

## TEORÍA CONSTRUCTAL APLICADA A UN CONDUCTOR ELÉCTRICO

Ojeda, J., Méndez, F.

*Universidad Nacional Autónoma de México – UNAM, 04510 México D.F., México,  
j.ojeda.sanchez@gmail.com*

**Palabras Clave:** Transferencia de Calor, Conductor Eléctrico, Teoría Constructal.

**Resumen.** En la actualidad es bien conocido que el incremento en la demanda y consumo de la energía eléctrica a escala internacional; además de las restricciones económicas para su distribución, ocasionará que en un futuro próximo sea indispensable aumentar el flujo de energía a través de nuevas redes eléctricas o bien a través de las ya existentes. Considerando que en situaciones reales el voltaje de consumo tiene valores fijos y limitados por las mismas condiciones de operación y distribución de las condiciones eléctricas, el incremento anterior de energía en principio solo podría ser obtenido mediante incrementos de la corriente eléctrica. Sin embargo, los conductores metálicos presentan una resistencia eléctrica al flujo de corriente, que conocida como el efecto Joule, se amplifica y produce tazas de incremento de calor en el conductor mismo elevando considerablemente la resistencia eléctrica del mismo. Para mitigar lo anterior, en el presente trabajo, se propone un modelo teórico alternativo basado en la Teoría Constructal desarrollada por A. Bejan para desarrollar una arquitectura de una red constructal compuesta por un material de alta conductividad térmica e inmersa en el plano transversal de un cuerpo cilíndrico con generación de calor; de tal manera que permita mayores tazas de disipación del calor. Lo anterior es acompañado de una resistencia térmica global menor sujeta a restricciones globales propias del sistema físico analizado. El proceso anterior de optimización constructal confirma que los insertos de material de alta conductividad presentan estructuras de forma dendrítica.

## 1 INTRODUCCION

Dado el aumento en la demanda de energía eléctrica a nivel mundial, en el futuro será necesario incrementar el flujo de energía eléctrica a través de los conductores ya instalados. Ya que usualmente el voltaje presenta un valor fijo, el aumento de energía eléctrica únicamente puede lograrse mediante el aumento de la corriente eléctrica. Con dichas condiciones físicas, el conductor presenta una resistencia al flujo de corriente, lo que genera un calentamiento, que depende de las características físicas del conductor, la magnitud de la corriente y las condiciones de enfriamiento ante las condiciones atmosféricas, a este calentamiento se le conoce como el efecto Joule.

Generalmente los conductores son del tipo ACSR (Aluminium Conductor, Steel Reinforced), el cual es un conductor bimetálico, como núcleo se tiene un conjunto de alambres de acero, alrededor alambres trenzados de aluminio. La generación de calor, se presenta en los alambres trenzados de aluminio, debido al efecto Joule, lo anterior es una consecuencia de que la corriente eléctrica se transporta principalmente en el aluminio. A la carga máxima de corriente que puede ser transportada por un conductor es denominada como ampacidad del conductor, determinada por la temperatura máxima de operación. La cantidad de energía eléctrica que puede ser transportada en un conductor, está determinada por la temperatura máxima permisible. [Morgan, V.T. \(1996\)](#) y [Harvey, J.S. \(1972\)](#) reportan que el incremento de temperatura provoca una pérdida de la fuerza de tensión en el conductor.

[Black, et al. \(1988\)](#) realizaron una comparación de los gradientes de temperatura en estado permanente para un conductor eléctrico acero-aluminio, con el objetivo de determinar la influencia de la temperatura en la ampacidad del conductor para diferentes situaciones, como materiales y condiciones atmosféricas, obteniendo como resultados que la temperatura en el centro del conductor es siempre superior a la temperatura calculada, demostrando que la suposición de temperatura uniforme no puede ser aplicada. En el núcleo de acero, la temperatura presenta un comportamiento isotérmico y es en el aluminio donde se da la mayor caída de temperatura.

La Teoría Constructal desarrollada por [\(Bejan, A. 1997,a\)](#), plantea que las formas geométricas en la naturaleza son producto de privilegiar uno o varios elementos físicos (nutrientes, fluidos, calor, etc.), para lograr un punto óptimo de desempeño. Las geometrías más comunes en la naturaleza son las de forma de árbol o de forma dendrítica, presentes en los vasos sanguíneos humanos, en la red alveolar de los pulmones, en los ríos, etc. Por lo que se puede plantear una red de transporte de calor, que sea óptima a partir de minimizar la resistencia térmica de todo un elemento geométrico.

Esta teoría considera un primer elemento de construcción de tamaño finito, denominado primer elemento de construcción, donde se agrupan todas las variables físicas asociadas al problema, sujeto a restricciones locales; posteriormente es posible aplicar restricciones globales, propias del sistema físico a la totalidad de la red optimizada. Este primer elemento es la construcción inicial, a partir de este, se construye la red optimizada.

Se han reportado trabajos previos sobre redes diseñadas para el transporte de fluidos o de calor. [Bejan, A. \(1997,b\)](#) reporta el enfriamiento de un volumen con generación de calor, mediante una red de forma rectangular con un material de alta conductividad; la red generada por la teoría constructal se construye a partir de optimizar la transferencia de calor en las direcciones horizontal y vertical para posteriormente, aplicar el mismo proceso de optimización a la construcción siguiente de manera que la red está conformada por bloques optimizados con insertos de material de alta conductividad.

Los resultados obtenidos son las relaciones geométricas en los espesores del inserto de material conductivo en cada construcción, así como el tamaño de cada elemento de cada nivel de la red. Las configuraciones de una red, modelada con la Teoría Constructal, no se limitan únicamente a configuraciones rectangulares. Lorente, S., et al. (2002) plantea diferentes configuraciones de una red de forma dendrítica para una geometría de disco, estableciendo las relaciones algebraicas entre puntos en el perímetro y el centro del disco.

Para el transporte de fluidos mediante una red, Wechsato, et al. (2002) reporta una red que transporta un fluido newtoniano, en una geometría de disco, desde el centro a un número de puntos en el perímetro, estableciendo las relaciones entre las longitudes del primer tubo de la primera construcción y la construcción siguiente. A partir de la resistencia de la caída de presión, determinan el número mínimo de tubos iniciales para tener una resistencia de presión mínima. Así como las relaciones geométricas en los puntos cercanos al perímetro.

Rocha et al. (2002), obtienen una red con un material de alta conductividad en un volumen en forma de disco con un elemento de generación de calor, considerando un sistema elemental con un inserto de material de alta conductividad, describiendo la transferencia de calor por conducción en todo el elemento para generar una resistencia térmica. Se obtiene el tamaño óptimo del primer elemento, así como la resistencia térmica mínima, las construcciones siguientes siguen el mismo principio de optimización. Los resultados reportados son las relaciones geométricas de cada elemento, así como la resistencia térmica óptima, en función de las conductividades de ambos materiales y de una relación de esbeltez. La distribución radial de los insertos en el disco es determinada. La temperatura decrece desde el centro del disco hacia el perímetro, conforme crece el número de ramificaciones de la red.

El actual desarrollo de los materiales ha permitido desarrollar materiales con una mejora significativa en sus propiedades físicas como son las aleaciones y materiales compuestos. Los principales materiales compuestos son aquellos que se componen de la combinación de polímeros, metales, cerámicos, matrices de carbono reforzadas con fibras o partículas, o ambas. Adams, P, et al.(1997) caracterizaron un material de alta conductividad, basado en el grafito en forma de fibras sobre una matriz de filamentos de fibra de carbono. Entre los resultados se reportan una alta conductividad térmica del orden de  $1 \times 10^2$ . Mediante técnicas experimentales de electroscopía y de difracción de rayos x reportan una estructura tridimensional continua. Zweben, C. (2005) reporta las principales características de diferentes materiales compuestos, entre los que destacan los compuestos de matrices de polímero, los compuestos carbón-carbón. Además reporta un listado de materiales con alta conductividad térmica y bajos coeficientes de expansión térmica para el rango de temperaturas  $300 \leq T \leq 400$  [K].

En el presente trabajo se modela una red con la Teoría Constructal, compuesta de un material de alta conductividad para desalojar el calor generado en el conductor eléctrico por conducción. En la red generada se optimiza el desalojo de calor desde el centro del elemento hasta un número  $n$  de puntos sobre el perímetro.

## 2 PRIMER ELEMENTO DE CONSTRUCCION

El primer elemento de construcción es el sector de un cuerpo cilíndrico de radio  $R$ , y de espesor  $t$ , con generación de calor uniforme; dicho elemento está conformado principalmente por aluminio con una conductividad térmica,  $k_{al}$ . La generación de calor se da por el efecto Joule. Para desalojar el calor desde el centro a un punto en la periferia se tiene un inserto de material de alta conductividad térmica  $k_p$ . El calor por el efecto Joule se define de la siguiente manera.

$$q''' = \frac{\lambda_{al} I^2}{\pi^2 R^4} \left[ \frac{W}{m^3} \right] \quad (1)$$

donde  $\lambda_{al}$  es la resistividad del aluminio,  $I$  la corriente eléctrica y  $R$  el radio del conductor.

Para modelar el problema físico, se hacen las siguientes consideraciones: la transferencia de calor se presenta en estado permanente. A partir de un análisis de orden de magnitud se puede obtener que las variaciones de la temperatura en dirección longitudinal son mucho menores que en la dirección radial, por lo anterior se considera que la temperatura del conductor varía únicamente en la dirección radial; dado que la conductividad del aire es baja, el efecto de los espacios entre los alambres trenzados de aluminio se considera despreciable, la distribución de corriente es uniforme y las conductividades de los materiales son constantes.

En el conductor eléctrico se considera que se tiene un número de insertos de material de alta conductividad térmica, desde el centro hasta el perímetro del conductor y el objetivo es optimizar la forma del primer elemento de construcción, que en este caso es un sector del conductor eléctrico. La optimización del área del sector definirá las siguientes construcciones hacia el perímetro.

Las dimensiones del primer elemento de construcción se pueden observar en la siguiente Figura 1.

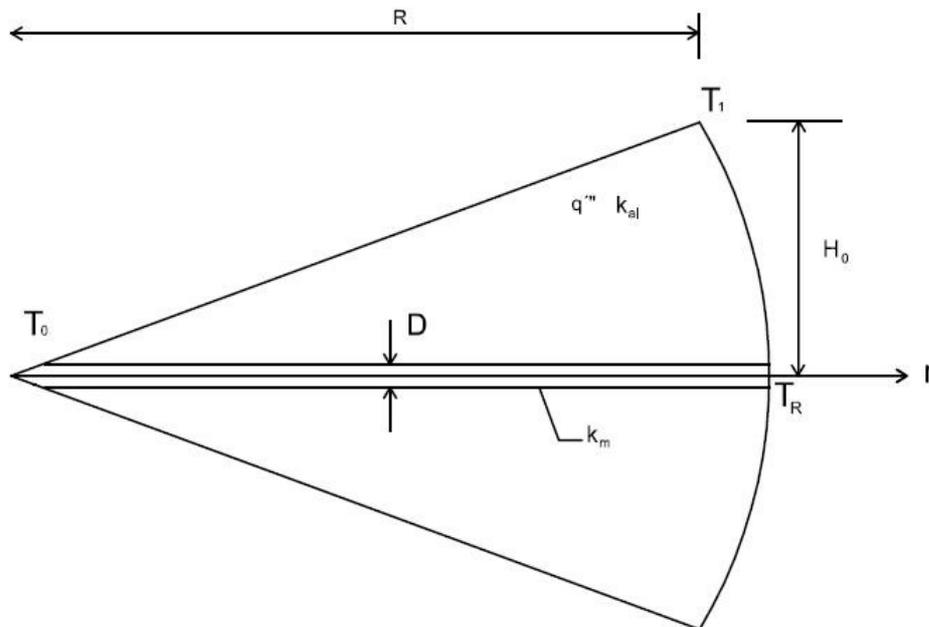


Figura 1 : Primer elemento de Construcción

El primer elemento se considera muy delgado, por lo que puede considerarse como un triángulo isósceles, el área del sector  $A_s$ , puede calcularse de la siguiente manera:  $A_s = 2H_0 \left( \frac{R}{2} \right) = H_0 R$  y se considera constante. A esta última se le conoce como restricción de área, considerando que la relación  $H_0 / R$  puede variar. El inserto de conductividad térmica  $k_m$ , tiene un espesor  $D$  constante.

## 2.1 Modelo Matemático

Para la optimización del desalojo de calor, se necesita optimizar el elemento de construcción anterior, con el fin de obtener la resistencia térmica del sector. Dado que el calor se genera en el primer elemento constructural, es posible definir las diferencias de temperatura en la dirección vertical y horizontal.

Para la dirección vertical, la diferencia es entre el extremo a temperatura  $T_0$  y la temperatura  $T_R$ ; la diferencia de temperaturas  $(T_1 - T_R)$ , se puede obtener a partir de un balance de energía en el extremo del inserto, considerando que el proceso de transferencia de calor se da por conducción; donde  $q''' H_0$ , es el calor generado en el elemento, obteniendo así la siguiente expresión:

$$q''' H_0 = 2k_{al} \frac{(T_1 - T_R)}{H_0} \quad (2)$$

En la dirección horizontal, se realiza un balance de energía en el inserto de material de alta conductividad térmica que conduce a,

$$q_c D_0 t + 2q''' t \left( \frac{H_0}{R} \right) r dr = \left( q_c + \frac{dq_c}{dr} dr \right) D_0 t \quad (3)$$

La ecuación diferencial obtenida es la siguiente expresión,

$$\frac{d^2 T}{dr^2} = \frac{2q'''}{k_m D_0} \left( \frac{H_0}{R} \right) r \quad (4)$$

Las condiciones de frontera son las siguientes:

$$\begin{aligned} r = R & \quad ; \quad \frac{dT}{dr} = 0 \quad , \\ r = 0 & \quad ; \quad T = T_0 \quad . \end{aligned} \quad (5)$$

La solución de la Ec.(4), sujeto a las condiciones de frontera anteriores, es la siguiente expresión:

$$T(r) = \frac{q'''}{k_m D_0} \left( \frac{H_0}{R} \right) \left( R^2 r - \frac{r^3}{3} \right) + T_0 \quad (6)$$

Para obtener la temperatura al final del inserto, se evalúa en  $r = R$ ,

$$T_R = T(r = R) = \frac{2}{3} \frac{q'''}{k_m D_0} H_0 R^2 + T_0 \quad (7)$$

De la Ec.(2), se despeja la temperatura  $T_R$ , y se sustituye en la Ec.(7), obteniendo así la diferencia total de temperatura en el sector del conductor.

$$T_1 - T_0 = \frac{q''' H_0^2}{2 k_{al}} + \frac{2}{3} \frac{q''' H_0}{k_p D_0} R^2 \quad (8)$$

Manipulando algebraicamente la Ec.(8), se puede definir la resistencia térmica del sector mediante la siguiente expresión,

$$R_s = \frac{(T_1 - T_0) k_{al}}{q''' A_s} = \frac{1}{2} \frac{H_0}{R} + \frac{2}{3} \frac{R}{H_0} \frac{1}{\phi_0 \kappa} \quad (9)$$

Donde se definen los siguientes parámetros adimensionales:  $\phi_0 = \frac{D_0}{H_0}$ ,  $\kappa = \frac{k_m}{k_{al}}$ .

$\phi_0$  representa la cantidad de material del inserto de conductividad térmica  $k_m$ , cantidad que es muy pequeña y  $\kappa$  es la relación de conductividades térmicas de los materiales. La resistencia térmica del sector  $R_s$  se optimiza con respecto a la relación de aspecto del elemento,  $H_0 / R$ . El resultado de la optimización produce la siguiente relación,

$$\left( \frac{H_0}{R} \right)_{opt} = \frac{2}{(3\phi_0 \kappa)^{\frac{1}{2}}} \quad (10)$$

Sustituyendo el resultado anterior en la Ec.(9), obtenemos la resistencia térmica óptima para el primer sector constructal:

$$R_{s\ opt} = \frac{2}{(3\phi_0 \kappa)^{\frac{1}{2}}} \quad (11)$$

De la Ec.(11), se puede ver la influencia de los parámetros físicos definidos anteriormente. Por otro lado, la Ec.(11) es válida únicamente para un primer sector inicial del conductor. El número de sectores  $N$  que se pueden colocar en el área total del conductor se define de la siguiente manera:

$$N = \frac{2\pi R}{2H_0} \quad (12)$$

Sustituyendo la Ec.(10) en la Ec.(11), obtenemos el número óptimo de sectores que caben en el área del conductor la expresión es la siguiente,

$$N_{opt} = \frac{\pi}{2}(3\phi_0\kappa) \quad . \quad (13)$$

A partir de la expresión anterior, se puede obtener la resistencia térmica de todo el elemento cilíndrico, en función de los parámetros adimensionales geométricos y físicos.

$$R_{total\ opt} = \frac{R_{s\ opt}}{N_{opt}} = \frac{4}{\pi(3\phi\kappa)} \quad . \quad (14)$$

Mediante el proceso de optimización es posible obtener el radio óptimo del sector, este puede ser determinado con el número de sectores óptimos  $N_{opt}$  y el área de cada sector, dicho radio se define de la siguiente manera:

$$N_{opt}A_s = \pi R_{opt}^2 \quad , \quad (15)$$

y al sustituir la Ec.(13) y el área, la expresión que se obtiene es la siguiente:

$$R_{opt} = (3\phi_0\kappa)^{\frac{1}{4}} \left( \frac{A_s}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad . \quad (16)$$

El radio óptimo del sector define entonces la construcción inicial.

## 2.2 Segunda Construcción

En la segunda construcción se determina una estructura más compleja del inserto de material de alta conductividad, con el fin de desalojar el calor del sector volumétrico a partir de la ramificación del primer elemento. Los insertos parten del centro a una longitud  $L_0$ ; las ramificaciones son la continuación de este primer elemento y dichos elementos son de una longitud  $L_1$  y espesor  $D_1$ . Las características geométricas de la segunda construcción se pueden apreciar en la Figura 2.

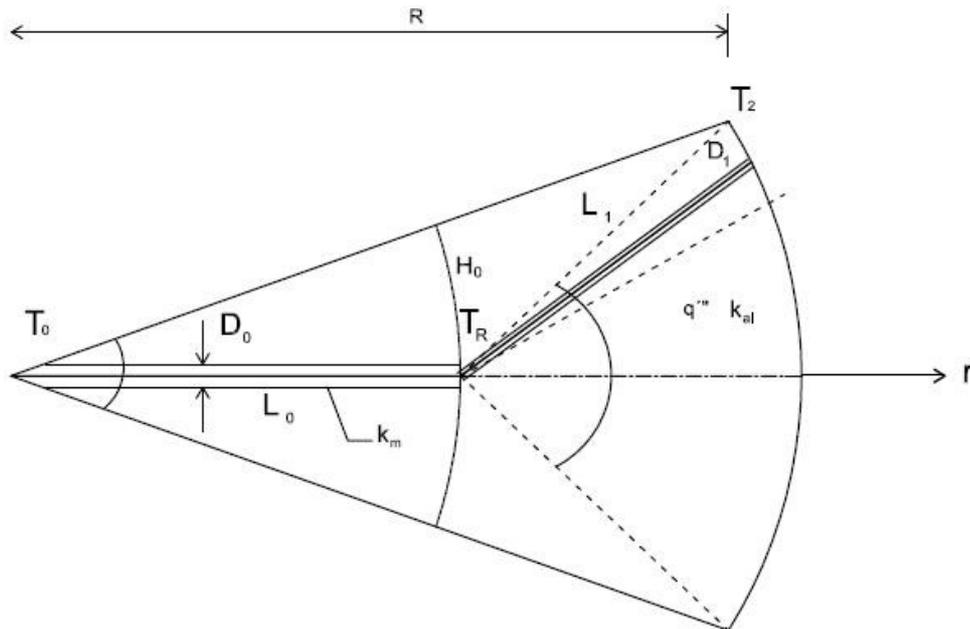


Figura 2: Segundo Elemento de construcción en el sector

El número de ramificaciones, es a su vez el número de puntos  $n$  en el perímetro donde se desaloja el calor. El objetivo en esta etapa es determinar la mínima resistencia de un número de sectores ramificados,  $N$  en todo el sector cilíndrico. Como cada ramificación es un pequeño sector de una relación de aspecto  $H_1/L_1$ , más el sector central, definido anteriormente. El número de ramificaciones es una cantidad a determinar, ya que la Teoría Constructal ha demostrado que no en todas las situaciones físicas es siempre óptimo el resultado de la dicotomía, es decir la bifurcación.

Considerando que cada sector ramificado tiene una relación de esbeltez muy pequeña, i. e.,  $H_1/L_1 \ll 1$ ; entonces puede determinarse fácilmente la relación de aspecto de cada sector ramificado como un solo elemento, definiendo a  $\phi = D_1/H_1$  como la cantidad de material de alta conductividad presente en el sector. Es importante recordar que el área del sector, definida como  $A_1 = H_1L_1$ , es considerada constante. La Ec.(17) se obtiene a partir de aplicar el método de optimización anterior en el elemento de área  $A_1$ , sin considerar la influencia del primer inserto de espesor  $D_0$ .

$$\left(\frac{H_1}{L_1}\right)_{opt} = \frac{2}{(3\phi\kappa)^{\frac{1}{2}}} \quad (17)$$

Dado que la transferencia de calor en esta construcción, continua en el extremo del inserto de longitud  $L_0$ , la relación de aspecto del primer elemento puede variar, por lo que se puede considerar que la relación de aspecto puede aproximarse de la siguiente manera:

$$\frac{H_0}{L_0} \cong \frac{\alpha}{2} \quad (18)$$

El ángulo  $\alpha$ , esta en función del número de elementos periféricos  $n$ , para determinar el número de elementos de área  $A_1$  que se pueden acomodar en el perímetro del elemento de radio  $R$ , es posible definir el ángulo del sector  $\alpha$ , a partir del radio óptimo y el área  $A_1$ , mediante la siguiente relación,

$$\alpha = \frac{2\pi n}{N} = \frac{2nH_1}{R_{opt}} = \frac{2^{\frac{3}{2}}n}{\tilde{R}(3\phi_1\kappa)^{\frac{1}{4}}}, \quad (19)$$

donde  $\tilde{R} = R / A_1^{1/2}$ .

El elemento de área  $A_0 = H_0 L_0$ , a partir de la ec.(19) puede ser definido como  $A_0 = (\alpha/2)L_0^2$ , donde la longitud puede considerarse de la siguiente forma  $L_0 \cong R - L_1$ , obteniendo así que el área inicial es la siguiente:

$$A_0 \cong \frac{2nR^2}{2\tilde{R}(3\phi_1\kappa)^{\frac{1}{4}}} \left(1 - \frac{L_1}{R}\right)^2. \quad (20)$$

La longitud  $L_1$ , puede definirse en función del área  $A_1$ , a partir de la Ec.(17) de tal forma que es posible obtener una longitud óptima definida como:

$$L_{1opt} = \left(\frac{A_1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} (3\phi_1\kappa)^{\frac{1}{4}}. \quad (21)$$

Manipulando algebraicamente la Ec.(20) obtenemos una expresión para el área  $A_0$ ,

$$A_0 \cong \frac{2^{\frac{1}{2}}nA_1\tilde{R}}{(3\phi_1\kappa)^{\frac{1}{4}}} \left(1 - \frac{(3\phi_1\kappa)^{\frac{1}{4}}}{2^{\frac{1}{2}}\tilde{R}}\right)^2. \quad (22)$$

Para determinar la resistencia térmica total de la red constructal total, se genera una expresión que contenga ambos elementos de área. La transferencia de calor vertical se obtiene realizando un balance de energía, sustituyendo el resultado obtenido de  $H_{1opt}$  y de la definición del área  $A_1$ ,

$$(T_2 - T_c) = \frac{q''' A_1}{k_{al} (3\phi_1\kappa)^{\frac{1}{2}}}; \quad (23)$$

y a partir de un balance de energía en la tira de material de alta conductividad se obtiene una expresión equivalente a la Ec.(4) de la primera construcción.

$$\frac{d^2T}{dr^2} = \frac{2q'''}{k_m D_0} \left( \frac{H_0}{L_0} r \right) \quad (24)$$

Las condiciones de frontera son las siguientes:

$$\begin{aligned} r = L_0 & \quad ; \quad \frac{dT}{dr} = \frac{q''' n A_1}{k_m D_0} \\ r = 0 & \quad ; \quad T = T_0 \end{aligned} \quad (25)$$

En la distancia de  $r = L_0$ , se puede apreciar que se está considerando el efecto del calor de los  $n$  elementos ramificados de la red. La expresión resultante de la Ec.(25) es la siguiente expresión:

$$T_c - T_0 = \frac{q''' L_0}{k_m D_0} \left( \frac{2}{3} A_0 + n A_1 \right) \quad (26)$$

Combinando las Ecs. (23) y (24), obtenemos la diferencia total de temperaturas de todo el sector cilíndrico, mediante la siguiente relación,

$$T_2 - T_0 = \frac{q''' A_1}{k_{al} (3\phi_1 \kappa)^{\frac{1}{2}}} + \frac{q''' L_0}{k_m D_0} \left( \frac{2}{3} A_0 + n A_1 \right) \quad (27)$$

Por otro lado, de la Ec.(27) se puede definir la resistencia térmica del sector,

$$\frac{(T_2 - T_0) k_{al}}{q''' A_1} = \frac{1}{(3\phi_1 \kappa)^{\frac{1}{2}}} + \frac{(R - L_1)}{\kappa D_0 A_1} \left( \frac{2}{3} A_0 + n A_1 \right) \quad (28)$$

La diferencia total de temperaturas en el elemento puede ser expresada en variables adimensionales, tomando en cuenta la expresión del área inicial, Ec.(22) y la definición del la longitud óptima  $L_{1opt}$ , la expresión es la siguiente:

$$\tilde{T} = \frac{(T_2 - T_0) k_{al}}{q''' A_1} = \frac{1}{(3\phi_1 \kappa)^{\frac{1}{2}}} + \frac{(3\phi_1 \kappa)^{\frac{1}{4}}}{2^{\frac{1}{2}} \kappa \phi_1 \tilde{D}} \left[ \tilde{R} - \frac{(3\phi_1 \kappa)^{\frac{1}{4}}}{2^{\frac{1}{2}}} \right] * \left[ \frac{2^{\frac{3}{2}} n \tilde{R}}{3 (3\phi_1 \kappa)^{\frac{1}{4}}} \left( 1 - \frac{(3\phi_1 \kappa)^{\frac{1}{4}}}{2^{\frac{1}{2}} \tilde{R}} \right)^2 + n \right] \quad (29)$$

El parámetro  $\tilde{D}$ , en la Ec.(29), es la relación entre los espesores de los insertos de material de alta conductividad, dicho parámetro se define de la manera siguiente:  $\tilde{D} = D_0 / D_1$ . La resistencia total térmica depende de los parámetros  $n, \tilde{D}, \tilde{R}$  y las características del material de alta conductividad. La variable adimensional  $\tilde{D}$ , puede expresarse en función de la cantidad de material de alta conductividad en el elemento cilíndrico, lo anterior puede representarse por el área transversal,

$$A_p = N D_1 L_1 + \frac{N}{n} D_0 L_0 \quad (30)$$

Expresado en variables adimensionales, obtenemos la fracción  $\phi$ , que es el área ocupada de material en todo el disco de radio  $R$ ,

$$\phi = \frac{A_p}{\pi R^2} = \frac{(3\kappa\phi)^{\frac{1}{4}} \phi}{2^{\frac{1}{2}} \tilde{R}} + \frac{\tilde{D}\phi}{n\tilde{R}} \left[ \tilde{R} - \frac{(3\kappa\phi)^{\frac{1}{4}}}{2^{\frac{1}{2}}} \right]; \quad (31)$$

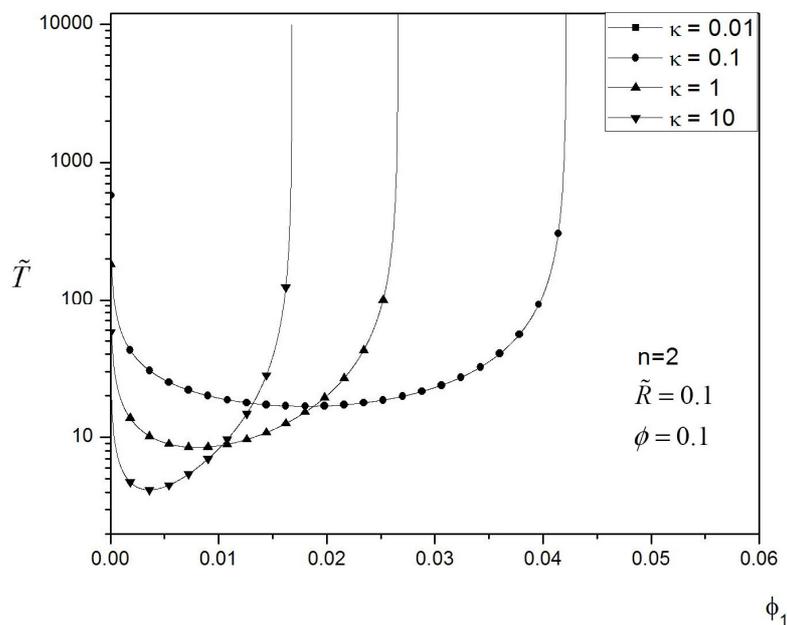
Para la fracción  $\phi$ , se toma un valor fijo para generar los resultados, la resistencia térmica total, Ec.(29), depende de la presencia del material de alta conductividad,  $\kappa$ , y de las características geométricas  $(\tilde{D}, \tilde{R})$ .

### 3 RESULTADOS

Para la obtención de resultados, un parámetro importante es la relación de conductividades  $\kappa$ , ya que la transferencia de calor se da principalmente en el aluminio. La relación de conductividades se da con valores posibles de materiales compuestos que podrían ser una solución para desalojar el calor del conductor eléctrico. Los materiales compuestos reportados por (Zweben, C., 2005), son aquellos constituidos con matrices de polímero  $\left( k = 330 \left[ \frac{W}{mk} \right] \right)$  y los compuestos carbón-carbón  $\left( k = 800 \left[ \frac{W}{mk} \right] \right)$ ; tomando en consideración que la conductividad del aluminio tiene un valor de  $k = 209.3 \left[ \frac{W}{mk} \right]$ , el rango de valores de la relación de conductividades  $\kappa$  es de  $1.57 \leq \kappa \leq 3.82$ . Por lo anterior, se consideran únicamente valores propuestos de  $\kappa$ , debido a la presencia del aluminio, como un buen conductor eléctrico da una limitación física a utilizar un material conductor de los insertos.

Los resultados obtenidos son la variación de la resistencia térmica, Ec.(29), en función de  $\phi$ , tomando como constante el término adimensional  $\tilde{R}$  y  $\phi$ , además de un número  $n$  de elementos bifurcados, para diferentes valores del parámetro adimensional que relaciona las conductividades  $\kappa$ .

Como se puede observar en la Figura 3, el comportamiento de la resistencia térmica  $\tilde{T}$ , para distintos valores de  $\kappa$ , tiene un valor mínimo. Por lo tanto también un valor óptimo de  $\phi$ . Lo anterior significa que para un material conductor de alta conductividad, la presencia de dicho material en los insertos es menor.



**Figura 3:** Resistencia total adimensional  $\tilde{T}$  - fracción de material  $\phi_1$

A partir de la Ec.(31) se puede despejar la variable adimensional  $\tilde{D}$ , de tal manera que la expresión resultante quede en función de los parámetros físicos y geométricos que gobiernan la resistencia térmica total.

En la Figura 4, se muestra el comportamiento de la relación de espesores  $\tilde{D}$ , para diferentes valores de la variable  $\kappa$ . La relación de espesores presenta valores de  $\phi_1$  óptimos, para valores más altos de  $\kappa$ , se tiene un  $\phi_1$  muy pequeño, y no presenta un valor mínimo. Es decir, en el caso de  $\kappa = 2.5$ , se tiene un valor de  $\phi_{1\text{opt}} = 3 \times 10^{-5}$ .

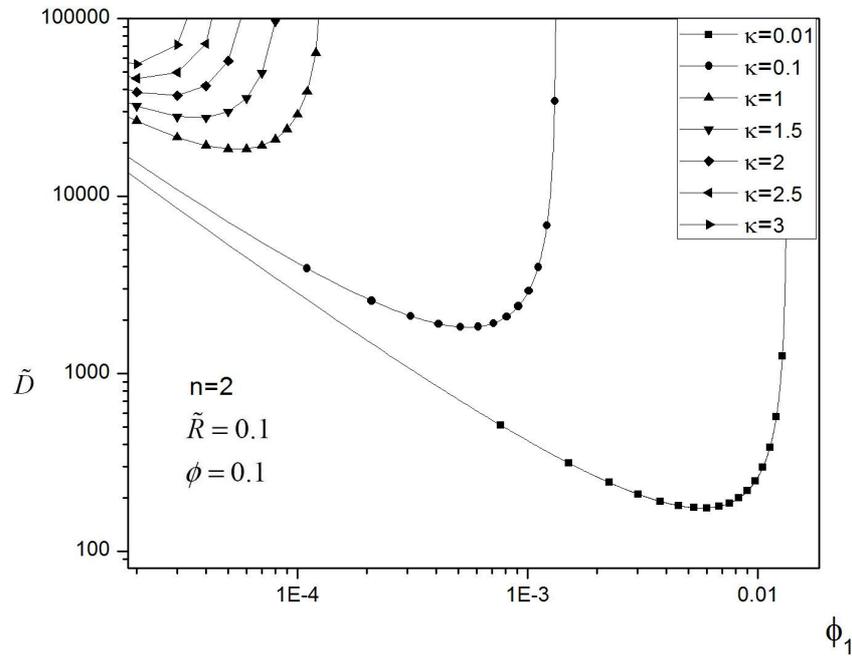


Figura 4: Relación de espesores  $\tilde{D}$  - fracción de cantidad de material  $\phi_1$

Los valores mínimo obtenidos para cada valor de la relación de conductividades, se utiliza para poder graficar el comportamiento de la variable adimensional  $\tilde{D}$ , con respecto a la escala de longitud adimensional  $\tilde{R}$ , para diferentes valores del número de ramificaciones  $n$ . La Figura 5 muestra un comportamiento  $\tilde{D}$  menor conforme la longitud es mayor, es decir entre más sectores ramificados se tengan mayor será la relación de espesor que presenta.

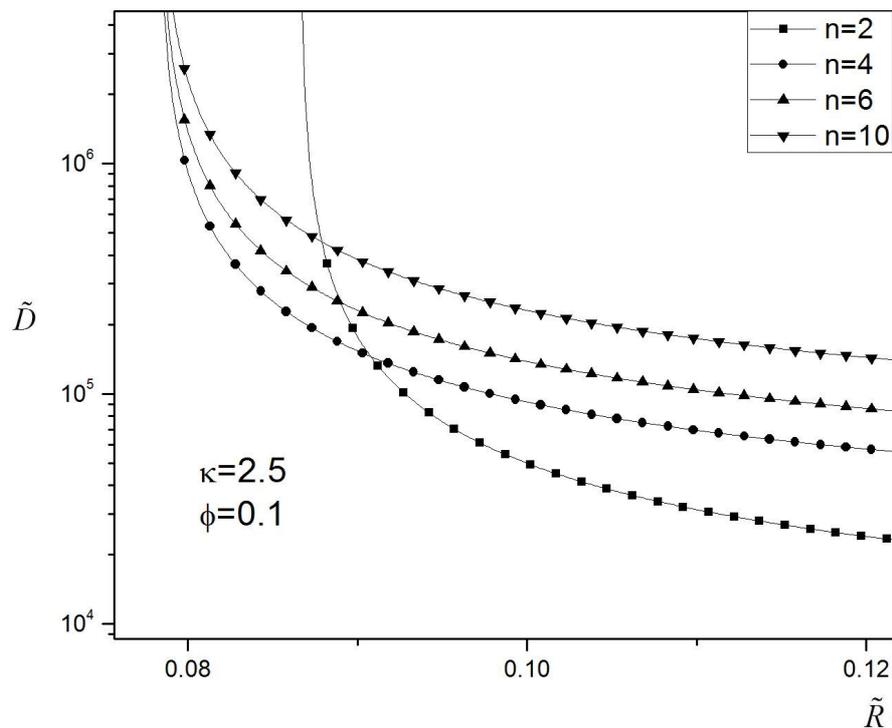


Figura 5: Relación de espesores  $\tilde{D}$  - escala de longitud  $\tilde{R}$

#### 4 CONCLUSIONES

A partir de los resultados obtenidos, la teoría constructal es un método de optimización que permite generar una red constructal a partir de parámetros físicos, de manera que se puede caracterizar la red en cada etapa de construcción; en este caso, el número de sectores iniciales, un radio óptimo, así como la relación de aspecto de cada construcción. En el conductor eléctrico, el diámetro de la sección de material conductor aluminio, presenta un radio para conductores ACSR de  $0.019254 [m]$ ; esto presenta un área muy pequeña, por lo que se puede reflejar en los valores muy pequeños de  $\phi_{1, opt}$ , tal como se observa en la Figura 3 y Figura 4.

La Figura 3 muestra que es posible obtener una resistencia térmica menor para un material de alta conductividad al menos del doble de la conductividad del aluminio. A su vez, la relación de espesores de cada inserto presenta valores mínimos para una fracción de material  $\phi_1$  en el conductor. Es decir se puede optimizar la cantidad de material del inserto. El aluminio es un excelente conductor eléctrico, por lo que el parámetro  $\kappa$ , no puede tomar valores muy altos, ya que no reflejaría una situación real en un conductor eléctrico, la propuesta de utilizar materiales compuestos que por sus características presentan una gran conductividad térmica, representa una limitante para poder determinar la posibilidad de utilizar dichos materiales para enfriar un conductor eléctrico mediante insertos radiales.

El proceso de optimización se concluyó en dos etapas, la teoría constructal permite generar una red con los niveles necesarios de ramificaciones, para poder obtener las características geométricas óptimas de la red, sujeto a restricciones globales.

## AGRADECIMIENTOS

J. Ojeda y F. Méndez agradece al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología de México por el apoyo para desarrollar el presente trabajo bajo el número de contrato 79811

## REFERENCIAS

- Adams, P.M., Katzman, H.A., Rellick, G.S., Characterization of High Thermal Conductivity Carbon Fibers and a Self-Reinforced Graphite Panel. *Carbon*.36, 233-245,1998.
- Bejan, A., *Advanced Engineering Thermodynamics*. John Wiley & Sons, 1997a.
- Bejan, A: Constructal Theory Network of Conduction Paths for Cooling a Heat Generating Volume. *Int. J. of Heat and Mass Transfer.*, 40,799-816,1997b.
- Black, W.Z., Collins, S.S., Theoretical Model for Temperature Gradients within Bare Overhead Conductors. *IEEE Trans. on Power Delivery*. PWRD-3, No 2,707-715,1988.
- Harvey, J.S., Effect of Elevated Temperature Operation on the Strength of Aluminum Conductors. *IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems*. PAS-91, 1769-1772, 1972.
- Lorente, S., Wechsato, W., Bejan, A., Tree-Shaped Flow Structures Designed by Minimizing Path Lengths. *Int. J. of Heat and Mass Transfer.*, 45,3299-3312,2002.
- Morgan, V.T., Effect of Elevated Temperature Operation on Tensile Strength of Overhead Conductors. *IEEE Trans. on Power Delivery*. PWRD-11,345-352, 1996
- Rocha, L.A.O., Lorente, S., Bejan, A., Constructal Design for Cooling a Disc Shaped Area by Conduction. *Int. J. of Heat and Mass Transfer.*, 45,1643-1652,2002.
- Wechsato, W., Lorente, S., Bejan, A. Optimal Tree-Shaped Networks for Fluid Flow in a Disc-Shaped Body. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 45:4911-4924,2002.
- Zweber, C., Electronic Packaging Materials. *Advanced Materials and Processes*.163, 10, 33-37, 2005 (ASM International)