

ANÁLISIS NUMÉRICO DE LOCALIZACIÓN EN MEDIOS POROSOS REGULARIZADO CON TEORÍA DE GRADIENTES

Javier L. Mroginski^{a,c}, Guillermo Etse^{b,c} y Sonia M. Vrech^{b,c}

^a*Departamento de Mecánica Aplicada, Universidad Nacional del Nordeste.
Av. Las Heras 727, Resistencia, Chaco, Argentina.
javierm@ing.unne.edu.ar*

^b*Centro de Métodos Numéricos y Computacionales en Ingeniería (CEMNCI),
Universidad Nacional de Tucumán,
Av. Independencia 1800, San Miguel de Tucumán, Tucumán, Argentina.
svrech@herrera.unt.edu.ar, getse@herrera.unt.edu.ar*

^c*Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas, CONICET*

Palabras Clave: Localización, Teoría de gradientes, Propagación de ondas, Medios porosos, Continuidad C_1

Resumen. Es ampliamente conocido que el problema de localización de deformaciones en materiales cohesivos-friccionales se encuentra íntimamente relacionado al comportamiento de ablandamiento e inestabilidad de los materiales estructurales. En esta situación se observa una dependencia patológica de las soluciones numéricas del Método de Elementos Finitos respecto de la discretización espacial adoptada. Por tal motivo, la modelación numérica requiere de formulaciones constitutivas adecuadas con el fin de obtener una descripción objetiva del complejo proceso de degradación de su resistencia bajo cargas crecientes. En otras palabras, estas teorías constitutivas enriquecidas deben ser capaces de describir comportamientos no locales de deformación. En este trabajo, se presenta una formulación elastoplástica dependiente de gradientes termodinámica consistente para el modelado de medios porosos continuos y sus correspondientes ecuaciones discretas requeridas para la implementación numérica del modelo empleando el Método de Elementos Finitos. Asimismo, el modelo material empleado corresponde al Cam Clay Modificado para suelos saturados. Este modelo constitutivo no local presenta tantas longitudes internas características como variables no locales internas posee. Las variables internas adoptadas son la deformación volumétrica del esqueleto sólido y la porosidad plástica, que dependen del estado tensional y de la presión de poro actuante, respectivamente. Por otro lado, debido a la presencia del laplaciano del multiplicador plástico en las ecuaciones de gobierno, para cumplir la condición de convergencia, se requiere la continuidad del gradiente del multiplicador plástico en el contorno de cada elemento. Esto se consigue discretizando al multiplicador plástico con funciones de forma de la clase C_1 . Los resultados numéricos muestran la propiedad regularizadora que tiene la teoría de gradientes para suprimir la condición de localización para diferentes estados de confinamiento y presiones de poro actuantes.

1. INTRODUCCIÓN

Es ampliamente conocido que los problemas de localización del campo de deformaciones en continuos sólidos y medios porosos están íntimamente relacionados con el comportamiento mecánico de ablandamiento del material y se percibe una dependencia de la solución numérica respecto de la discretización empleada en elementos finitos, conduciendo a la pérdida de objetividad en la solución (Pamin, 1994; Svedberg, 1999; Larsson, 1999; Vrech, 2007). Por tal motivo, la modelación matemática del proceso de deformación en medios porosos requiere de formulaciones constitutivas adecuadas con el fin de obtener una descripción objetiva del complejo proceso de degradación de su resistencia bajo cargas crecientes. En otras palabras, estas teorías constitutivas enriquecidas deben ser capaces de describir comportamientos no locales de deformación (Mroginski et al., 2010b).

Los desarrollos teóricos están enmarcados en las leyes de la Termodinámica para medios porosos consiguiendo así una formulación consistente sin términos de disipación de energía espurios. La clave para conseguir esta consistencia termodinámica surge de considerar al medio poroso como un sistema continuo termodinámicamente abierto (Coussy, 1995). En consecuencia, se pierde el carácter de mezcla microscópica que otros autores emplean para caracterizar al medio (Gawin et al., 1995; Lewis y Schrefler, 1998; Di Rado et al., 2009; Mroginski et al., 2010a).

En el presente trabajo, se presenta una formulación elastoplástica dependiente de gradientes superiores de deformación termodinámicamente consistente para el modelado de medios porosos continuos originalmente propuesto por los autores en Mroginski et al. (2010b). Asimismo, se presentan las expresiones discretas empleadas en el Método de Elementos Finitos (MEF) y resultados numéricos de dicha implementación. Por otro lado, debido a la presencia del laplaciano del multiplicador plástico en las ecuaciones de gobierno, para cumplir la condición de convergencia, se requiere continuidad del gradiente del multiplicador plástico en el contorno de cada elemento. Esto se consigue discretizando al multiplicador plástico con funciones de forma de la clase C_1 .

El modelo material empleado corresponde al Cam Clay Modificado (CCM) para suelos saturados, internacionalmente aceptado por la comunidad científica. Este modelo constitutivo no local presenta tantas longitudes internas características como variables no locales internas posee. Las variables internas adoptadas son la deformación volumétrica del esqueleto sólido y la porosidad plástica, que dependen del estado tensional y de la presión de poro actuante, respectivamente.

En la sección siguiente se resumen los conceptos fundamentales de la teoría de poroplasticidad termodinámicamente consistente basada en gradientes superiores de deformación originalmente propuesta por los autores en Mroginski et al. (2010b), donde se arriva a las expresiones diferenciales de la relación constitutiva no local que luego serán discretizadas por el MEF.

A continuación se describe el criterio material CCM para medios porosos saturados. Se propone una ley de no asociatividad para disminuir la sobrestimación del coeficiente de compresibilidad volumétrica K_0 que a menudo se presenta en los modelos de estado crítico convencional (Gens y Potts, 1982; Balmaceda, 1991). Así como también, se propone una ley de evolución de las variables internas locales y no locales termodinámicamente consistente que derivan del potencial plástico de energía libre.

En la cuarta sección se presenta la implementación numérica empleando el MEF del problema de valores de borde planteado en la primer sección y se propone un elemento finito que cumple las condiciones de continuidad C_1 requeridas en el funcional que gobierna el problema.

En la quinta sección se presentan los resultados numéricos del modelo. Para ello se adoptan dos problemas típicos en la Mecánica de medios porosos: el problema de consolidación unidimensional y el análisis de localización bidimensional.

Por último se presentan las conclusiones más relevantes del presente trabajo.

2. PLASTICIDAD NO LOCAL DE GRADIENTE EN MEDIOS POROSOS

En esta sección se describen los conceptos básicos de la teoría no local basada en gradientes superiores de deformación para medios porosos propuesto en (Mroginski et al., 2010b).

2.1. Disipación plástica en medios porosos

En base a estudios desarrollados por Coussy (1995), el estado de un sistema poroso continuo queda perfectamente definido por la temperatura absoluta θ , el tensor de deformaciones elásticas $\boldsymbol{\varepsilon}^e$, la variación del contenido elástico de masa de fluido m^e y las variables internas q_α , con $\alpha = s, p$ para la fase sólida y/o porosa, respectivamente. Para que el sistema sea capaz de describir efectos no locales tanto en la deformación del esqueleto sólido como en la fase porosa debe ser considerado el gradiente de las variables internas ∇q_α (Svedberg, 1999). En consecuencia, restringiendo el estudio a problemas isotérmicos, la energía libre de deformación es función de las siguientes variables

$$\Psi = \Psi(\boldsymbol{\varepsilon}^e, m^e, q_\alpha, \nabla q_\alpha) \quad (1)$$

Diferenciando la Ec. (1) y reemplazándola dentro de la forma global de la desigualdad de Clausius-Duhem, suponiendo además la descomposición aditiva de las variables incrementales de estado termodinámicas en una parte elástica ($\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e, \dot{m}^e$) y otra plástica ($\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, \dot{m}^p$) resulta

$$\int_{\Omega} \frac{1}{\theta} \left[\left(\boldsymbol{\sigma} - \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} \right) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e + \left(p - \rho \frac{\partial \Psi}{\partial m^e} \right) \dot{m}^e + \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p + \rho \frac{\partial \Psi}{\partial m^e} \dot{m}^p - \rho \frac{\partial \Psi}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha - \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \nabla q_\alpha} \nabla \dot{q}_\alpha \right] d\Omega \geq 0 \quad (2)$$

De la expresión anterior se obtienen las relaciones de Coleman, en forma idéntica a la teoría clásica de medios continuos

$$\boldsymbol{\sigma} = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} \quad \text{y} \quad p = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial m^e} \quad (3)$$

y los términos remanentes de la Ec. (2) corresponden a la energía de disipación plástica

$$\mathfrak{D} = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p + p \dot{m}^p + Q_\alpha \dot{q}_\alpha \geq 0 \quad (4)$$

con

$$Q_\alpha = -\rho \frac{\partial \Psi}{\partial q_\alpha} + \nabla \cdot \left(\rho \frac{\partial \Psi}{\partial \nabla q_\alpha} \right) \quad (5)$$

Como puede observarse de la Ec. (5), la diferencia entre la teoría local y la teoría no local de gradiente radica en el término de gradiente adicional en la tensión disipativa, Q_α . Por lo tanto, resulta conveniente descomponerla en una parte local otra no local

$$Q_\alpha = Q_\alpha^{loc} + Q_\alpha^{nloc} \quad (6)$$

siendo $Q_\alpha^{loc} = -\rho \partial \Psi / \partial q_\alpha$ y $Q_\alpha^{nloc} = \nabla \cdot (\rho \partial \Psi / \partial \nabla q_\alpha)$

Nota: Analizando la expresión de disipación plástica de la Ec. (4) es posible trazar una similitud entre la presente formulación no local de la plasticidad y el tratamiento unificado de modelos no locales propuesto por Gudmundson (2004). Es decir, exceptuando los términos referidos a la fase porosa, considerando un continuo Bolzman (microrotaciones nulas) y para el caso especial en el cual las microtensiones propuestas por Gudmundson son coincidentes con el tensor de tensiones de Cauchy, asumiendo además la tasa de la deformación plástica como variable interna, la Ec. (4) resulta equivalente a la propuesta por Gudmundson.

2.2. Relaciones constitutivas termodinámicamente consistentes

Basado en trabajos anteriores (Svedberg y Runesson, 1997; Etse y Vrech, 2006; Mroginski et al., 2010b) se desarrolla una formulación elastoplástica termodinámicamente consistente regularizada de acuerdo a la teoría de gradientes de deformaciones de orden superior. Para el potencial de energía libre de deformación se adopta la descomposición aditiva

$$\Psi(\boldsymbol{\varepsilon}^e, m^e, q_\alpha, \nabla q_\alpha) = \Psi^e(\boldsymbol{\varepsilon}^e, m^e) + \Psi^{p,loc}(q_\alpha) + \Psi^{p,nloc}(\nabla q_\alpha) \quad (7)$$

donde Ψ^e es la energía elástica del medio poroso definido por Coussy (1995)

$$\rho \Psi^e = \boldsymbol{\sigma}^0 : \boldsymbol{\varepsilon}^e + p^0 m^e + \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^e : \mathbf{C}^0 : \boldsymbol{\varepsilon}^e + \frac{1}{2} M (\mathbf{B} : \boldsymbol{\varepsilon}^e - m^e)^2 \quad (8)$$

Los potenciales $\Psi^{p,loc}$ y $\Psi^{p,nloc}$ constituyen las contribuciones locales y no locales, respectivamente, debidas al comportamiento disipativo de endurecimiento/ablandamiento isótropo, expresadas en término de las variables internas q_α y su gradiente ∇q_α .

A partir de la relaciones de Coleman de Ec. (3) y despreciado las tensiones y presiones de poro iniciales se pueden obtener las siguientes ecuaciones

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}^e - M \mathbf{B} m^e \quad (9)$$

$$p = -M \mathbf{B} : \boldsymbol{\varepsilon}^e + M m^e \quad (10)$$

donde $\mathbf{C} = \mathbf{C}^0 + M \mathbf{B} \otimes \mathbf{B}$, \mathbf{C}^0 es el tensor constitutivo elástico de cuarto orden que relaciona linealmente las tensiones con las deformaciones en el esqueleto sólido, M es el módulo de Biot y $\mathbf{B} = b \mathbf{I}$, siendo b el coeficiente de Biot e \mathbf{I} el tensor unitario de segundo orden.

2.3. Regla de flujo plástico no local

Del mismo modo que para la teoría local, se plantean las leyes de evolución de las variables internas en forma incremental. Para el caso de flujo plástico y leyes de endurecimiento/ablandamiento isótropo, se introduce un potencial disipativo Φ^* , tal que

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\lambda} \mathbf{m}_\sigma \quad , \quad \dot{m}^p = \dot{\lambda} \mathbf{m}_p \quad , \quad \dot{q}_\alpha = \dot{\lambda} \mathbf{m}_{Q_\alpha} \quad (11)$$

donde $\mathbf{m}_\sigma = \partial \Phi^* / \partial \boldsymbol{\sigma}$, $\mathbf{m}_p = \partial \Phi^* / \partial p$ y $\mathbf{m}_{Q_\alpha} = \partial \Phi^* / \partial Q_\alpha$

Para completar la formulación del problema en el dominio Ω deben cumplirse las condiciones complementarias de Kuhn-Tucker dadas por las relaciones

$$\dot{\lambda} \geq 0 \quad , \quad \Phi(\boldsymbol{\sigma}, p, Q_\alpha) \leq 0 \quad , \quad \dot{\lambda} \Phi(\boldsymbol{\sigma}, p, Q_\alpha) = 0 \quad (12)$$

2.4. Ecuación constitutiva en tasa

Combinando las Ecs. (9) y (10), teniendo en cuenta la descomposición aditiva del potencial de energía libre asumida en la Ec. (7) y la regla de flujo plástica no local de la Ec. (11), se pueden obtener las siguientes expresiones incrementales correspondientes al tensor de tensiones $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$, y a la presión de poro \dot{p} ,

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\lambda} \mathbf{C} : \mathbf{m}_\sigma - M \mathbf{B} \dot{m} + \dot{\lambda} M \mathbf{B} \mathbf{m}_p \quad (13)$$

$$\dot{p} = -M \mathbf{B} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \dot{\lambda} M \mathbf{B} : \mathbf{m}_\sigma + M \dot{m} - \dot{\lambda} M \mathbf{m}_p \quad (14)$$

Luego, multiplicando la Ec. (14) por \mathbf{B} y sumando el resultado a la Ec. (13), se obtiene una variante de la tasa del tensor de tensiones más adecuada para problemas drenados

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C}^0 : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \mathbf{B} \dot{p} - \dot{\lambda} \mathbf{C}^0 : \mathbf{m}_\sigma \quad (15)$$

Por su parte, la tasa de las tensiones disipativas de la Ec. (6) pueden ser obtenidas a a través de la regla de la cadena como sigue

$$\dot{Q}_\alpha = \dot{Q}_\alpha^{loc} + \dot{Q}_\alpha^{nloc} \quad (16)$$

con

$$\dot{Q}_\alpha^{loc} = -\dot{\lambda} H_\alpha^{loc} \mathbf{m}_Q \quad (17)$$

$$\dot{Q}_\alpha^{nloc} = l_\alpha^2 \nabla \cdot \left(\mathbf{H}_\alpha^{nloc} \nabla \dot{\lambda} \mathbf{m}_{Q_\alpha} + \dot{\lambda} \mathbf{H}_\alpha^{nloc} \cdot \nabla Q_\alpha \mathbf{m}_Q^2 \right) \quad (18)$$

donde $\mathbf{m}_Q^2 = \partial^2 \Phi^* / \partial Q^2$. En la expresión anterior se introdujeron el módulo local de endurecimiento/ablandamiento H_α^{loc} y el nuevo módulo no local de endurecimiento/ablandamiento \mathbf{H}_α^{nloc} (Svedberg y Runesson, 1997)

$$H_\alpha^{loc} = \rho \frac{\partial^2 \Psi^{p,loc}}{\partial q_\alpha^2}, \quad \mathbf{H}_\alpha^{nloc} = \rho \frac{1}{l_\alpha^2} \frac{\partial^2 \Psi^{p,nloc}}{\partial \nabla q_\alpha \partial \nabla q_\alpha} \quad (19)$$

\mathbf{H}_α^{nloc} es un tensor positivo definido de segundo orden mientras que l_α es la longitud interna característica correspondiente a la fase porosa ($\alpha = p$), o al esqueleto sólido ($\alpha = s$). Al menos tres interpretaciones pueden ser atribuídas a l_α (Svedberg, 1999), la primera de considera que la longitud característica es un parámetro dimensional conveniente para que los tensores H_α^{loc} y \mathbf{H}_α^{nloc} tengan la misma dimensión, otra interpretación consiste en asumir que l_α es un mecanismo artificial de estabilización numérica, por último, y en coincidencia con otros autores (Pamin, 1994; Vrech y Etse, 2005; Voyiadjis y Deliktas, 2009), l_α puede ser interpretada como una dimensión que caracteriza la microestructura del medio.

3. MODELO CONSTITUTIVO CAM CLAY MODIFICADO

A partir de las investigaciones de Roscoe et al. (1958) en la Universidad de Cambridge se desarrollaron una familia de modelos de plasticidad para suelos saturados al introducir una función de endurecimiento isotrópico en la función de fluencia. Posteriormente surgieron numerosos modelos entre los cuales se encuentra el Cam Clay (Schofield y Wroth, 1968) y el Cam Clay modificado (Roscoe y Burland, 1968). En un principio los modelos basados en el

Cam Clay original estaban orientados al análisis de arcillas normalmente consolidadas, sin embargo, en virtud de la considerable capacidad de modelar las características de diferentes tipos de suelos y el reducido número de parámetros, ha sido extendido a una amplia gama de suelos incluyendo los suelos no saturados (Alonso et al., 1990; Bolzon et al., 1996; Mroginski et al., 2006).

Las principales características del modelo constitutivo Cam Clay modificado original son las siguientes:

- a- La función de fluencia describe una elipse en el plano (σ', τ)
- b- La componente volumétrica de la deformación plástica sobre la línea de estados críticos es nula (tangente horizontal) y el flujo plástico se produce a volumen constante.
- c- La plasticidad es asociada, con lo cual los estados de rotura quedan definidos por el valor máximo de $\tau = p_{co}/2$ que cumple con la condición de $\tau = m\sigma'$.
- d- La ley de endurecimiento/ablandamiento es una función creciente, convexa y asintótica a un valor determinado, con lo cual se cumple la condición de Prager y no se viola el Segundo principio de la Termodinámica.

La función de fluencia está definida por

$$\Phi(\sigma', \tau, Q_\alpha) = \left(\sigma' + \frac{\tau^2}{m^2 \sigma'} \right) - Q_\alpha \quad (20)$$

donde $\sigma' = I_1/3 - \beta p$ es la tensión esférica efectiva, $\tau = \sqrt{3J_2}$ es la tensión de corte, m es la pendiente de la recta de estados críticos y Q_α es la tensión disipativa termodinámicamente consistente igual a p_{co} . Además I_1 y J_2 son el primero y el segundo invariante del tensor de tensiones y del tensor desviador, respectivamente.

Por otro lado, resultados experimentales mostraron que el modelo de estado crítico convencional, a menudo subestima los valores del coeficiente de compresibilidad volumétrica K_0 (Gens y Potts, 1982; Balmaceda, 1991) por lo tanto resulta necesario emplear un potencial plástico diferente de la función de fluencia Ec. (20). Por tal motivo se justifica el análisis de localización del modelo Cam Clay modificado dado que las propiedades espectrales de tensores simétricos, que conduce la plasticidad asociada, son siempre números reales.

En tal sentido, la función potencial plástica adoptada posee un coeficiente η que limita la influencia de la presión volumétrica en la región de ablandamiento, donde la necesidad de emplear un modelo no asociado es superior.

$$\Phi^*(\sigma', \tau, Q_\alpha) = \eta(\sigma' - Q_\alpha)^2 + \left(\frac{\tau}{m} \right)^2 - Q_\alpha^2 \quad (21)$$

con

$$\eta = \eta_0 + \frac{a \left(1 + m \exp \left(\frac{-(\sigma + \beta p)}{v} \right) \right)}{1 + n \exp \left(\frac{-(\sigma + \beta p)}{v} \right)} \quad (22)$$

siendo a , n y m parámetros de ajuste de la función exponencial, $\eta_0 = 1$ y $v = \text{abs}(p_{co}/2)$.

La adopción del potencial plástico de la Ec. (21) permite no solo reducir el coeficiente de compresibilidad volumétrica sino también mantener la consistencia termodinámica del modelo,

la cual no podría ser conseguida empleando reglas de flujo no asociada, como la diseñada por (Alonso et al., 1990; Balmaceda, 1991).

La consistencia termodinámica exige a su vez que la parte disipativa de la energía libre de deformación plástica definida en Ec. (7) adopte la siguiente forma

$$\rho\Psi^p(\kappa, \nabla\kappa) = \rho\Psi^{p,loc}(\kappa) + \rho\Psi^{p,nloc}(\nabla\kappa) = -\frac{1}{\chi}p_{co}^0\exp(\chi\kappa) - \frac{1}{2}l_\alpha^2\mathbf{H}^{nloc}\nabla^2\kappa \quad (23)$$

donde la variable interna κ correspondiente al modelo Cam Clay modificado es la deformación volumétrica plástica del esqueleto sólido ε^p ,

$$\varepsilon^p = \phi^p + (1 - \phi_0)\varepsilon_s^p \quad (24)$$

Por su parte, se observa de la Ec. (24) que la deformación volumétrica plástica del esqueleto sólido depende de la porosidad plástica ϕ^p , y de la deformación volumétrica de la matriz, ε_s^p .

Una vez definido el potencial de energía libre plástico local y no local, Ec. (23), y las variables internas correspondientes a un modelo material en particular es posible obtener la tensión disipativa Q_α según Ec. (5)

$$Q_\alpha^{loc}(\kappa) = -\rho\frac{\partial\Psi}{\partial\varepsilon^p} = -\rho\frac{\partial\Psi}{\partial\phi^p} - \rho\frac{\partial\Psi}{\partial\varepsilon_s^p} = (2 - \phi_0)p_{co}^0\exp(\chi(\phi^p + (1 - \phi_0)\varepsilon_s^p)) \quad (25)$$

$$Q_\alpha^{nloc}(\nabla\kappa) = -\nabla\left(\rho\frac{\partial\Psi}{\partial\nabla\kappa}\right) = l_s^2\mathbf{H}_s^{nloc}\nabla^2\varepsilon_s^p + l_p^2\mathbf{H}_p^{nloc}\nabla^2\phi^p \quad (26)$$

donde l_s y l_p son las longitudes internas característicos correspondientes al esqueleto sólido y a la fase porosa, respectivamente. En la Fig. 1 se representa la variación de la función Q_α^{loc} respecto de la deformación plástica volumétrica ε^p , definida en Ec. (24). Puede apreciarse en dicha figura que la forma exponencial de Q_α^{loc} obtenida a partir de asumir el la energía libre plástica según Ec. (23) es aplicable tanto a trayectorias de endurecimiento como de ablandamiento. Esta afirmación queda demostrada en la Fig. 2 donde se muestran expansiones o contracciones de la superficie de fluencia de Cam Clay modificada para diferentes valores (positivos y negativos) de la deformación volumétrica plástica.

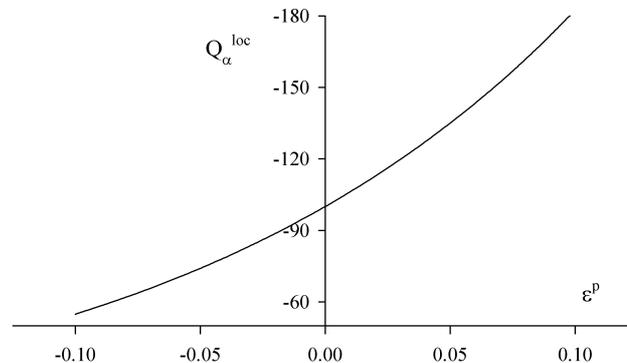


Figura 1: Ley de evolución de las variables internas

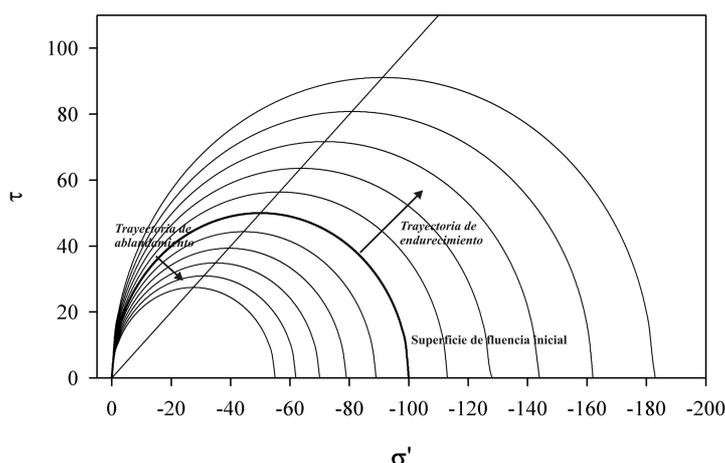


Figura 2: Criterio Cam Clay modificado. Trayectorias de endurecimiento/ablandamiento.

4. FORMULACIÓN DEL MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS

El objetivo de esta sección es deducir el algoritmo incremental-iterativo que cumpla la condición de equilibrio, la ecuación de balance de masa de fluido y la condición de fluencia al final de cada paso de carga/desplazamiento que gobierna el problema de valores de borde planteado en la sección 2.

4.1. Formulación incremental

El cumplimiento de las ecuaciones generales de gobierno se realiza en forma incremental, es decir, la condición de equilibrio, la ecuación de balance de masa de fluido y la condición de fluencia serán planteadas en forma débil, de la siguiente manera,

$$\int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T : \boldsymbol{\sigma}_{j+1} \, d\Omega - \int_{\partial\Omega} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{t}_{j+1} \, d\partial\Omega = 0 \quad (27)$$

$$\int_{\Omega} \delta p \dot{m} \, d\Omega - \int_{\Omega} \nabla \delta p \cdot \mathbf{w} \, d\Omega + \int_{\partial\Omega} \delta p \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} \, d\partial\Omega = 0 \quad (28)$$

$$\int_{\Omega} \delta \lambda \Phi(\boldsymbol{\sigma}_{j+1}, p_{j+1}, Q_{\alpha_{j+1}}) \, d\Omega = 0 \quad (29)$$

al final de la iteración $j + 1$ del escalón de carga actual. A diferencia de lo que ocurre en plasticidad clásica, en esta formulación la Ec. (29) no se cumple en un sentido estricto sino en forma distribuida y solo cuando se alcanza la convergencia final del problema.

Considerando la descomposición del tensor de tensiones dentro de un proceso iterativo $\boldsymbol{\sigma}_{j+1} = \boldsymbol{\sigma}_j + \Delta \boldsymbol{\sigma}$ y reemplazando en la Ec. (27) se tiene

$$\int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T : \Delta \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega = \int_{\partial\Omega} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{t}_{j+1} \, d\partial\Omega - \int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T : \boldsymbol{\sigma}_j \, d\Omega \quad (30)$$

luego, reemplazando la relación constitutiva en tasa Ec. (15)

$$\int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T : (\mathbf{C}^0 : \Delta \boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{B} \Delta p - \mathbf{C}^0 : \mathbf{m}_{\sigma} \Delta \lambda) \, d\Omega = \int_{\partial\Omega} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{t}_{j+1} \, d\partial\Omega - \int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T : \boldsymbol{\sigma}_j \, d\Omega \quad (31)$$

puede observarse que la ecuación anterior no depende explícitamente del gradiente del multiplicador plástico y tiene una forma muy similar a la ecuación de equilibrio incremental usada en plasticidad clásica.

De forma similar, considerando el incremento $\mathbf{w}_{j+1} = \mathbf{w}_j + \Delta \mathbf{w}$, despejando la variación del contenido de masa \dot{m} de la Ec. (14) y reemplazando en la relación Ec. (28), se tiene

$$\int_{\Omega} \delta p \left(\frac{\Delta p}{M} + \mathbf{B} : \Delta \boldsymbol{\varepsilon} - (\mathbf{B} : \mathbf{m}_{\sigma} - m_p) \Delta \lambda \right) d\Omega = \Delta t \int_{\Omega} \nabla \delta p \cdot (\mathbf{w}_j + \Delta \mathbf{w}) d\Omega - \Delta t \int_{\partial \Omega} \delta p \mathbf{w}_{j+1} \cdot \mathbf{n} d\partial \Omega \quad (32)$$

Teniendo en cuenta la ley de Darcy para flujo en medios porosos

$$\mathbf{w} = -\mathbf{k} \cdot \nabla p \quad (33)$$

se tiene

$$\int_{\Omega} \delta p \left(\frac{\Delta p}{M} + \mathbf{B} : \Delta \boldsymbol{\varepsilon} - (\mathbf{B} : \mathbf{m}_{\sigma} - m_p) \Delta \lambda \right) d\Omega = -\Delta t \int_{\Omega} \nabla \delta p \cdot \mathbf{k} \cdot \nabla p_j d\Omega - \Delta t \int_{\Omega} \nabla \delta p \cdot \mathbf{k} \cdot \nabla \Delta p d\Omega - \Delta t \int_{\partial \Omega} \delta p \mathbf{w}_{j+1} \cdot \mathbf{n} d\partial \Omega \quad (34)$$

Por otro lado la función de fluencia en Ec. (29) puede ser desarrollada en serie de Taylor sobre el punto $(\boldsymbol{\sigma}_j, p_j, Q_{\alpha_j})$ con suficiente exactitud truncando la serie hasta los términos lineales (Pamin, 1994)

$$\Phi(\boldsymbol{\sigma}, p, Q_{\alpha})|_{j+1} = \Phi(\boldsymbol{\sigma}, p, Q_{\alpha})|_j + \mathbf{n}_{\sigma} : \Delta \boldsymbol{\sigma} + n_p \Delta p + n_{Q_{\alpha}} \Delta Q_{\alpha} \quad (35)$$

A continuación, en primer lugar la descomposición aditiva de la tasa de la tensión disipativa en una parte local y otra no local es tenida en cuenta, según Ec. (16). En segundo lugar, para variables de estado espacialmente homogéneas, puede asumirse que $\partial^2 \Phi^* / \partial Q_{\alpha} \partial Q_{\alpha} = 0$ (Svedberg, 1999), por lo tanto

$$\dot{Q}_{\alpha} = \dot{Q}_{\alpha}^{loc} + \dot{Q}_{\alpha}^{nloc} = -H_{\alpha}^{loc} m_{Q_{\alpha}} \dot{\lambda} + l_{\alpha}^2 \mathbf{H}_{\alpha}^{nloc} m_{Q_{\alpha}} \nabla^2 \dot{\lambda} \quad (36)$$

reemplazando Ec. (15) y Ec. (36) en Ec. (35) se obtiene la forma débil de la condición de fluencia

$$\int_{\Omega} \delta \lambda \Phi(\boldsymbol{\sigma}_{j+1}, p_{j+1}, Q_{\alpha_{j+1}}) d\Omega = \int_{\Omega} \delta \lambda \Phi(\boldsymbol{\sigma}_j, p_j, Q_{\alpha_j}) d\Omega + \int_{\Omega} \delta \lambda \mathbf{n}_{\sigma} : \mathbf{C}^0 : \Delta \boldsymbol{\varepsilon} d\Omega + \int_{\Omega} \delta \lambda [(\mathbf{n}_p - \mathbf{n}_{\sigma} : \mathbf{B}) \Delta p - \mathbf{n}_{\sigma} : \mathbf{C}^0 : \mathbf{m}_{\sigma} \Delta \lambda + n_{Q_{\alpha}} (-H_{\alpha}^{loc} m_{Q_{\alpha}} \Delta \lambda + l_{\alpha}^2 \mathbf{H}_{\alpha}^{nloc} m_{Q_{\alpha}} \nabla^2 \Delta \lambda)] d\Omega = 0 \quad (37)$$

4.2. Discretización espacial

Como se observa en el sistema de ecuaciones formado por Ec. (31), Ec. (34) y Ec. (37) aparecen derivadas de primer orden del campo cinemático y de presiones de poro y derivadas de segundo orden del multiplicador plástico. Por lo tanto el proceso de discretización requiere de funciones de forma de continuidad C_0 para el campo de desplazamientos y presiones de poro y funciones de forma de continuidad C_1 para la discretización del multiplicador plástico.

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}_u \bar{\mathbf{u}} \quad (38)$$

$$p = \mathbf{N}_p \bar{p} \quad (39)$$

$$\lambda = \mathbf{H} \bar{\lambda} \quad (40)$$

Reemplazando estas variables discretas en las ecuaciones generales de campo descriptas en la sección anterior, recordando $\boldsymbol{\varepsilon} = \nabla^s \mathbf{u} = \nabla^s \mathbf{N}_u \bar{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{B}} \bar{\mathbf{u}}$, se tiene en primer lugar

$$\left\{ \int_{\Omega} \delta \bar{\mathbf{u}}^T \bar{\mathbf{B}}^T : \mathbf{C}^0 : \bar{\mathbf{B}} \, d\Omega \right\} \Delta \bar{\mathbf{u}} - \left\{ \int_{\Omega} \delta \bar{\mathbf{u}}^T \bar{\mathbf{B}}^T : \mathbf{B} \mathbf{N}_p \, d\Omega \right\} \Delta \bar{p} - \left\{ \int_{\Omega} \delta \bar{\mathbf{u}}^T \bar{\mathbf{B}}^T : \mathbf{C}^0 : \mathbf{m}_{\sigma} \mathbf{H} \, d\Omega \right\} \Delta \bar{\lambda} = \int_{\partial\Omega} \delta \bar{\mathbf{u}}^T \mathbf{N}_u^T \mathbf{t}_{j+1} \, d\partial\Omega - \int_{\Omega} \delta \bar{\mathbf{u}}^T \bar{\mathbf{B}}^T : \boldsymbol{\sigma}_j \, d\Omega \quad (41)$$

A continuación, reemplazando Ecs. (38)-(40) en Ec. (34) se tiene

$$\left\{ \int_{\Omega} \delta \bar{p} \mathbf{N}_p^T \mathbf{B} : \bar{\mathbf{B}} \, d\Omega \right\} \Delta \bar{\mathbf{u}} + \left\{ \int_{\Omega} \delta \bar{p} \left[\frac{\mathbf{N}_p^T \mathbf{N}_p}{M} + \Delta t (\nabla \mathbf{N}_p)^T \cdot \mathbf{k} \cdot \nabla \mathbf{N}_p \right] \, d\Omega \right\} \Delta \bar{p} + \left\{ \int_{\Omega} \delta \bar{p} \mathbf{N}_p^T [\mathbf{m}_p - \mathbf{B} : \mathbf{m}_{\sigma}] \mathbf{H} \, d\Omega \right\} \Delta \bar{\lambda} = - \left\{ \Delta t \int_{\Omega} \delta \bar{p} (\nabla \mathbf{N}_p)^T \cdot \mathbf{k} \cdot \nabla \mathbf{N}_p \, d\Omega \right\} \bar{p}_j - \Delta t \int_{\partial\Omega} \delta \bar{p} \mathbf{N}_p^T \mathbf{w}_{j+1} \cdot \mathbf{n} \, d\partial\Omega \quad (42)$$

Por último, empleando las variables discretas definidas en Ecs. (38)-(40) en Ec. (37) se tiene

$$\left\{ \int_{\Omega} \delta \bar{\lambda} \mathbf{H}^T \mathbf{n}_{\sigma} : \mathbf{C}^0 : \bar{\mathbf{B}} \, d\Omega \right\} \Delta \bar{\mathbf{u}} + \left\{ \int_{\Omega} \delta \bar{\lambda} \mathbf{H}^T [\mathbf{n}_p - \mathbf{n}_{\sigma} : \mathbf{B}] \mathbf{N}_p \, d\Omega \right\} \Delta \bar{p} + \left\{ - \int_{\Omega} \delta \bar{\lambda} \mathbf{H}^T [\mathbf{n}_{\sigma} : \mathbf{C}^0 : \mathbf{m}_{\sigma} + \bar{H}_{\alpha}^{loc}] \mathbf{H} + l_{\alpha}^2 \mathbf{H}^T \bar{\mathbf{H}}_{\alpha}^{nloc} \mathbf{P} \, d\Omega \right\} \Delta \bar{\lambda} = - \int_{\Omega} \delta \bar{\lambda} \mathbf{H}^T \Phi(\boldsymbol{\sigma}_j, p_j, Q_{\alpha_j}) \, d\Omega \quad (43)$$

donde $\nabla^2(\Delta \lambda) = \nabla^2(\mathbf{H}) \Delta \bar{\lambda} = \mathbf{P} \Delta \bar{\lambda}$, $\bar{H}_{\alpha}^{loc} = n_{Q_{\alpha}} H_{\alpha}^{loc} m_{Q_{\alpha}}$ y $\bar{\mathbf{H}}_{\alpha}^{nloc} = n_{Q_{\alpha}} \mathbf{H}_{\alpha}^{nloc} m_{Q_{\alpha}}$.

Dado que las soluciones triviales del sistema de ecuaciones formado por las Ecs. (41)-(43) no son de interés, los valores arbitrarios de $\delta \bar{\mathbf{u}}$, $\delta \bar{p}$ y $\delta \bar{\lambda}$ pueden ser descartados. Ordenando en forma matricial se obtiene la matriz de rigidez del elemento finito para plasticidad de gradientes con continuidad C_1 para el multiplicador plástico

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{K}_{ss} & \mathbf{Q}_{sp} & \mathbf{Q}_{s\lambda} \\ \mathbf{Q}_{ps} & \mathbf{K}_{pp} + \Delta t \mathbf{H}_{pp} & \mathbf{Q}_{p\lambda} \\ \mathbf{Q}_{\lambda s} & \mathbf{Q}_{\lambda p} & \mathbf{K}_{\lambda\lambda} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \bar{\mathbf{u}} \\ \Delta \bar{p} \\ \Delta \bar{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_s^{\text{int}} - \mathbf{F}_s^{\text{ext}} \\ -\mathbf{F}_p \\ -\mathbf{F}_{\lambda} \end{bmatrix} \quad (44)$$

Las submatrices de la Ec. (44) pueden obtenerse por simple inspección de las Ecs. (41)-(43).

A diferencia de lo que ocurre en problemas de plasticidad clásica, donde se requiere de un algoritmo iterativo para el retorno de tensiones, en esta formulación de plasticidad de gradiente, dado que el multiplicador plástico es una variable nodal, no se requiere de un procedimiento iterativo adicional. En la Tabla 1 se encuentra resumido el algoritmo implementado para resolver el problema de valores de borde.

<p>1) Computar las matrices del sistema Ec. (44)</p> <p>2) Resolver el sistema algebraico de Ec. (44) para obtener los incrementos $\Delta\bar{\mathbf{u}}$, $\Delta\bar{p}$ y $\Delta\bar{\lambda}$</p> <p>3) Actualizar las variables primarias $\Delta\bar{\mathbf{u}}_j = \Delta\bar{\mathbf{u}}_{j-1} + \Delta\bar{\mathbf{u}}$, $\Delta\bar{p}_j = \Delta\bar{p}_{j-1} + \Delta\bar{p}$ y $\Delta\bar{\lambda}_j = \Delta\bar{\lambda}_{j-1} + \Delta\bar{\lambda}$</p> <p>4) En cada punto de integración computar:</p> $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_j = \mathbf{B} \Delta\bar{\mathbf{u}}_j$ $\Delta\lambda_j = \mathbf{H} \Delta\bar{\lambda}_j$ $\nabla^2(\Delta\lambda_j) = \mathbf{P} \Delta\bar{\lambda}_j$ $q_{\alpha_j} = q_{\alpha_0} + \mathbf{m}_{Q_\alpha} \Delta\lambda_j$ $\nabla^2 q_{\alpha_j} = \nabla^2 q_{\alpha_0} + \mathbf{m}_{Q_\alpha} \nabla^2(\Delta\lambda_j)$ $\boldsymbol{\sigma}^t = \boldsymbol{\sigma}_0 + \mathbf{C}^0 : \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_j - \mathbf{B}\mathbf{N}_p \Delta\bar{p}_j$ <p>IF $\Phi(\boldsymbol{\sigma}^t, q_{\alpha_j}, \nabla^2 q_{\alpha_j}) > 0$</p> $\boldsymbol{\sigma}_j = \boldsymbol{\sigma}^t - \Delta\lambda_j \mathbf{C}^0 : \mathbf{m}_\sigma$ <p>ELSE</p> $\boldsymbol{\sigma}_j = \boldsymbol{\sigma}^t$ <p>END</p> <p>5) Chequear la convergencia global, si no converge volver a 1</p>
--

Tabla 1: Algoritmo para plasticidad de gradiente con elementos de Clase C_1 , iteración j

4.3. Tecnología del elemento finito

En esta sección se discuten las características que debe cumplir el elemento finito adoptado que aseguren la convergencia del problema.

Como se dijo anteriormente, la formulación de plasticidad de gradiente para medios porosos presentado por Mroginiski et al. (2010b) incluye en la forma variacional el laplaciano del multiplicador plástico, lo cual implica la necesidad de contar con funciones de forma de continuidad C_1 para describir consistentemente la variación del multiplicador plástico dentro de cada elemento y en su contorno.

Por otro lado, al tratarse de un problema bifásico, sólido-líquido acoplado, se requiere del cumplimiento de la condición de Babuska-Brezzi especialmente cuando puedan presentarse problemas no drenados o de permeabilidad muy baja. En estos casos pueden encontrarse valores nulos en la diagonal principal de la matriz de rigidez lo cual evidentemente puede ocasionar problemas de mal condicionamiento del sistema. La condición de Babuska-Brezzi se cumple aumentando el orden de la función de interpolación del campo cinemático \mathbf{N}_u , respecto del orden de la función de interpolación del campo de presiones, \mathbf{N}_p .

Uno de los tantos elementos finitos que cumple con estas características, y que ha sido suficientemente testado en problemas de flujo acoplado en medios porosos locales (Lewis y Schrefler, 1998; Mroginiski et al., 2010a) es el cuadrilátero serendípito de 8 nodos. En el presente

trabajo se adopta este elemento incorporando funciones de forma hermíticas (Dorgan, 2006) para interpolar consistentemente el multiplicador plástico (ver Fig. 3).

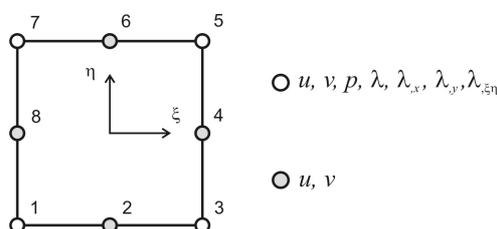


Figura 3: Elemento Q8C1

5. RESULTADOS NUMÉRICOS

5.1. Consolidación unidimensional de suelos saturados

En esta sección se plantea el problema de consolidación unidimensional de suelos saturados considerando no linealidad física basada en gradientes superiores de deformación empleando el modelo material Cam Clay modificado no asociado descrito en la sección 3.

Para conseguir la variación unidimensional de las variables primarias, las condiciones de borde del problema deben ser equivalentes a las mostradas en la Fig. 4. Sin embargo, para evitar la aparición de valores nulos en la diagonal principal de la matriz de rigidez es necesario incorporar condiciones de borde adecuadas para el multiplicador plástico que aseguren la estabilidad del problema numérico. Estas condiciones implican la nulidad de la derivada del multiplicador plástico en las direcciones perpendiculares al contorno del problema (Pamin, 1994; Dorgan, 2006).

El problema consiste en una columna de suelo mostrada en Fig. 4 de altura $H = 1,0m$ y ancho $B = 0,1m$. Cuyas propiedades materiales se encuentra resumidas en la Tabla 2.

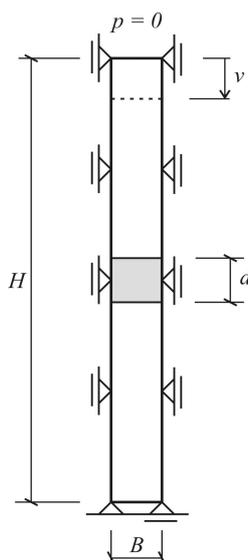


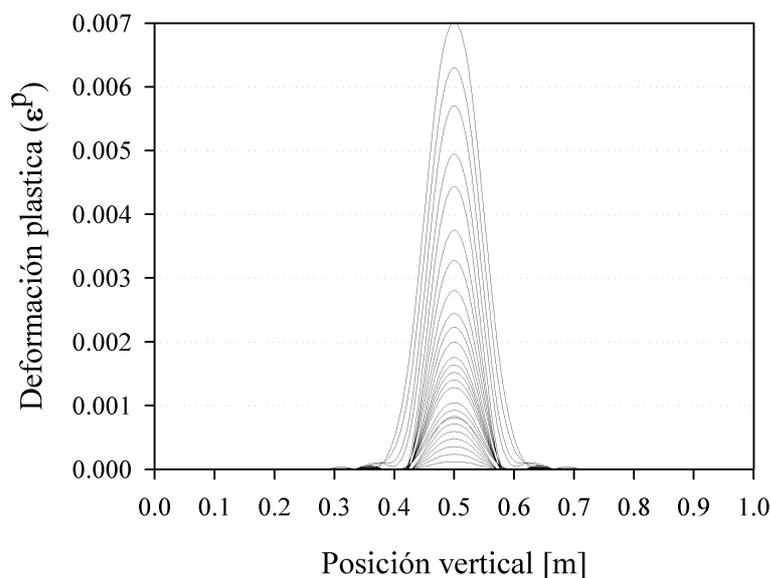
Figura 4: Consolidación unidimensional. Condiciones de borde

Para inducir el inicio de la localización de deformaciones y poder analizar la propagación de las deformaciones plásticas se debilitó la región central de la columna de suelo de altura $d = 0,1m$ disminuyendo la presión de preconsolidación un 10 % (ver Fig. 4).

Propiedad Material	Valor
Pendiente de la LEC, M	1,00
Presión de preconsolidación, p_{co}	-100,00 MPA
Porosidad inicial, ϕ_0	0,4
Coficiente de compresibilidad del medio, K_0	1000,00
Coficiente de compresibilidad del sólido, K_s	1500,00
Coficiente de compresibilidad del fluido, K_{ft}	500,00
Coficiente de Biot, $b = 1 - K_0/K_s$	0,33
Coficiente de reducción, β	0,5
Módulo de elasticidad, E	20000,0 MPA
Coficiente Poisson, ν	0,2
Módulo de endurecimiento/ablandamiento local, $H_s^{loc} = H_p^{loc}$	$-0,1 * E$

Tabla 2: Propiedades materiales

La Fig. 5 muestra la evolución de la deformación plástica durante el proceso de carga para longitudes internas características del esqueleto sólido l_s , y de la fase porosa l_p , iguales a $2,5mm$. De manera similar, la Fig. 6 muestra la evolución de las deformaciones plásticas cuando la longitud interna característica de ambas fases es de $5,0mm$. Puede observarse cómo el inicio de la plastificación se da en la región central de $0,1m$ de ancho y se va propagando a las regiones contiguas a medida que aumenta la deformación impuesta. Asimismo, de la comparación entre las Fig. 5 y Fig. 6 se observa que la longitud interna característica gobierna el espesor de la zona de localización.

Figura 5: Localización y propagación de deformaciones plásticas, $l_s = l_p = 2,5mm$

Para este ejemplo numérico se empleó una malla de 80 elementos finitos (descritos en la sección 4.3). La influencia de la discretización de la malla de elementos finitos será tratada en la sección siguiente.

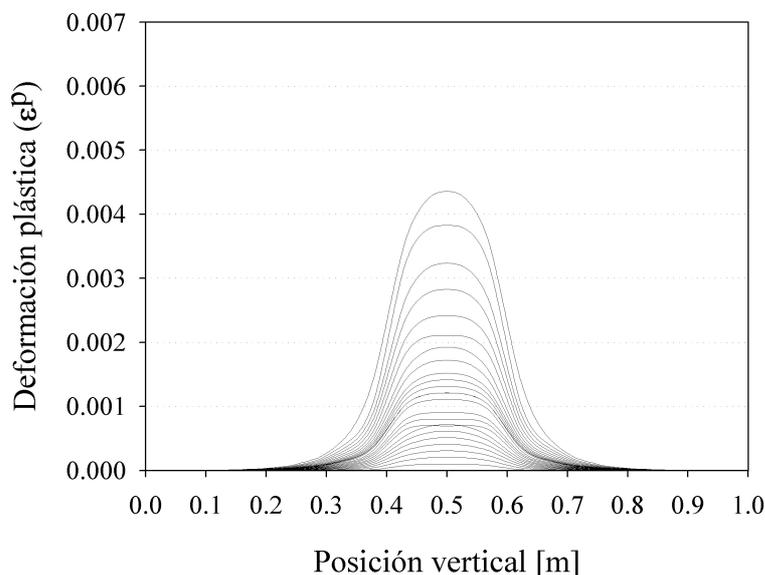


Figura 6: Localización y propagación de deformaciones plásticas, $l_s = l_p = 5,0mm$

5.2. Análisis bidimensional de localización

El siguiente ejemplo numérico consiste el análisis de localización de deformaciones plásticas de una probeta de suelo saturado sometido a una compresión uniforme con condiciones de ensayo drenado, como lo indica la Fig. 7. Las propiedades materiales adoptadas son las mismas del ejemplo anterior y están resumidas en la Tabla 2.

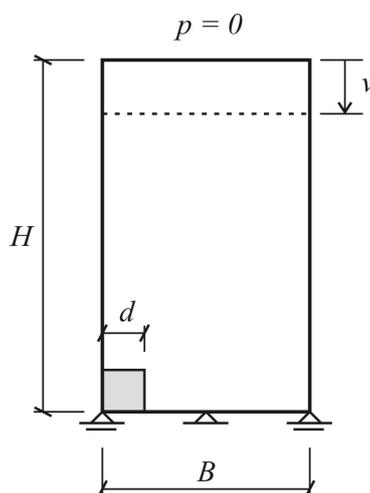


Figura 7: Localización bidimensional. Condiciones de borde.

Del mismo modo que en el ejemplo anterior, para inducir el inicio de la localización de deformaciones y poder analizar la propagación de las deformaciones plásticas se debilitó una región rectangular de lado $d = 0,1m$ disminuyendo la presión de preconsolidación un 10 %, de acuerdo a la Fig. 7.

En la Fig. 8 se observan las bandas de localización para tres mallas diferentes de elementos finitos: en Fig. 8a la malla empleada es de 6x12 elementos, en la Fig. 8b de 12x24 elementos y

en la Fig. 8c de 24x48 elementos. De la comparación entre las tres figuras se deduce claramente que el ancho de localización y la dirección crítica no dependen de la discretización espacial adoptada. Esto constituye una de las principales características de las formulaciones no locales de gradientes (Etse y Vrech, 2006; Vrech, 2007).

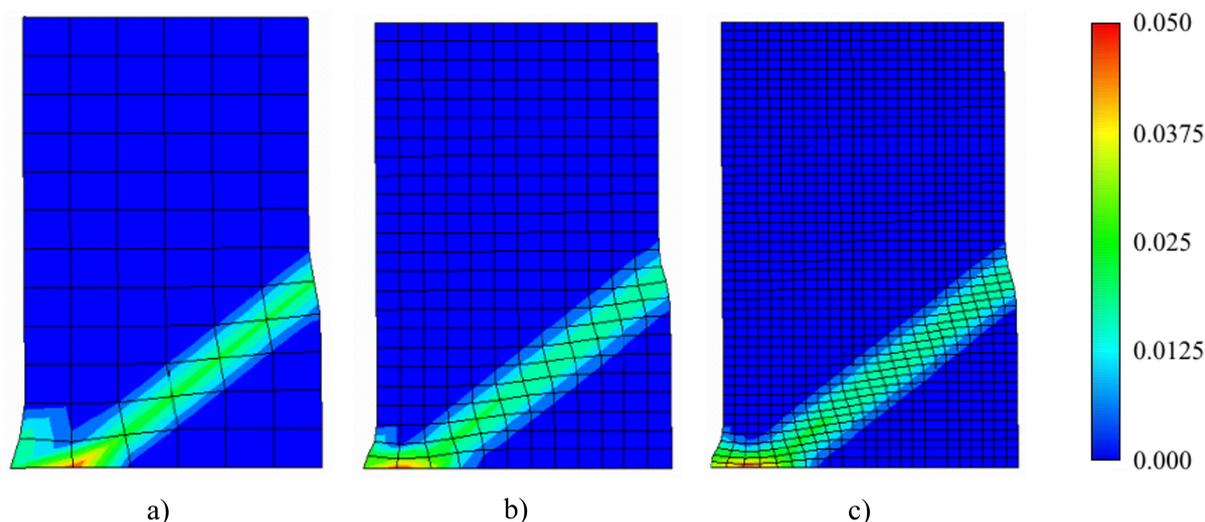


Figura 8: Localización bidimensional. Independencia de la discretización de la malla de EF.

6. CONCLUSIONES

Se ha presentado un modelo termodinámicamente consistente para el análisis de medios porosos no locales a partir de la teoría de gradientes superiores de deformación. De la deducción matemática de dicho modelo surge la posibilidad de definir múltiples longitud internas características que permiten modelar con mejor fundamento los efectos no locales en medios porosos multifásicos.

El modelo material empleado para la demostración de resultados fue el Cam Clay modificado (CCM) para el cual se propuso un potencial plástico que permite no sólo reducir el coeficiente de compresibilidad volumétrica, que a menudo es sobrestimado por el modelo CCM original, sino también mantener la consistencia termodinámica del modelo, a diferencia del empleo de leyes de flujo no asociada. Los resultados numéricos permiten demostrar las propiedades regularizante que tienen los modelos elastoplásticos basados en gradientes superiores de deformaciones plásticas.

7. AGRADECIMIENTOS

El presente trabajo ha sido financiado por el Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas CONICET por medio del Proyecto PIP 112-200801-00707 y por el Consejo de Investigaciones de la Universidad Nacional de Tucumán CIUNT mediante el Proyecto E26/455.

REFERENCIAS

- Alonso E., Gens A., y Josa A. A constitutive model for partially saturated soils. *Geotechnique*, 40(3):405–430, 1990.
- Balmaceda A. *Suelos compactados, un estudio teorico y experimental*. Tesis doctoral, Universidad Politécnica de Catalunya, 1991.

- Bolzon G., Schrefler B., y Zienkiewicz O. Elastoplastic soil constitutive laws generalized to partially saturated states. *Geotechnique*, 46(2):279–289, 1996.
- Coussy O. *Mechanics of Porous Continua*. John Wiley & Sons, 1995.
- Di Rado H., Beneyto P., Mroginski J., y Awruch A. Influence of the saturation-suction relationship in the formulation of non-saturated soils consolidation models. *Mathematical and Computer Modelling*, 49(5), 2009.
- Dorgan R.J. *A nonlocal model for coupled damage-plasticity incorporating gradients of internal state variables at multiscales*. Ph.D. Thesis, Louisiana State University, 2006.
- Etse G. y Vrech S. Geometrical method for localization analysis in gradient-dependent J2 plasticity. *Journal of Applied Mechanics, ASME*, 73(6):1026–1030, 2006.
- Gawin D., Baggio P., y Schrefler B. Coupled heat, water and gas flow in deformable porous media. *International Journal for numerical methods in fluids*, 20:969–987, 1995.
- Gens A. y Potts D. A theoretical model for describing the behaviour of soils not obeying Rendulic's principle. In P.G.S.J. Dungar R., editor, *Int. Sym. on Numerical Models in Geomechanics, Zurich*, páginas 24–32. 1982.
- Gudmundson P. A unified treatment of strain gradient plasticity. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 52:1379–1406, 2004.
- Larsson J. *On the Modelling of Porous Media with emphasis on localization*. Chalmers University of Technology, Göteborg, Sweden, 1999.
- Lewis R. y Schrefler B. *The Finite Element Method in the Static and Dynamic Deformation and Consolidation of Porous Media*. John Wiley & Sons, 1998.
- Mroginski J., Rado H.D., Beneyto P., y Awruch M. A suction induced modification in elastoplastic behaviour of partially saturated soils. *Mecánica Computacional*, 25:2097–2107, 2006.
- Mroginski J.L., Di Rado H.A., Beneyto P.A., y Awruch A.M. A finite element approach for multiphase fluid flow in porous media. *Math. Comput. Simulat.*, 81:76–91, 2010a.
- Mroginski J.L., Etse G., y Vrech S.M. A thermodynamical gradient theory for deformation and strain localization of porous media. *Int. J. Plasticity (In Press, doi: 10.1016/j.ijplas.2010.08.010)*, 2010b.
- Pamin J. *Gradient-dependent plasticity in numerical simulation of localization phenomena*. TU-Delft, The Netherlands, 1994.
- Roscoe K. y Burland J. *On the generalized stress-strain behaviour of wet clay*. In *Engineering Plasticity*, eds. J. Heyman and F.A. Leckie. Cambridge University Press., 1968.
- Roscoe K., Schofield A., y Wroth. C. On the yielding of soils. *Geotechnique*, 8:22–53, 1958.
- Schofield A. y Wroth C. *Critical State Soil Mechanics*. London, England: McGraw-Hill, 1968.
- Svedberg T. *On the Modelling and Numerics of Gradient-Regularized Plasticity Coupled to Damage*. Chalmers University of Technology, Göteborg, Sweden, 1999.
- Svedberg T. y Runesson K. A thermodynamically consistent theory of gradient-regularized plasticity coupled to damage. *Int. J. Plasticity*, 13(6-7):669–696, 1997.
- Voyiadjis G. y Deliktas B. Formulation of strain gradient plasticity with interface energy in a consistent thermodynamic framework. *Int. J. Plasticity*, 25(10):1997–2024, 2009.
- Vrech S. *Simulación Computacional de Procesos de Falla Localizada basada en Teoría de Gradientes*. Tesis doctoral, Universidad Nacional de Tucumán, Facultad de Ciencias Exactas y Tecnología, Argentina, 2007.
- Vrech S. y Etse G. Geometrical localization analysis of gradient-dependent parabolic Drucker-Prager elastoplasticity. *Int. J. Plasticity*, 22:943–964, 2005.