{is}^L/X^C + \eta^L)(S_{is}^L/X^C)}}{2(S_{is}^L/X^C + \eta^L)} \right)$$

O limite de resistência ao cisalhamento da matriz na direção transversal às fibras é dado por:

$$S^T = Y^C \cos \alpha_0 \left(\sin \alpha_0 + \frac{\cos \alpha_0}{\tan 2\alpha_0} \right).$$

As demais variáveis são:

$$\begin{aligned} \eta^T &= \frac{-1}{\tan 2\alpha_0}, \\ \eta^L &= \frac{-S_{is}^L \cos 2\alpha_0}{Y^C \cos^2 \alpha_0} \end{aligned}$$

e

$$\alpha_0 = 53^\circ.$$

2.2 Critério de Falha Tsai-Wu

Neste trabalho, o critério de falha de Tsai-Wu será utilizado para prever a falha em cada uma das lâminas do material compósito para posterior comparação com a previsão de falha do critério LaRC03. O critério de falha de Tsai-Wu para um estado plano de tensão é dado por:

$$\frac{\sigma_{11}^2}{X^T X^C} + \frac{\sigma_{22}^2}{Y^T Y^C} + \frac{\tau_{12}^2}{S^L^2} - \frac{\sigma_{11} \sigma_{22}}{\sqrt{X^T X^C Y^T Y^C}} + \left(\frac{1}{X^T} - \frac{1}{X^C} \right) \sigma_{11} + \left(\frac{1}{Y^T} - \frac{1}{Y^C} \right) \sigma_{22} = 1 \quad (7)$$

O critério de Tsai-Wu não é um critério de falha baseado em fenômenos físicos. Por isso ele pode prever a ocorrência do dano mas não consegue distinguir entre os diferentes modos de falha.

3 EQUAÇÕES CONSTITUTIVAS DA LÂMINA

Em muitas aplicações, materiais compósitos são usados na forma de laminados de pequena espessura solicitados no próprio plano do laminado. Desta forma, lâminas de compósitos podem ser considerados como estando em estado plano de tensões. Além disso se apenas uma lâmina é considerada, na qual as fibras estão alinhadas em apenas uma direção, esta é ortotrópica e a relação tensão-deformação é dada por:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 2Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{Bmatrix} \quad (8)$$

na qual Q_{ij} são os componentes da matriz de rigidez, que são:

$$Q_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad (9)$$

$$Q_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad (10)$$

$$Q_{66} = G_{12}, \quad (11)$$

$$Q_{12} = Q_{21} = \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad (12)$$

E_1 e E_2 são os módulos de elasticidade nas direções longitudinal e transversal, respectivamente, G_{12} é o módulo de cisalhamento no plano da lâmina e ν_{12} é o coeficiente de Poisson.

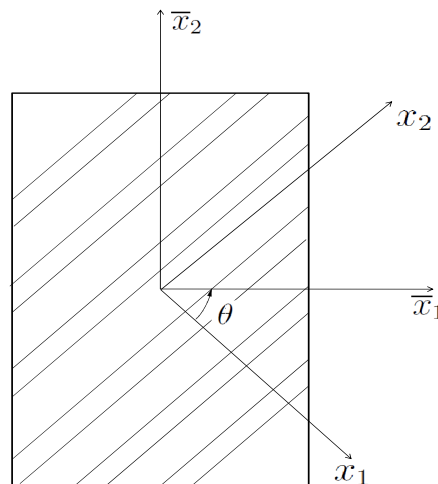


Figura 1: Sistemas de referência da lâmina e do laminado

Se os eixos principais da lâmina (x_1, x_2) não coincidem com os eixos do laminado (\bar{x}_1, \bar{x}_2) ,

mostrados na Figura (1), a equação constitutiva dada pela equação (8) é escrita então como:

$$\begin{Bmatrix} \sigma'_{11} \\ \sigma'_{22} \\ \sigma'_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon'_{11} \\ \varepsilon'_{22} \\ \varepsilon'_{12} \end{Bmatrix} \quad (13)$$

na qual σ'_{ij} e ε'_{ij} são os tensores de tensão e deformação respectivamente, escritos no sistema referencial do laminado (\bar{x}_1, \bar{x}_2) , σ_{ij} e ε_{ij} são os tensores de tensão e deformação escritos no sistema referencial da lâmina (x_1, x_2) . \bar{Q}_{11} é matriz de rigidez dada por:

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{11} &= m^4 Q_{11} + n^4 Q_{22} + 2m^2 n^2 Q_{12} + 4m^2 n^2 Q_{66} \\ \bar{Q}_{22} &= n^4 Q_{11} + m^4 Q_{22} + 2m^2 n^2 Q_{12} + 4m^2 n^2 Q_{66} \\ \bar{Q}_{12} &= m^2 n^2 Q_{11} + m^2 n^2 Q_{22} + (m^4 + n^4) Q_{12} - 4m^2 n^2 Q_{66} \\ \bar{Q}_{16} &= m^3 n Q_{11} - m n^3 Q_{22} - m n (m^2 - n^2) Q_{12} - 2m n (m^2 - n^2) Q_{66} \\ \bar{Q}_{26} &= m n^3 Q_{11} - m^3 n Q_{22} + m n (m^2 - n^2) Q_{12} + 2m n (m^2 - n^2) Q_{66} \\ \bar{Q}_{66} &= m^2 n^2 Q_{11} - m^2 n^2 Q_{22} - 2m^2 n^2 Q_{12} + (m^2 - n^2)^2 Q_{66} \end{aligned} \quad (14)$$

onde $m = \cos \theta$ e $n = \sin \theta$ sendo θ o ângulo entre os dois sistemas de referência, de acordo com a Figura (1).

O tensor de tensões pode ser escrito em termos de funções $F(x_1, x_2)$ chamadas funções tensão de Airy (Lekhnitskii (1963)) dadas por

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= F_{,22} + U \\ \sigma_{22} &= F_{,11} + U \\ \sigma_{12} &= -F_{,12} \end{aligned} \quad (15)$$

nas quais U é uma função potencial.

Tendo em vista que as tensões variam através da espessura do laminado, é mais conveniente trabalhar com um sistema de forças e momentos equivalentes, ao invés de trabalhar com tensões. Uma densidade de força distribuída através da espessura h do laminado pode ser obtida através da integração dada por:

$$N_{ij} = \int_{h/2}^{-h/2} \sigma'_{ij} dx_3 \quad (16)$$

Substituindo a equação (13) na equação (16) e considerando as deformações ε'_{ij} contantes na espessura h do laminado, pode-se escrever:

$$\begin{Bmatrix} N_{11} \\ N_{22} \\ N_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon'_{11} \\ \varepsilon'_{22} \\ \varepsilon'_{12} \end{Bmatrix} \quad (17)$$

na qual,

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^n (\bar{Q}_{ij})_k (z_k - z_{k-1}) \quad (18)$$

é a matriz de extensão, z_k é a distância das interfaces de cada lâmina para o plano de referência (no caso de laminados simétricos, o plano médio) e n é o número de lâminas. A equação de equilíbrio para o laminado na ausência de forças de corpo pode ser escrita como:

$$N_{ij,j} = 0 \quad (19)$$

A equação de compatibilidade em termos das deformações é dada por:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^2} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} \quad (20)$$

e a condição de equilíbrio é satisfeita tomando os termos derivados das funções de tensão de Airy $F(x_1, x_2)$ como:

$$N_{11} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2}, \quad N_{22} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2}, \quad N_{12} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} \quad (21)$$

Combinando as equações (17), (20) e (21), a equação governante de problemas 2D de elasticidade anisotrópica pode ser obtida:

$$A_{22} \frac{\partial^4 F}{\partial x_1^4} - 2A_{26} \frac{\partial^4 F}{\partial x_1^3 \partial x_2} + (2A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^4 F}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} - A_{16} \frac{\partial^4 F}{\partial x_2^3} + A_{66} \frac{\partial^4 F}{\partial x_2^4} = 0 \quad (22)$$

Introduzindo o operador $D_s (s = 1, 4)$

$$D_s = \frac{\partial}{\partial x_2} - \mu_s \frac{\partial}{\partial x_1} \quad (23)$$

A equação (22) se torna:

$$D_1 D_2 D_3 D_4 F = 0 \quad (24)$$

e μ_s são as quatro raízes da equação característica:

$$[A_{22} - 2\mu A_{26} + (2A_{12} + A_{66})\mu^2 - 2A_{16}\mu^3 + A_{11}\mu^4] \frac{d^4 F}{dz^4} = 0 \quad (25)$$

Para se obter uma solução para a função de tensão, o termo entre colchetes deve ser zero. Lekhnitskii (1968) mostrou que, para um material anisotrópico, essas raízes são diferentes entre si e devem ser imaginárias puras ou complexas e podem ser denotadas por:

$$\mu_1 = \alpha_1 + i\beta_1, \quad \mu_2 = \alpha_2 + i\beta_2, \quad \mu_3 = \bar{\mu}_1, \quad \mu_4 = \bar{\mu}_2 \quad (26)$$

onde α_j e β_j ($j = 1, 2$), são constantes reais, $i = \sqrt{-1}$. Criando-se a variável:

$$z_k = x_1 + \mu_k x_2 \quad k = 1, 2 \quad (27)$$

tem-se que

$$D_k = \frac{\partial}{\partial x_2} - \mu_k \frac{\partial}{\partial x_1} = \frac{d}{dz_k} \quad (28)$$

Exigindo que a função tensão seja real, tem-se:

$$F(x_1, x_2) = 2Re[F_1(z_1) + F_2(z_2)] \quad (29)$$

Introduzindo a notação

$$\frac{F_k(z_k)}{dz_k} = \Psi_k(z_k) \quad (30)$$

e substituindo a equação (29) na equação (15), obtém-se as componentes de tensão

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= 2Re[\mu_1^2 \Psi_1^{(1)}(z_1) + \mu_2^2 \Psi_2^{(1)}(z_2)] \\ \sigma_{22} &= 2Re[\Psi_1^{(1)}(z_1) + \Psi_2^{(1)}(z_2)] \\ \sigma_{12} &= -2Re[\mu_1 \Psi_1^{(1)}(z_1) + \mu_2 \Psi_2^{(1)}(z_2)] \end{aligned} \quad (31)$$

onde $\Psi_k^{(1)}$ representa a primeira derivada de Ψ_k .

4 MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO PARA MATERIAIS COMPÓSITOS

De acordo com Brebbia e Dominguez (1989), utilizando a segunda identidade de Green, a equação de equilíbrio pode ser transformada em uma equação integral dada por:

$$c_{jk} u_j(P) + \int_S T_{jk}(P, Q) u_j(Q) ds(Q) = \int_S U_{jk}(P, Q) t_j(Q) ds(Q) \quad (32)$$

na qual u_j é o vetor de deslocamentos, t_j é o vetor de forças de superfície dado por:

$$t_i = N_{ij} n_j \quad (33)$$

n_j é um vetor unitário normal ao contorno no ponto campo P , U_{ij} e T_{ij} são as soluções fundamentais de deslocamento e de forças de superfície, respectivamente, para um material anisotrópico em estado de tensão plana. $P(x'_1, x'_2)$ e $Q(x_1, x_2)$ são os pontos campo e pontos fonte, respectivamente. A constante c_{jk} depende da geometria do contorno no ponto P , se este é suave ou não.

Em termos de variáveis complexas generalizadas:

$$\begin{aligned} z_1 &= (x'_1 - x_1) + \mu_1(x'_2 - x_2) \\ z_2 &= (x'_1 - x_1) + \mu_2(x'_2 - x_2) \end{aligned} \quad (34)$$

As soluções fundamentais para deslocamentos e forças de superfície, respectivamente, são as seguintes:

$$U_{jk} = 2Re[r_{k1} K_{j1} \ln z_1 + r_{k2} K_{j2} \ln z_2] \quad (35)$$

$$T_{j1} = 2n_1 Re \left[\mu_1^2 \frac{K_{j1}}{z_1} + \mu_2^2 \frac{K_{j2}}{z_2} \right] - 2n_2 Re \left[\mu_1 \frac{K_{j1}}{z_1} + \mu_2 \frac{K_{j2}}{z_2} \right] \quad (36)$$

$$T_{j2} = -2n_1 Re \left[\mu_1^2 \frac{K_{j1}}{z_1} + \mu_2^2 \frac{K_{j2}}{z_2} \right] + 2n_2 Re \left[\mu_1 \frac{K_{j1}}{z_1} + \mu_2 \frac{K_{j2}}{z_2} \right] \quad (37)$$

n_j são as componentes da normal apontando para fora do domínio em Q em relação ao sistema de coordenadas (x_1, x_2) .

As constantes r_{kj} são:

$$\begin{aligned} r_{ij} &= A_{11}\mu_j^2 + A_{12} - A_{16}\mu_j \\ r_{ij} &= A_{12}\mu_j^2 + \frac{A_{22}}{\mu_j} - A_{26} \end{aligned} \quad (38)$$

e K_{jk} são as constantes complexas que podem ser obtidas do seguinte conjunto de equações:

$$\begin{aligned} K_{j1} - \bar{K}_{j1} + K_{j2} - \bar{K}_{j2} &= \frac{\delta_{j2}}{2\pi i} \\ \mu_1 K_{j1} - \bar{\mu}_1 \bar{K}_{j1} - \mu_2 K_{j2} - \bar{\mu}_2 \bar{K}_{j2} &= -\frac{\delta_{j1}}{2\pi i} \\ r_{11} K_{j1} - \bar{r}_{11} \bar{K}_{j1} + r_{21} K_{j2} - \bar{r}_{21} \bar{K}_{j2} &= 0 \\ r_{12} K_{j1} - \bar{r}_{12} \bar{K}_{j1} + r_{22} K_{j2} - \bar{r}_{22} \bar{K}_{j2} &= 0 \end{aligned} \quad (39)$$

δ_{jk} é o delta de Kronecker.

Para calcular a densidade de forças a partir dos já calculados deslocamentos e forças de superfície, é necessário considerar o sistema de coordenadas local (ξ_1, ξ_2) . Fazendo com que m_{1k} seja o vetor unitário na direção tangencial à superfície e m_{2k} o vetor na direção normal à superfície. Tendo $u_j, t_j, \varepsilon_{jk}$, e N_{jk} os deslocamentos, forças de superfície, deformações e densidade de forças, respectivamente, em coordenadas locais. O deslocamento na direção tangencial é:

$$\bar{u}_j(\xi) = \phi^c(\xi) u_j^c m_{1k} \quad (40)$$

e a deformação na direção tangencial é obtida pela expressão:

$$\bar{\varepsilon}_{11}(\xi) = \frac{d\phi^c(\xi)}{d\xi} u_j^c m_{1k} \frac{1}{J(\xi)} \quad (41)$$

Em seguida, utilizando transformação de coordenadas, pode-se calcular as deformações ε'_{ij} no sistema de coordenadas global (sistema do laminado).

Em cada uma das lâminas do laminado a deformação deverá ser igual, o mesmo não valendo para as tensões que variam de acordo com a sua orientação. Após o cálculo das deformações no laminado, a tensão em cada lâmina pode ser calculada por:

$$\left\{ \begin{array}{c} \sigma'_{11} \\ \sigma'_{22} \\ \sigma'_{12} \end{array} \right\}_{(k)} = [\bar{Q}]_{(k)} \left\{ \begin{array}{c} \varepsilon'_{11} \\ \varepsilon'_{22} \\ \varepsilon'_{12} \end{array} \right\} \quad (42)$$

Finalmente pela transformação de coordenadas, os componentes de tensão no sistema de coordenadas de cada lâmina (x_1, x_2) pode ser calculado para cada lâmina k .

5 ANÁLISE NUMÉRICA

Para esta análise numérica será considerado um laminado simétrico contendo quatro lâminas $[20/50]_S$ com espessura $t = 0.002$ m cada, cujo material é o Boro-Epoxi. O laminado está

submetido ao carregamento indicado na Figura (2) com valores iguais a $N1 = 50$ kN e $N2 = 100$ kN. Para a análise, o contorno do laminado foi discretizado em 59 elementos quadráticos descontínuos, sendo 45 no contorno externo e 14 no furo central. Os módulos de elasticidade transversal e longitudinal, E_1 e E_2 , o módulo de cisalhamento G_{12} , coeficiente de poisson ν_{12} , além dos limites de resistência a tração e compressão longitudinal, X_T e X_C , limites de resistência a tração e compressão transversal, Y_T e Y_C , e finalmente o limite de cisalhamento S estão dispostos na Tabela (1).

E_1 (GPa)	E_2 (GPa)	G_{12} (GPa)	ν_{12}	X_T (MPa)	Y_T (MPa)	X_C (MPa)	Y_C (MPa)	S (MPa)
204	18,5	5,59	0,23	1260	61	2500	202	67

Tabela 1: Propriedades Mecânicas e limites de resistência da lâmina de Boro-Epoxi

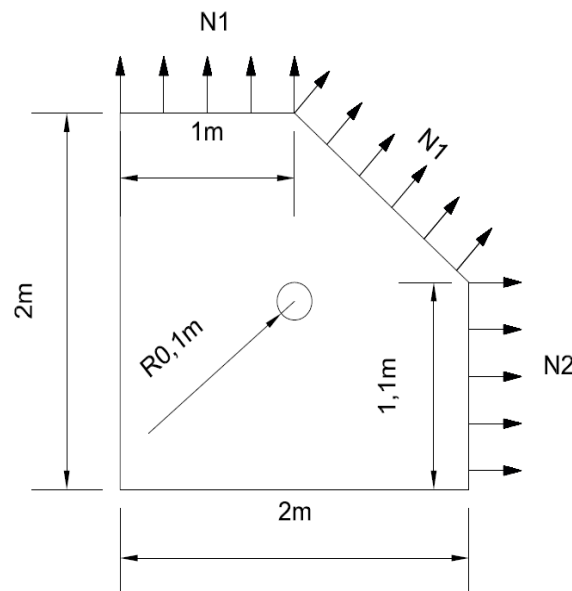


Figura 2: Geometria e carregamento do problema proposto

Utilizando o MEC calculou-se as tensões em cada uma das lâminas. A partir destes resultados os critérios de falha foram aplicados. A possibilidade de falha é verificada utilizando-se os dois critérios de falha, Tsai-Wu e LaRC03. A comparação visual pode ser feita nas Figuras (3) e (4).

Pode-se notar que ambos os critérios indicaram as mesmas regiões como as mais prováveis para a ocorrência de falha para a lâmina de número 2 (fibras a 50 graus). No caso da lâmina de número 1 (fibras a 20 graus) os dois critérios tiveram uma diferença de resultados na previsão destas regiões. Além disso para as duas lâminas, enquanto o critério Tsai-Wu indica que há ocorrência de falha (índice de falha maior que 1) em algumas regiões, o critério LaRC03 não indica a possibilidade de falha em nenhum ponto da lâmina como é possível observar na Tabela (2) que mostra os valores máximos e mínimos dos índices de falha para as 4 lâminas obtidos a partir dos dois critérios.

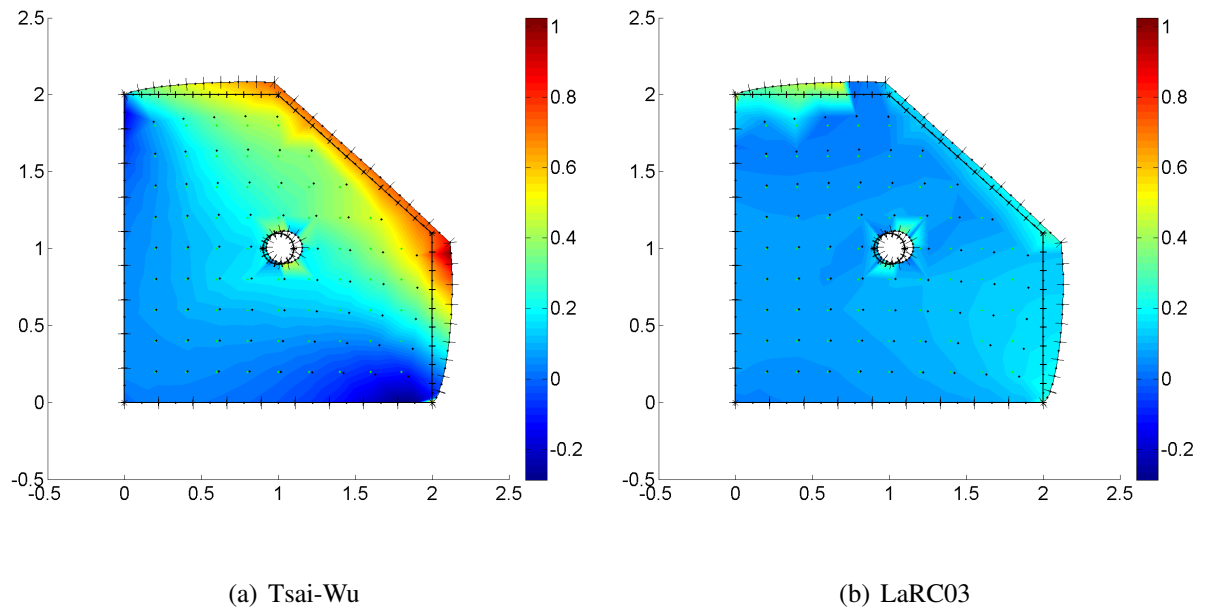


Figura 3: Índice de falha para a lâmina número 1

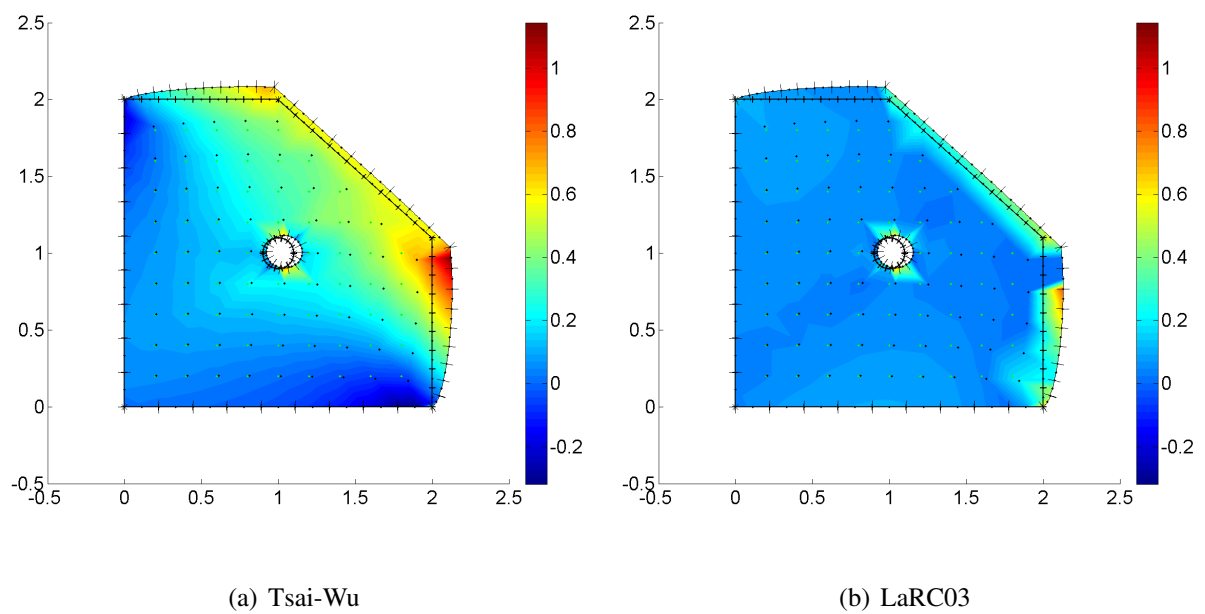


Figura 4: Índice de falha para a lâmina de número 2

número da lâmina	LaRC03		Tsai-Wu	
	min	max	min	max
1	0,0032	0,1726	-0,2874	1,0258
2	0,0025	0,8413	-0,3185	1,1436
3	0,0025	0,8413	-0,3185	1,1436
4	0,0032	0,1726	-0,2874	1,0258

Tabela 2: Valores máximos e mínimos dos índices de falha no laminado

Tendo em vista que o critério LaRC03 é um critério baseado em fenômenos físicos e que este foi desenvolvido com base em seis diferentes tipos de falha micro-estrutural, é possível visualizar também o mecanismo de falha previsto para um estado de tensões arbitrário. Para tal atribuiu-se um número representativo para cada modo de falha e a visualização em uma escala de cores é mostrada na Figura (5). A correspondência é dada abaixo.

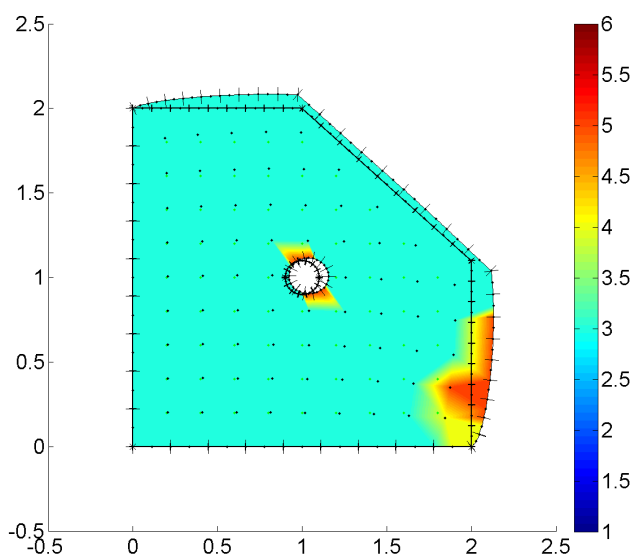


Figura 5: Representação dos modos de falha na lâmina 2 previstos pelo critério LaRC03

- Modo de falha = 1: Matriz, trincamento da matriz com compressão transversal.
- Modo de falha = 2: Matriz, trincamento da matriz com tração transversal.
- Modo de falha = 3: Fibra, quebra da fibra sob tração longitudinal.
- Modo de falha = 4: Fibra, dobramento da fibra sob compressão longitudinal e compressão transversal.
- Modo de falha = 5: Fibra, dobramento da fibra sob compressão longitudinal e tração transversal.
- Modo de falha = 6: Matriz, sob compressão biaxial.

6 CONCLUSÕES

Este artigo mostrou a comparação entre as predições de dois critérios de falha para materiais compósitos, um obtido através de uma interpolação polinomial dos dados de falha, Tsai-Wu e outro baseado em fenômenos físicos. Quanto à predição da falha, para este caso, foi possível verificar diferenças sensíveis entre os resultados. Utilizando o critério LaRC03 foi possível também, observar as predições dos modos de falha que estão coerentes com o carregamento ao qual está submetido o laminado. De posse destas informações uma posterior análise de propagação de danos é possível, levando-se em conta as mudanças de propriedades do laminado causadas por cada modo de falha.

REFERÊNCIAS

- Agarwal B. e Broutman L. *Analysis of performance of fiber composites*, volume II. John Wiley and Sons Inc., 1990.
- Albuquerque E., Sollero P., e Aliabadi M. The boundary element method applied to time dependent problems in anisotropic material. *International Journal of Solid and Structures*, 39:1405–1422, 2002.
- Albuquerque E., Sollero P., e Aliabadi M. Dual boundary method for anisotropic dynamic fracture mechanics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 59:1187–1205, 2004.
- Albuquerque E., Sollero P., e Fedelinski P. Dual reciprocity boundary element method in laplace domain applied to anisotropic dynamic crack problems. *Computers and Structures*, 81:1703–1713, 2003a.
- Albuquerque E., Sollero P., e Fedelinski P. Free vibration analysis of anisotropic material structures using the boundary element method. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 27:977–985, 2003b.
- Brebbia C. e Dominguez J. *Boundary Elements: An Introductory Course*, volume I. Computational Mechanics Publications, 1989.
- Davila C., Camanho P., e Rose C. Failure criteria for frp laminates. *Journal of Composite Material*, 39:323–345, 2005.
- Deb A. Boundary element analysis of anisotropic bodies under thermomechanical body force loadings. *Computers and Structures*, 58:715–726, 1996.
- Hashin Z. Failure criteria for unidirectional fiber composites. *Journal of Applied Mechanics*, 47:329–334, 1980.
- Hinton M. e Soden P. Prediction failure in composite laminates: The background to the exercise. *Composite Science and Technology*, 58:1001–1010, 1998.
- Lekhnitskii S. *Theory of Elasticity of an Anisotropic Elastic Body*, volume I. Holden-Day, 1963.
- Lekhnitskii S. *Anisotropic Plates*, volume I. Gordon and Breach, 1968.
- Puck A. e Schurmann H. Failure analysis of frp laminates by means of physically based phenomenological models. *Composites Science and Technology*, 58:1045–1067, 1998.
- Puck A. e Schurmann H. Failure analysis of frp laminates by means of physically based phenomenological models. *Composites Science and Technology*, 62:1633–1662, 2002.
- Sollero P. e Aliabadi M. Fracture mechanics analysis of anisotropic plates by the boundary element method. *International Journal of Fracture*, 64:269–284, 1993.
- Sollero P. e Aliabadi M. Anisotropic analysis of composite laminates using the dual boundary

- element method. *Composite Structures*, 31:229–234, 1995.
- Tsai S. e Wu E. A general theory of strength test for anisotropic materials. *Journal of Composite Materials*, 5:58–80, 1971.