

AVALIAÇÃO ESTOCÁSTICA DA INFLUÊNCIA DE PARÂMETROS NO COMPORTAMENTO DE MODELOS DINÂMICOS - APLICAÇÃO EM EIXO ROTATIVO COM TRINCA.

Alberto C.G.C. Diniz^a, Marcus V. Girão de Moraes^{a,b} and Mario Olavo M. de Carvalho^a

^a*Universidade de Brasília, Departamento de Engenharia Mecânica, Grupo de Dinâmica de Sistemas (UnB/FT/EnM/GDS), Campus Universitário Darcy Ribeiro, Asa Norte, 70910-900, Brasília, DF, Brasil*
- e-Mail: {adiniz,molavo}@unb.br -

^b*Universidade de Brasília, Faculdade do Gama, Laboratório de Vibrações e Acústica (UnB/FGA/NVHGama), Área Especial 02 lote 14 Setor Central, 72405-610, Gama, DF, Brasil*
- e-mail: mvmorais@unb.br -

Palavras-Chave: Maquinas rotativas, métodos estocásticos, método de perturbação

Resumo. Modelos descritivos do comportamento dinâmico de eixos trincados são bastantes estudados, considerando a importância da identificação prematura de trincas para diminuir riscos de acidentes e prejuízos com máquinas rotativas. Neste trabalho é feita a avaliação de um dos modelos mais utilizados para o estudo de rotores com eixos trincados, considerando a influência da incerteza sobre os parâmetros deste modelo. É analisada a sensibilidade da resposta do modelo, considerando incertezas nos parâmetros definidores, a saber: amortecimento, velocidade de rotação, desbalanceamento, geometria da trinca, bem como erros experimentais na medição da resposta do sistema. A função de densidade de probabilidade de cada parâmetro aleatório foi definida usando-se o princípio da entropia máxima e a resposta aleatória do sistema estocástico obtida usando-se simulação de Monte-Carlo. O modelo determinístico adotado possui dois graus de liberdade e considera um rotor de De Laval com trinca respirante. São apresentadas as equações básicas do modelo adotado e os resultados obtidos. Estes resultados permitem avaliar a eficiência do modelo usado para a identificação da presença de trincas em eixos rotativos e a influência dessa trinca no comportamento vibratório da estrutura em face da ordem de grandeza das incertezas envolvidas

1 INTRODUÇÃO

Trincas tem sido a causa de muitos prejuízos devido a falhas em máquinas rotativas e equipamentos na indústria (Ishida, 2008). Além dos danos materiais e dos prejuízos causados pela parada das máquinas existem também os riscos para a segurança dos operadores. Muitos trabalhos tem sido desenvolvidos no sentido de propor uma metodologia de monitoração de eixos rotativos que permita a identificação da presença da trinca antes que esta atinja dimensões que ponha em risco o funcionamento das máquinas e operadores. O desafio é encontrar uma forma de identificação confiável da presença da trinca iniciante sem afetar a operação do equipamento. Os vários estudos realizados dedicam-se a explicar o comportamento dinâmico do eixo trincado quando em rotação, propondo modelos descritivos do comportamento da trinca, bem como trabalhos de simulação numérica e experimentais com o objetivo de propor metodologias de identificação on-line da presença de trincas. Excelentes trabalhos de revisão sobre esse tema foram publicados por Wauer (1990), Dimarogonas (1996), Sabnavis et al. (2004) e Papadopoulos (2008).

As técnicas mais comuns para identificação de trincas em eixos rotativos fazem uso da medição de vibração (Eisenmann, 2000) analisando as modificações no espectro do sinal medido (Saavedra and Cuitino, 2002) ou nas frequências naturais do sistema (Dimarogonas, 1996). Contudo esses métodos possuem limitações associadas à pequena influencia da trinca no comportamento dinâmico do sistema frente às outras variáveis envolvidas. Outros métodos usam modelos para predição do comportamento dinâmico do eixo trincado (Bachschnid et al., 2000). Esses modelos tentam reproduzir a variação da rigidez do sistema devido a presença e posição da trinca ao longo de uma revolução do eixo rotativo. Alguns consideram apenas influencias geométricas, outros aspectos do contato e da evolução da trinca, usando princípios da mecânica da fratura (Papadopoulos and Dimarogonas, 1987). São propostos modelos com parâmetros concentrados, outros utilizam discretização por elementos finitos, todos tentando prever por simulação o comportamento real do eixo trincado.

A verificação e validação desses modelos é fundamental para garantir a confiabilidade das previsões. Contudo os estudos experimentais nessa área são limitados, considerando a dificuldade de se reproduzir sob condições controladas em laboratório uma trinca real. Os trabalhos experimentais normalmente tratam de medições realizadas considerando rasgos de dimensões reduzidas que possuem uma correlação parcial com o comportamento da trinca real ou utilizam de trincas provocadas, mas com geometria e desenvolvimento não controlados como exigiria a comparação com os modelos preditivos computacionais. Uma alternativa é o uso de uma abordagem estocástica onde os vários parâmetro envolvidos no problema são tratados estatisticamente. Recentes trabalhos utilizam uma abordagem estocástica para estudar a acuidade das previsões de modelos computacionais, considerando os aspectos aleatórios intrínsecos a realidade física dos problemas de engenharia e a robustez da formulação matemática dessa abordagem (Ghanem and Doostan, 2006).

Assim, neste trabalho estuda-se a acuidade de previsão de um modelo proposto para a identificação da presença de trincas em eixos rotativos. O modelo usado considera um rotor de De Laval com uma trinca transversal (Gasch, 2008). Considera-se a influência da trinca na flexibilidade do eixo e o comportamento "respirante" da trinca é modelado segundo a proposição de Mayes and Davies (1984)

2 EQUAÇÃO DO MOVIMENTO

As equações do movimento de um rotor simples com o eixo trincado tem a seguinte forma (Gasch, 2008):

$$\begin{bmatrix} m & \\ & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{w}_z \\ \ddot{v}_y \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} d & \\ & d \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{w}_z \\ \dot{v}_y \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{11} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_z \\ v_y \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} mg \\ 0 \end{pmatrix} + \varepsilon m \Omega^2 \begin{pmatrix} \cos(\beta + \Omega t) \\ \sin(\beta + \Omega t) \end{pmatrix} \quad (1)$$

ou seja,

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{S}(\mathbf{u}, t)\mathbf{u} = \mathbf{p}_o + \mathbf{p}_u \quad (2)$$

onde, w_z e v_y são os deslocamentos a meio comprimento no plano perpendicular ao eixo, paralelo ao disco de massa m , peso mg e coeficiente de amortecimento viscoso d . A matriz de massa $\mathbf{M} = \text{diag}(m, m)$ corresponde ao disco do rotor. E o de amortecimento $\mathbf{D} = \text{diag}(d, d)$ esta associado a dissipação nos mancais do sistema rotativo. Desconsidera o peso próprio do eixo. E $\mathbf{p}_u = \varepsilon m \Omega^2 \cdot [\cos(\beta + \Omega t) \sin(\beta + \Omega t)]^T$ é o vetor força devido a massa excêntrica. A excentricidade ε corresponde distância entre o centro de gravidade e o centro do eixo. O ângulo β corresponde ao ângulo entre a excentricidade ε e o centro da trinca.

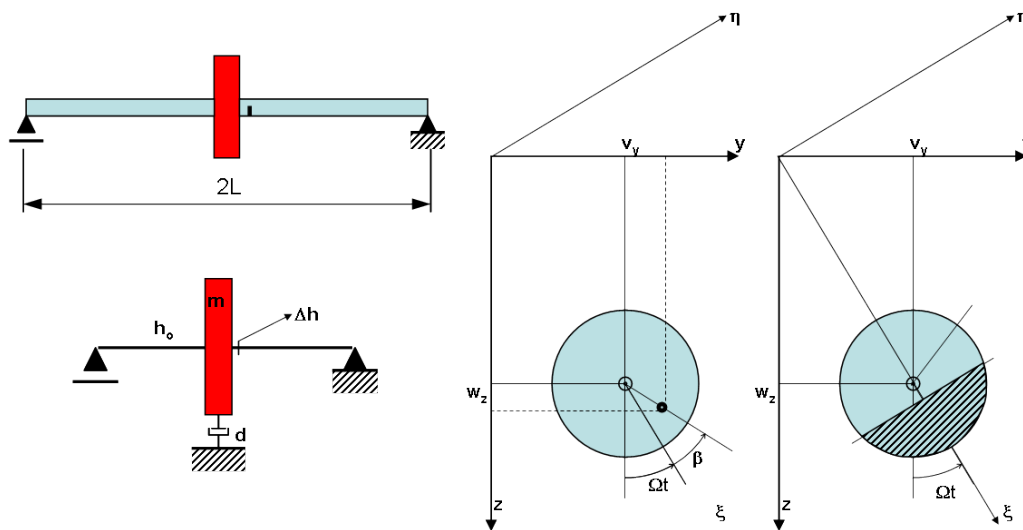


Figure 1: Rotor simples com eixo trincado. Coordenadas inerciais $z - y$ e eixos rotativos $\zeta - \eta$. Graus de liberdade $w_z v_y$.

De forma geral, as trincas em rotor são não-lineares e dependentes-tempo. Na presente abordagem, a matriz de rigidez do rotor trincado pode ser tratado da seguinte forma:

$$\mathbf{S}(\mathbf{u}, t) = \mathbf{S}_o + \Delta\mathbf{S}(\mathbf{u}, t) \quad (3)$$

onde $\mathbf{S}_o = \text{diag}(s_o, s_o)$ é a rigidez do eixo diagonal sem trinca. A rigidez do presente rotor é dado por $s_o = 3EI/L^3$. O termo aditivo $\Delta\mathbf{S}$ representa a contribuição negativa da trinca na matriz de rigidez, que é dependente do deslocamento $\mathbf{u}(t)$ e do ângulo de rotação do rotor

$\psi = \Omega t$. Contudo a trinca no rotor causa usualmente pequenas mudanças de rigidez, *i.e.*, $\Delta \mathbf{S}$ é pequena comparado a \mathbf{S}_o .

A resposta vibratória do rotor pode ser também dividida em $\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_o + \Delta \mathbf{u}(t)$, onde a deflexão estática do rotor sem trinca \mathbf{u}_o é dado por,

$$\mathbf{u}_o = \begin{pmatrix} \mathbf{w}_o & \mathbf{v}_o \end{pmatrix}^T = \mathbf{S}_o^{-1} \mathbf{p}_o \quad (4)$$

e $\Delta \mathbf{u}(t)$ descreve o comportamento dinâmico. A deflexão estática é dada pela expressão

$$w_{z,stat} = mg/s_o = g/\omega^2,$$

onde s_o é a rigidez do rotor sem trinca, e a frequência natural do rotor $\omega^2 = s_o/m$.

Se assumirmos a dominância do peso próprio na deformação elástica, *i.e.*, $\Delta \mathbf{u}(t) \ll \mathbf{u}_o$, e substituindo (3), modificamos as equações de movimento não-lineares (2) da seguinte forma,

$$\mathbf{M}\Delta \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{D}\Delta \dot{\mathbf{u}} + [\mathbf{S}_o + \Delta \mathbf{S}(t)]\Delta \mathbf{u} = -\Delta \mathbf{S}(t)\mathbf{u}_o + \mathbf{p}_u \quad (5)$$

Esta equação de movimento agora é linear, contudo periodicamente variantes no tempo. Enquanto $\mathbf{u}_o \gg \Delta \mathbf{u}(t)$, a deflexão devido ao peso é responsável pela abertura e fechamento do trinca, e não os pequenos movimentos de vibração $\Delta \mathbf{u}$: $\Delta \mathbf{S}(\mathbf{u}, t) \rightarrow \Delta \mathbf{S}(t)$.

A rigidez da trinca $\Delta \mathbf{S}(t)$, varia periodicamente com $\psi = \Omega t$, rege o comportamento de estabilidade do sistema no lado esquerdo da equação (5), *i.e.*, sistema homogêneo. No lado direito, a expressão $-\Delta \mathbf{S}(t)\mathbf{u}_o$ governa a vibração forçada devido a trinca.

Pela análise de Floquet, analisa-se a estabilidade do sistema rotativo. Se a estabilidade for garantida, a vibração forçada pode ser determinado a partir de um sistema invariante no tempo.

$$\mathbf{M}\Delta \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{D}\Delta \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{S}_o\Delta \mathbf{u} = -\Delta \mathbf{S}(t)\mathbf{u}_o + \mathbf{p}_u \quad (6)$$

pois o termo $\Delta \mathbf{S}(t)\Delta \mathbf{u}$ é um termo desprezível de segunda ordem.

A dominância do peso próprio na deformação elástica, *i.e.*, as amplitudes de vibração são pequenos comparados com a deflexão estática, pode ser facilmente verificado para um rotor simples. A deformação estática é $w_{z,stat} = mg/s_o$ onde s_o é a rigidez do eixo integro. Haja vista que a frequência própria do rotor é dada por $\omega_o^2 = s_o/m$, pode-se reescrever a expressão como $w_{z,stat} = g/\omega_o^2$. Se a frequência própria do rotor sem trinca é conhecido, temos como estimar a amplitude vibratória limite de aplicação a presente teoria linearizado, Figura 2. Na prática, apenas bandas estreita próximas da ressonância estão excluídas, $\Omega/\omega_o = \eta = 1/3, 1/2$ e 1.

3 MODELO DE TRINCA 'DOBRADIÇA'

Se uma trinca é submetida a compressão então esta fecha-se e o eixo restaura sua rigidez completa à flexão. No entanto, se ela é submetida a forças de tração, a trinca abre-se. A rigidez à flexão do eixo diminui resultado de uma flexibilidade adicionada ao sistema, Figura 3,

$$\begin{pmatrix} w_\xi \\ v_\eta \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} h_o + \Delta h_\xi & \\ & h_o + \Delta h_\eta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} f_\xi \\ f_\eta \end{pmatrix} \quad (7)$$

Para toda fissura profunda, a flexibilidade transversal Δh_η é relativamente sem importância em comparação a flexibilidade principal Δh_ξ , como foi demonstrado por cálculos e estudos experimentais (Gasch, 2008).

Se um eixo trincado gira lentamente sob seu próprio peso, a trinca abre e fecha uma vez por revolução. Este comportamento é conhecido como "respiração" da trinca.

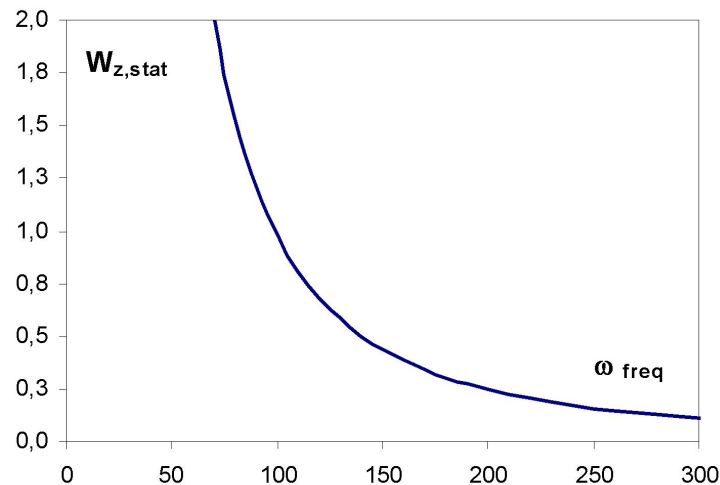


Figure 2: Deflexão estática $w_{z,stat}$ do rotor em função da velocidade crítica de rotação (frequência própria).

4 DERIVANDO A MATRIZ DE RIGIDEZ DA TRINCA

A fim de obter a matriz de rigidez para as equações (2) ou (5), usamos a formulação da matriz de flexibilidade (7), de um eixo com a dobradiça em coordenadas rotativas.

$$\begin{pmatrix} w_\xi \\ v_\eta \end{pmatrix} = \left(\begin{bmatrix} h_o & \\ & h_o \end{bmatrix} + f(t) \cdot \begin{bmatrix} \Delta h_{\xi,max} & \\ & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{pmatrix} f_\xi \\ f_\eta \end{pmatrix} \quad (8)$$

onde a primeira matriz corresponde aos termos de flexibilidade h_o de um rotor integro, e segundo termo corresponde ao termo de flexibilidade adicional $\Delta h_{\xi,max}$ para uma trinca plenamente aberta.

Descreve-se a relação entre as coordenadas rotationais e inerciais pela matriz de transformação,

$$\begin{pmatrix} w_\xi \\ v_\eta \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \Omega t & \sin \Omega t \\ -\sin \Omega t & \cos \Omega t \end{bmatrix} \begin{pmatrix} w_z \\ v_y \end{pmatrix} \rightarrow \mathbf{u}_{rot} = \mathbf{T} \mathbf{u} \quad (9)$$

A fim de determinar a matriz de rigidez em coordenadas inerciais, é necessário inverter primeiramente a equação (8) de flexibilidade para rigidez em coordenadas rotacionais,

$$\begin{pmatrix} f_\xi \\ f_\eta \end{pmatrix} = \left(\begin{bmatrix} s_o & \\ & s_o \end{bmatrix} + f(t) \cdot \begin{bmatrix} \Delta s_\xi & \\ & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{pmatrix} w_\xi \\ v_\eta \end{pmatrix} \quad (10)$$

ou seja,

$$\mathbf{f}_{rot} = [\mathbf{S}_{o,rot} + \Delta \mathbf{S}(t)_{rot}] \mathbf{u}_{rot} \quad (11)$$

onde $1/(h_o + \Delta h) = s_o - \Delta s$.

A expressão Δs_ξ and s_o , para um rotor real, pode ser determinado experimentalmente pela determinação da frequência própria para trinca fechada ω_o (na horizontal superior), e para trinca aberta ω_w (na horizontal inferior), ou seja,

$$\left(\frac{\omega}{\omega_o} \right) = 1 - \frac{\Delta s}{s_o} \quad (12)$$

Na equação (10), substituímos o termo de deslocamento \mathbf{u}_{rot} pela matriz de transformação (9), e pré-multiplicamos \mathbf{T}^T pela esquerda. Obtemos assim as forças elásticas em coordenadas

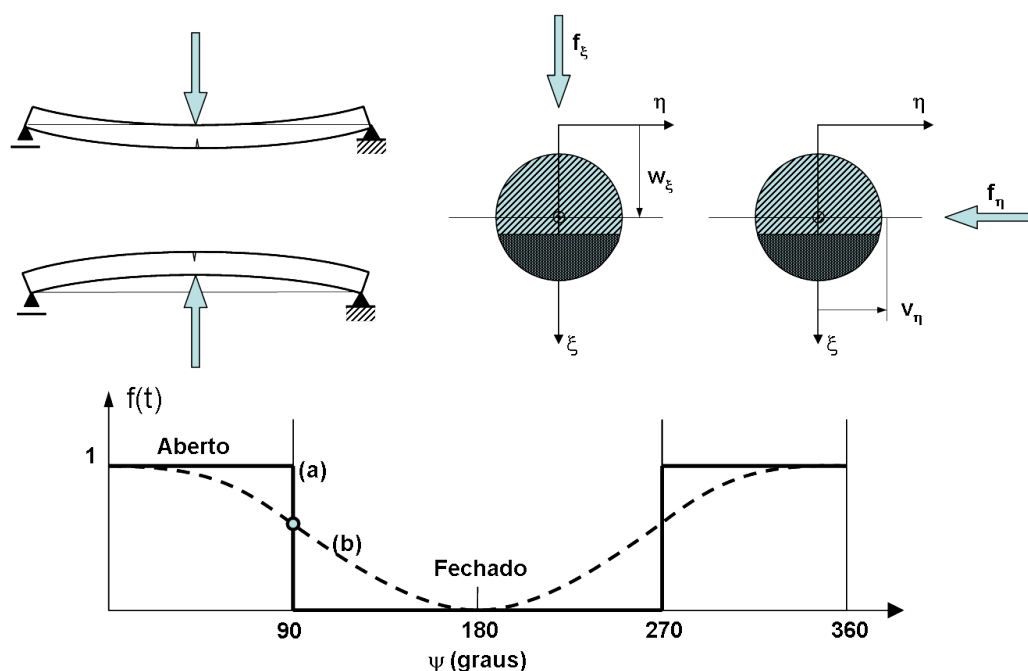


Figure 3: Flexibilidade adicional, principal Δh_ξ e cruzada Δh_η , para trincas plenamente abertas. Comportamento de fechamento do modelo de dobradiça dominado pelo peso(a) e a função modificada de Mayes $(1 + \cos \Omega t)/2$ para trincas profundas (Mayes and Davies, 1984).

inerciais $\mathbf{f} = \mathbf{T}^T(t)\mathbf{f}_{rot}$, conforme descrito abaixo,

$$\mathbf{S}_o + \Delta\mathbf{S}(t) = \mathbf{T}^T(\mathbf{S}_{o,rot} + \Delta\mathbf{S}_{rot}) \quad (13)$$

Isto pode ser avaliado como,

$$\mathbf{S}_o + \Delta\mathbf{S}(t) = \begin{bmatrix} s_o & \\ & s_o \end{bmatrix} - f(t)\Delta\mathbf{s} \begin{bmatrix} 1 + \cos 2\Omega t & \sin 2\Omega t \\ \sin 2\Omega t & 1 - \cos 2\Omega t \end{bmatrix} \quad (14)$$

A expressão acima é claramente temporal periódico em função de $f(t)$.

5 VIBRAÇÕES FORÇADAS

Caso garanta-se a estabilidade do sistema Gasch (1993), logo uma boa aproximação para o problema de vibrações forçadas pode ser obtido por um sistema invariante no tempo (6). O termo $\Delta\mathbf{S}(t)\Delta\mathbf{u}$, equação (5), é de segunda ordem desprezível. A matriz de rigidez (14) toma a seguinte forma,

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} m & \\ & m \end{bmatrix} \Delta\ddot{\mathbf{u}} + \begin{bmatrix} d & \\ & d \end{bmatrix} \Delta\dot{\mathbf{u}} + \begin{bmatrix} s_o & \\ & s_o \end{bmatrix} \Delta\mathbf{u} \\ & = \frac{1}{2}\Delta\mathbf{s}f(t) \begin{bmatrix} 1 + \cos 2\Omega t & \sin 2\Omega t \\ \sin 2\Omega t & 1 - \cos 2\Omega t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m & \\ & m \end{bmatrix} - \Delta\mathbf{S}(t)\mathbf{u}_o + \mathbf{p}_u \end{aligned} \quad (15)$$

O sistema rotativo comporta-se praticamente como um eixo intacto com uma excitação especial devido a trinca $\Delta\mathbf{S}(t)\mathbf{u}_o$ e outra excitação devido ao desbalanceamento.

Os dois componentes deflexão Δw_z e Δv_y podem ser combinados como um vetor complexo $\Delta r = \Delta w_z + j\Delta v_y$ with $j = \sqrt{-1}$. Desta forma temos,

$$m\Delta\ddot{r} + d\Delta\dot{r} + s_o\Delta\mathbf{u} = 0.5w_{z,stat}\Delta\mathbf{s}f(t)[1 + e^{2j\Omega t}] + \varepsilon m\Omega^2 e^{j(\Omega t + \beta)} \quad (16)$$

k	Harmônicos Devido a Geometria da Trinca	b_k
-4	$4 \times \Omega$	0
-3	Rodopio Reverso	$3 \times \Omega$
-2		$2 \times \Omega$
-1		$1 \times \Omega$
0	Estático, deflexão adicional	0.250
+1	$1 \times \Omega$	0.318
+2	Rodopio Direto	$2 \times \Omega$
+3		$3 \times \Omega$
+4		$4 \times \Omega$

Table 1: Coeficientes de Fourier para cada harmônico da excitação da trinca e seus significados físicos

5.1 Vibrações Forçadas Devido ao Desbalanceamento

Para entender o modelo analítico, examina-se apenas a resposta vibracional devido ao desbalanceamento, *i.e.* $\Delta s = 0$. Com uma solução do tipo $\Delta r = \Delta R \varepsilon e^{j(\Omega t + \beta)}$, determina-se a resposta ao desbalanceamento na equação (16),

$$\Delta r(t) = \varepsilon \left[\frac{\eta^2}{1 - \eta^2 + 2jD} \right] e^{j(\Omega t + \beta)} \quad (17)$$

onde $\eta = \Omega/\omega_o$ é uma velocidade angular específica do sistema e $D = d/2m\omega_o$ é o fator de amortecimento adimensional do sistema.

5.2 Vibrações Forçadas Devido a Trinca

A excitação força periódica devido à trinca é proporcional à variação da rigidez Δs e da deflexão estática $w_{z,stat}$, ou seja,

$$R.H.S. = 0.5w_{z,stat}\Delta s f(t)[1 + e^{2j\Omega t}].$$

Ao escrever a função retangular da fissura por uma série de Fourier, obtém-se

$$f(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \cos 1\Omega t - \frac{2}{3\pi} \cos 3\Omega t + \frac{2}{5\pi} \cos 5\Omega t \dots \quad (18)$$

Então, usando a fórmula de Euler $\cos n\Omega t = \frac{1}{2} (e^{+jn\Omega t} + e^{-jn\Omega t})$, é possível expressar a força de excitação devido a trinca como sendo,

$$R.H.S. = 0.5w_{z,stat}\Delta s f(t) \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} b_k e^{jk\Omega t},$$

onde as constantes de Fourier b_k referente aos harmônicos e seus respectivos significados são descritos na Tabela 1. As constantes superior ao de terceira ordem tem contribuição desprezível. As constantes de Fourier são independentes da profundidade da trinca $t/R < 0.5$ para o qual o modelo de dobradiça é válido.

A resposta vibratória do eixo simples para a excitação da trinca é agora facilmente determinada. A partir da equação diferencial apenas com a componente de excitação da trinca b_k , e

com $\Delta r = \Delta R e^{jk\Omega t}$, considera-se,

$$\Delta R_k = \Delta s w_{z,stat} \frac{b_k}{-(k\Omega)^2 m + j(k\Omega)d + s_o} \quad (19)$$

$$= w_{z,stat} \left(\frac{\Delta s}{s_o} \right) \frac{b_k}{1 - (k\eta)^2 + 2jDk\eta} \quad (20)$$

A resposta global devido a componente b_k da excitação da trinca é,

$$\Delta r(t) \simeq w_{z,stat} \left(\frac{\Delta s}{s_o} \right) \sum_{k=-3}^{k=+3} \frac{b_k e^{jk\Omega t}}{1 - (k\eta)^2 + 2jDk\eta} \quad (21)$$

onde os componentes de quarta ordem e superior podem ser desprezados.

5.3 Vibrações Forçadas Devido a Trinca

A resposta global devido ambas excitações podem ser obtidas através da combinação das soluções obtidas pelas equações (17) e (21):

$$\Delta r(t) = \Delta r_\varepsilon + \Delta r_{crack} \quad (22)$$

$$= \varepsilon \left[\frac{\eta^2}{1 - \eta^2 + 2jD} \right] e^{j(\Omega t + \beta)} + w_{z,stat} \cdot \frac{\Delta s}{s_o} \sum_{k=-3}^{k=+3} \frac{b_k e^{jk\Omega t}}{1 - (k\eta)^2 + 2jDk\eta} \quad (23)$$

6 INCERTEZAS EM SISTEMAS MECÂNICOS

O projeto de sistemas mecânicos trabalha com uma idealização da realidade objetivando construir protótipos e produtos em acordo com a concepção ideal esperada para seu desempenho e funcionamento. A realização física deste sistema projetado é o sistema físico, obtido por manufatura, e conseqüentemente sujeito aos erros e incertezas de fabricação. Por outro lado a modelagem matemática (analítica e numérica), que tem como objetivo simular o comportamento do sistema projetado de forma a prever seu comportamento (resposta) futuro com base em algumas poucas observações e medições experimentais, também está sujeita à incertezas (Ghanem and Doostan, 2006). Se por um lado a quantificação de incertezas em processos de fabricação e medição é um campo do conhecimento dominado pela ciência e indústria, a quantificação de incertezas na modelagem de sistemas mecânicos encontra-se ainda em desenvolvimento, sendo um problema ainda aberto.

As incertezas em modelos preditivos de sistemas mecânicos estão associadas às aproximações do modelo proposto (hipóteses de comportamento físico, linearizações, condições de contorno), às aleatoriedades do carregamento imposto ao sistema e às incertezas dos parâmetros do sistema (Soize, 2005). As aleatoriedades do carregamento de sistemas mecânicos dinâmicos fazem parte da bem estabelecida área de vibrações aleatórias. As incertezas relacionadas aos parâmetros do modelo devem ser consideradas utilizando uma abordagem probabilística "paramétrica", onde os parâmetros aleatórios são modelados por variáveis aleatórias, enquanto que as incertezas do modelo exigem uma abordagem, referenciada na literatura como "não paramétrica" (Soize, 2005). A chamada abordagem não paramétrica utiliza de uma formulação onde as matrizes características do sistema são modeladas como variáveis aleatórias, acoplando os modos do sistema, e ampliando o espaço amostral do problema (Adhikari, 2006). Uma comparação entre essas duas formulações, considerando sistemas dinâmicos simples, é feita por Sampaio and Cataldo (2010).

Nesse trabalho apenas as aleatoriedades associadas aos parâmetros do modelo são consideradas, de forma que a abordagem paramétrica será a utilizada. Segundo essa abordagem, após identificar os parâmetros aleatórios do sistema, esses devem ser tratados como variáveis aleatórias definidas sobre um suporte limitado e coerente com o fenômeno estudado. Assim deve-se determinar, com base nas informações disponíveis, uma distribuição de probabilidade que represente corretamente a variável e que seja adequada a física do problema estudado. Quando não se tem muitos dados experimentais disponíveis uma função densidade de probabilidade aproximada pode ser determinada usando-se o princípio da entropia máxima proposto por Jaynes (1957), usando o conceito de entropia de Shannon (1948): "De todas as distribuições de probabilidade consistentes com as restrições impostas, escolhe-se àquela que maximiza a incerteza".

No caso estudado foram considerados os seguintes parâmetros aleatórios:

1. a amplitude máxima de vibração ΔR_{max} devido a incerteza experimental considerada para a medição da resposta no sistema;
2. o desbalanceamento $\Delta \varepsilon$ devido a evolução da trinca e/ou motivo operacional - distribuição Gama;
3. o modelo de trinca Δb_k devido a variações de geometria da trinca (Mayes and Davies, 1984; Gasch, 2008) - distribuição normal truncada;
4. a velocidade angular específica $\Delta \eta$ devido a incertezas experimentais em manter a velocidade angular de rotação constante - distribuição normal;
5. o fator de amortecimento ΔD devido a influência de parâmetros, tais como temperatura e outros, sobre o amortecimento nos mancais - distribuição normal; e
6. o ângulo entre o desbalanceamento e a direção da trinca $\Delta \beta$ devido a evolução da geometria da trinca - distribuição normal.

A incerteza experimental considerada para a medição de amplitude máxima de vibração do rotor (resposta do sistema) levou em conta duas componentes: (a) a componente proporcional a medição que possui uma distribuição de probabilidade Gama; e (b) a componente constante associada a menor divisão do instrumento de medição que possui uma distribuição normal.

O coeficiente Δb_k , associado ao modelo de trinca, possui uma distribuição normal truncada tendo o valor do modelo de Mayers como limite inferior e o valor do modelo de dobradiça como limite superior.

7 RESULTADOS

Dado um rotor de De Laval, conforme Figura 1, de comprimento $L = 2,00m$ e raio $r = 0,080m$. O amortecimento do sistema rotativo é arbitrado $d = 5\%$. O massa excêntrica deforma estaticamente o rotor em $w_{stat} = 0,001m$ e esta encontra-se defasado da trinca de $\beta = \pi/2$. Os resultados a seguir foram simulados a partir do modelo de dobradiça descrito pela equação (22) (Gasch, 2008). No presente trabalho busca-se identificar a presença da trinca através da comparação do eixo trincado com o eixo íntegro. Consequentemente, não se considerou a incerteza devido a variações na deflexão estática $w_{z,stat}$.

A Figura 4 apresenta resultados do modelo para diferentes profundidades de trinca ($\varepsilon = [0,0000; 0,0001; 0,0010]$). Neste resultado foram desconsiderados as incertezas inerentes ao

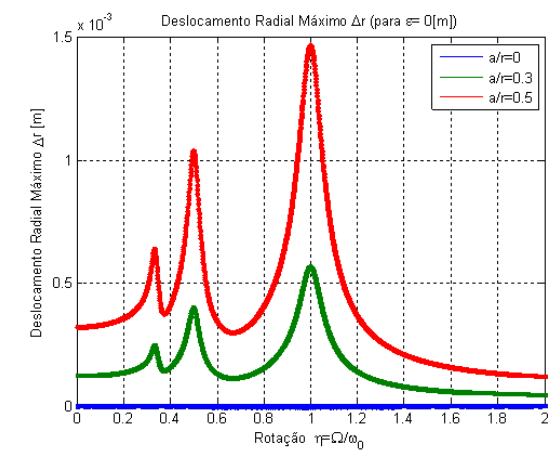
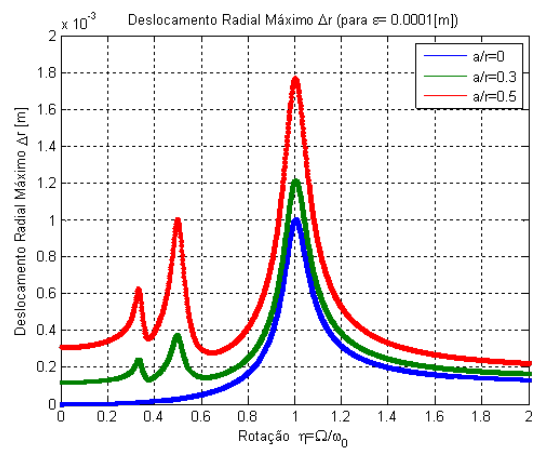
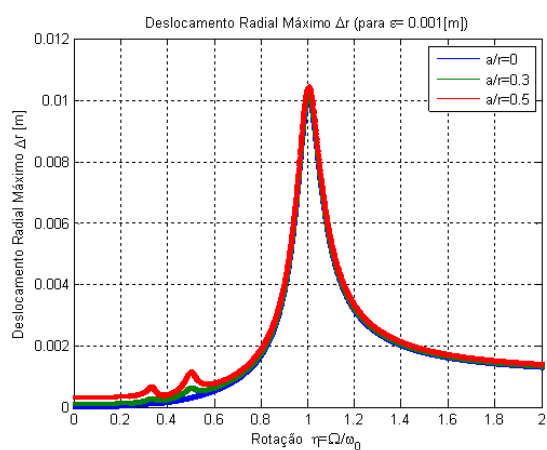
(a) $\varepsilon = 0.0000$ (b) $\varepsilon = 0.0001$ (c) $\varepsilon = 0.0010$

Figure 4: Amplitude de vibração máxima Δr_{max} em função da velocidade angular específica η para diversas profundidades de trinca t/R .

problema seja no modelo, seja na medição. Na Figura 4 pode-se observar com relativa clareza a distinção entre o comportamento do eixo sem desbalanceamento (Figura 4(a)), com um desbalanceamento intermediário $\varepsilon = 0.0001m$ (Figura 4(b)), e com um desbalanceamento típico $\varepsilon = 0.0010m$ (Figura 4(c)). Nota-se a influência do desbalanceamento mascarando a presença da trinca. Lembramos que a profundidade de trinca $t/R = 0.50$ corresponde a uma trinca severa e ao limite de validade do modelo.

Nas figuras subseqüentes foram progressivamente introduzidas incertezas provenientes dos parâmetros da Eq. (22), considerando as distribuições de probabilidade mencionadas no item 6.

Na Figura 5 foi introduzida a perturbação devido a presença da incerteza na medição do parâmetro de amplitude máxima de deslocamento ΔR_{max} . Foi considerada uma incerteza associada à medição composta por duas partes: (a) uma proporcional ao valor escalar da medição, e (b) outra de valor constante associada a menor divisão do instrumento de medição. Para a primeira adotou-se uma distribuição de probabilidade Gama com um desvio padrão $\sigma(\Delta R_{max}) = 1\%$ do valor escalar da medição. A segunda parcela da incerteza considera uma distribuição normal com desvio padrão constante $\sigma(\Delta R_{max}) = 10^{-5}m$.

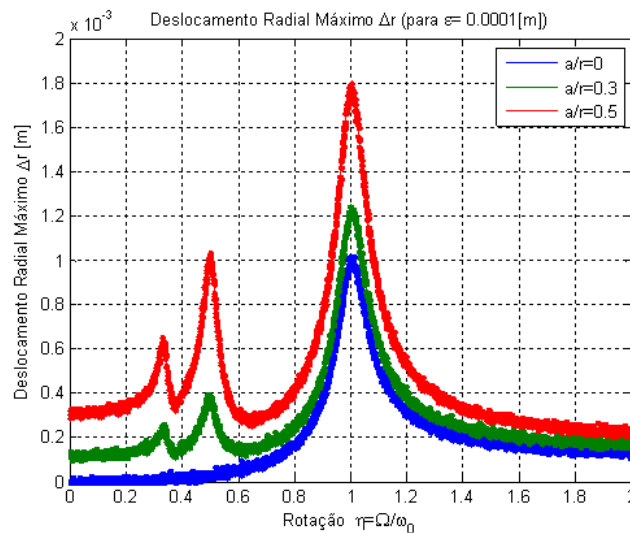


Figure 5: Influência da incerteza na medição 'experimental' ΔR_{max} sobre resposta da amplitude de vibração máxima ΔR_{max} função de η .

Uma perturbação devido a incertezas no desbalanceamento $\Delta\varepsilon$ apresenta-se na Figura 6. Adotou-se uma distribuição normal com média $\overline{\Delta\varepsilon} = 10^{-4}m$ e desvio padrão $\sigma(\Delta\varepsilon) = 10\%$ do valor médio. Como esperado, o reflexo desta incerteza sobre o resultado da medição se faz notar de forma mais acentuada para velocidades η mais elevadas, haja vista o desbalanceamento ser proporcional ao quadrado da velocidade de rotação $\propto \varepsilon m \Omega^2$.

A fim de verificar a resposta do modelo em função de incertezas na geometria da trinca, perturba-se o coeficiente de Fourier b_k ($k = 1$). O coeficiente b_1 no modelo de dobradiça ($b_1 = 0.318$) (Gasch, 2008) é muito diferente do obtido pelo modelo de trincas profundas ($b_1 = 0.250$) (Mayes and Davies, 1984). A Figura 2 apresenta a evolução angular dos dois modelos possíveis. Propõem-se uma janela de operação entre estes dois modelos, admitindo uma geometria da trinca intermediária. Para tanto, foi adotado um coeficiente de Fourier $\bar{b}_1 = 0.280$ e um desvio padrão $\sigma(\Delta b_k) = 0.020$.

A Figura 8 apresenta os resultados da perturbação devido a presença de incertezas na velocidade angular específica $\Delta\eta$. Foi adotado para a incerteza $\Delta\eta$ uma distribuição normal de

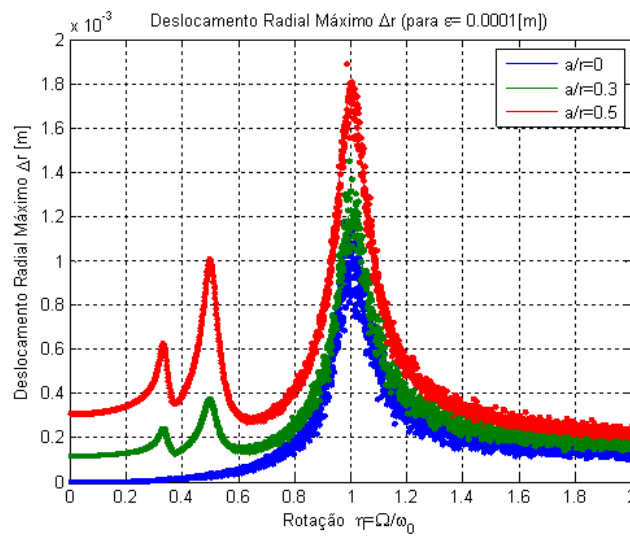


Figure 6: Influência da incerteza no desbalanceamento $\Delta\varepsilon$ sobre resposta da amplitude de vibração máxima ΔR_{max} função de η .

probabilidade com desvio padrão $\sigma(\Delta\eta) = 1\%$ do valor médio. Em decorrência, esta perturbação mostra-se mais acentuada nas regiões da curva com derivada elevada, ou seja, nas bandas de ressonância.

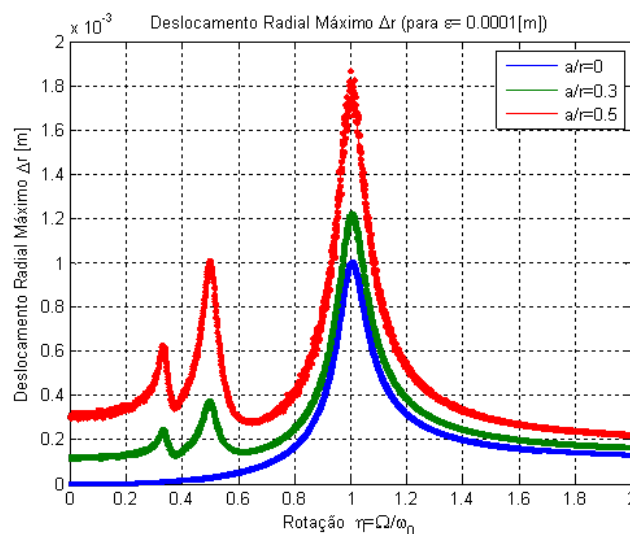


Figure 7: Influência da incerteza no modelo de trinca Δb_k sobre resposta da amplitude de vibração máxima ΔR_{max} função de η .

A Figura 9 apresenta os resultados da perturbação devido a presença de incertezas no fator de amortecimento ΔD . Para incerteza ΔD adotou-se uma distribuição normal de probabilidade com desvio padrão $\sigma(\Delta D) = 10\%$ do fator de amortecimento médio $\overline{\Delta D} = 0.05$. O reflexo desta incerteza sobre a resposta do modelo é mais acentuada junto as ressonâncias.

A presença de incertezas no ângulo entre o desbalanceamento e a direção da trinca $\Delta\beta$ foi apresentado na Figura 10. A incerteza $\Delta\beta$ possui uma distribuição normal de probabilidade com desvio padrão $\sigma(\Delta\beta) = 5$. A variação do ângulo β pode ser devido a evolução da trinca numa direção não radial. Esta incerteza, dentro dos limites adotados, apresentou pouca influência

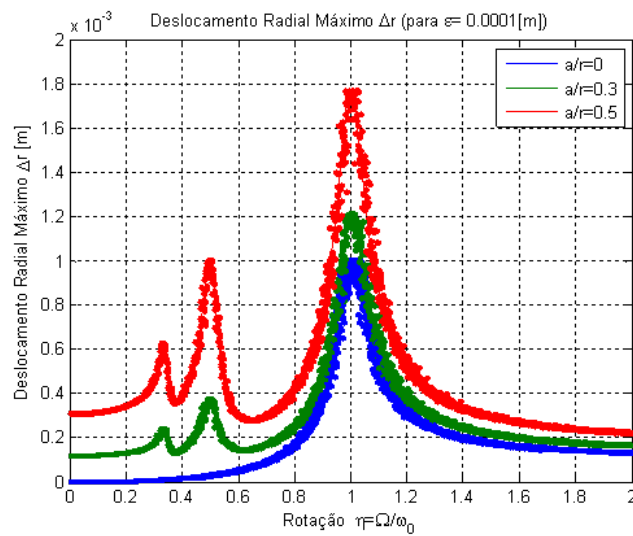


Figure 8: Influência da incerteza na velocidade angular específica $\Delta\eta$ sobre resposta da amplitude de vibração máxima ΔR_{max} função de η .

sobre o comportamento final do modelo.

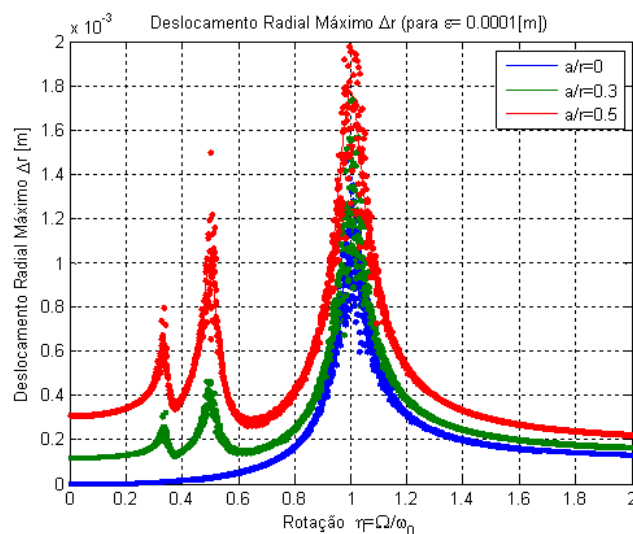


Figure 9: Influência da incerteza no fator de amortecimento ΔD sobre resposta da amplitude de vibração máxima ΔR_{max} função de η .

Quando tomados em conta todas as incertezas mencionadas anteriormente, chega-se ao resultado mostrado na Figura 11. Apesar da grande incerteza global verificada, é possível distinguir para baixas velocidades angulares específicas η as diferentes profundidades de trinca no modelo. Estes resultados foram obtidos para valores de desbalanceamentos relativamente modesto. Caso o desbalanceamento tenha um valor mais típico $\Delta\varepsilon = 0.001m$, como apresentado na Figura 12, verifica-se uma grande dificuldade de se distinguir os níveis de severidade da trinca considerados. Considerando ainda que o resultado mais claros aparecem para baixas velocidades angulares específicas (η pequenos), foi verificada a resposta do sistema com o aumento da deformação estática $w_{s,max}$. Tal resultado pode ser obtido experimentalmente, com

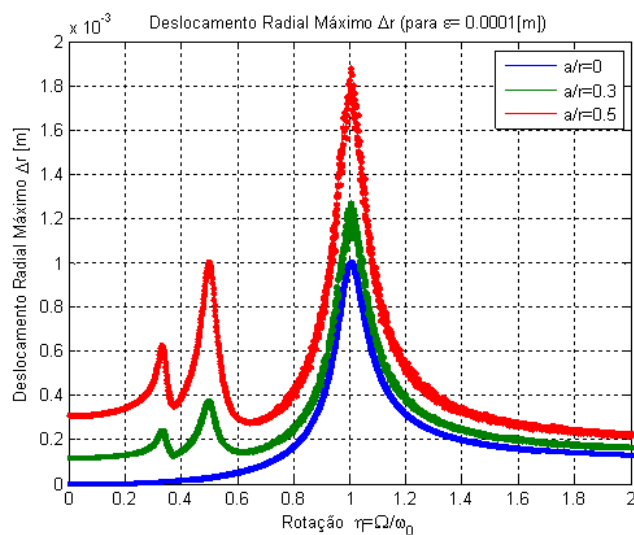


Figure 10: Influência da incerteza no ângulo entre o desbalanceamento e a direção da trinca $\Delta\beta$ sobre resposta da amplitude de vibração máxima ΔR_{max} função de η .

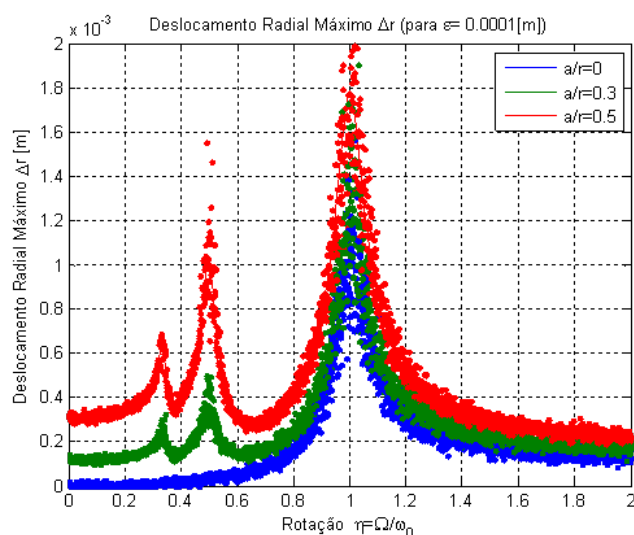


Figure 11: Resposta da amplitude de vibração máxima ΔR_{max} , em função de η , para um desbalanceamento típico de $\varepsilon = 0.0001m(1mm)$.

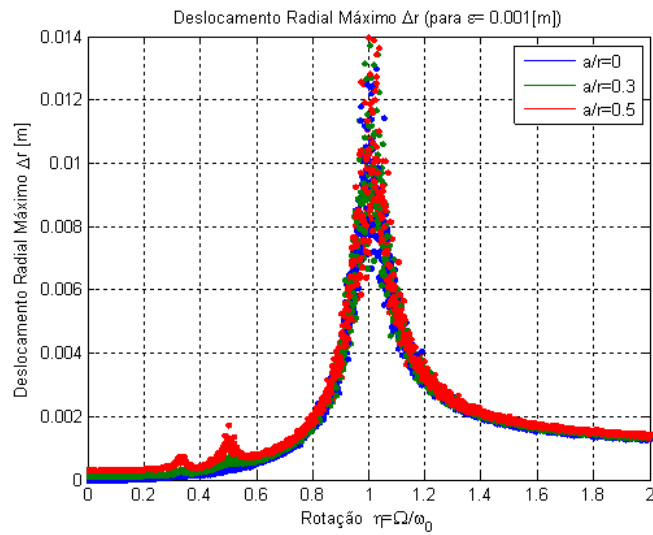


Figure 12: Resposta da amplitude de vibração máxima ΔR_{max} , em função de η , para um desbalanceamento típico de $\varepsilon = 0.0010m(1mm)$.

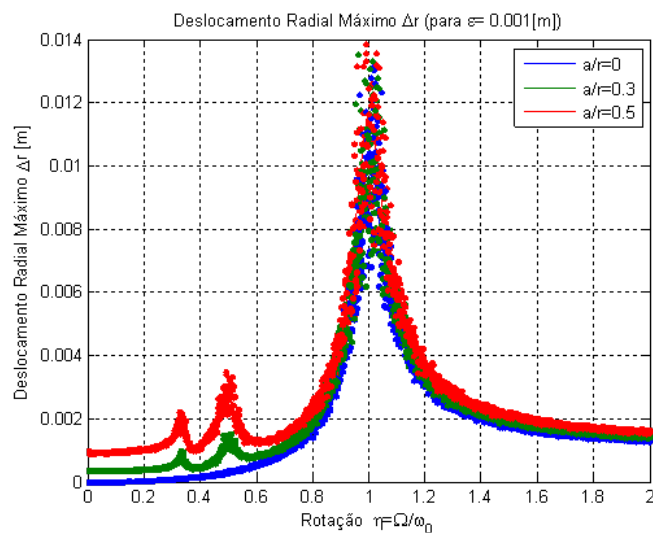


Figure 13: Resposta da amplitude de vibração máxima ΔR_{max} , em função de η , para um desbalanceamento típico de $\varepsilon = 0.0010m(1mm)$ com deformação estática $w_{s,max} = 0.003m(3mm)$.

facilidade, adicionando massa balanceada ao rotor. Este resultado para $w_{s,max} = 0.003m$ é apresentado na Figura 13. No limite, somos levados a concluir que a condição mais adequada para verificar a evolução de um trinca encontra-se na avaliação estática do comportamento do eixo rotativo, especialmente se ampliarmos seu efeito aumentando a deflexão estática do rotor. Ressalta-se ainda que, na condição estática, que algumas incertezas modeladas poderiam ser ainda menores.

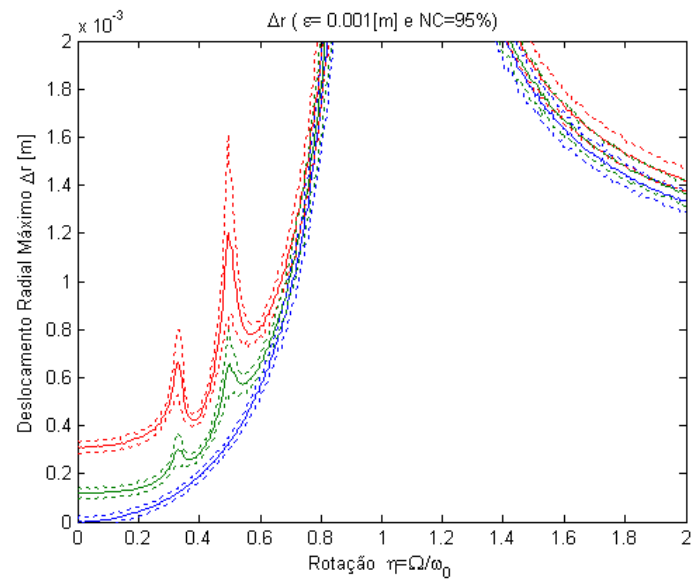
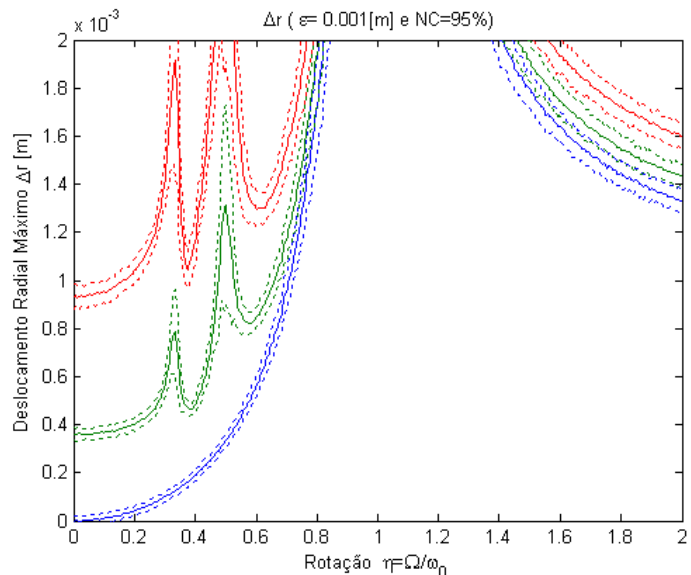
(a) $w_{s,max} = 0.001m(1mm)$ (b) $w_{s,max} = 0.003m(3mm)$

Figure 14: Envolvimento da amplitude de vibração máxima ΔR_{max} para desbalanceamento típico de $\varepsilon = 0.001m(1mm)$ e deformações estáticas de $w_{s,max} = [0.001m(1mm), 0.003(3mm)]$.

A Figura 14 apresenta dois envoltórios dos resultados de desbalanceamento típico $w_{s,max} = 0.001m$ e $w_{s,max} = 0.003m$ com nível de confiança $NC = 95\%$. Os envoltórios são obtidos

através de 128 realizações para cada velocidade angular específica η sendo a resolução do gráfico de 1200 pontos na ordenada. O resultados confirmam as conclusões das Figuras 12-13. Em baixa rotações, os envoltórios em função das diversas profundidades de trinca apresentam menores bandas de incertezas associadas a identificações da amplitude de vibração.

A Figura 15 apresenta a análise de convergência da implementação numérica. Adota-se o critério de erro quadrado máximo $\varepsilon = (1/N) \sum_{j=1}^N (\Delta R_{max,i+1} - \Delta R_{max,i})$, onde N é o número de pontos da curva, ou seja, a resolução da curva de resposta da amplitude de vibração máxima. A partir de 150 realizações para cada velocidade angular de rotação, o erro quadrático entre o valor médio das realização atual e da imediatamente passada apresenta um comportamento assintótico monotônico e tende a nulidade.

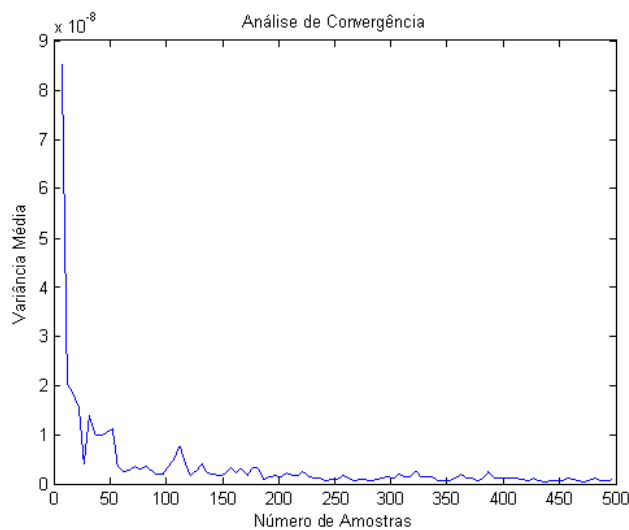


Figure 15: Análise de convergência relativo a norma quadrática da amplitude de vibração máxima ΔR_{max} .

8 CONCLUSÃO

Este trabalho estudou a acuidade de previsão do modelo de Gasch (2008) para a identificação de trincas em eixos rotativos. O modelo considera um rotor de De Laval com uma trinca transversal. Analisa-se a influência da trinca na flexibilidade do eixo e o comportamento "respirante" da trinca.

A forma de representação da resposta do sistema rotor utilizada neste trabalho difere da proposta de Gasch. Esta proposta apresenta-se mais simples e de uso mais fácil em monitoração de rotores. Essa forma de representação permitiu uma avaliação clara da influência da profundidade da trinca na vibração do rotor.

Observou-se que a influência do desbalanceamento é dominante em relação a presença da trinca e inviabiliza a identificação da presença da mesma usando a componente associada a uma vez a velocidade de rotação do rotor. Contudo, mesmo com desbalanceamento é possível se identificar as componentes associadas à um terço e à metade da velocidade de rotação do rotor. Entretanto verificou-se que mesmo essas componentes podem ser comprometidas quando se considera a presença de aleatoriedades nos parâmetros definidores do modelo ou na medição da resposta vibratória do rotor.

Na presença de incertezas, concluímos que a avaliação estática é mais adequado para a verificação da evolução da trinca em um eixo rotativo, especialmente se amplificarmos a deflexão

estática do rotor. Cabe lembrar que os valores de incerteza no presente estudo são pequenos com relação a incertezas experimentais reais. Considerando as incertezas reais, conforme Figura 12, os efeitos devido a evolução da trinca não são perceptíveis em comparação ao efeito do desbalanceamento e da dispersão dos parâmetros aleatórios. Contudo, na condição estática, algumas das incertezas modeladas são menores ou desprezíveis com relação as adotadas, proporcionando melhor avaliação da evolução da trinca.

REFERENCES

- Adhikari S. Matrix variate distributions for probabilistic structural mechanics. In ASME, editor, *Proceeding of 47th AIAA/ASME Structures, Structural Dynamics and Materials Conference*. 2006.
- Bachschnid N., Pennacchi P., Tanzi E., and Vania A. Identification of transverse crack position and depth in rotor systems. *Meccanica*, 35(6):563–582, 2000.
- Dimarogonas A.D. Vibration of cracked structures: A state of the art review. *Engineering Fracture Mechanics*, 55(5):831–857, 1996.
- Eisenmann R. *Machinery Malfunction: Diagnosis and Correction*. Prentice Hall, 2000.
- Gasch R. A survey of the dynamic behaviour of a simple rotating shaft with a transverse crack. *Journal of Sound and Vibration*, 160(2):313–332, 1993.
- Gasch R. Dynamic behaviour of the laval rotor with a transverse crack. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 22(4):790–804, 2008.
- Ghanem R.G. and Doostan A. On the construction and analysis of stochastic models: Characterization and propagation of the errors associated with limited data. *Journal of Computational Physics*, 217:63–81, 2006.
- Ishida Y. Cracked rotors: Industrial machine case histories and nonlinear effects shown by simple jeffcott rotor. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 22(4):805–807, 2008.
- Jaynes E. Information theory and statistical mechanics. *Physics Review*, 106(4):620–630 e 108 (2) 17–190, 1957.
- Mayes J. and Davies W.G.R. Analysis of the response of a multi-rotor-bearing system containing a transverse crack in a rotor. *Journal of Vibration, Acoustics, Stress and Reliability in Design*, 106:139–145, 1984.
- Papadopoulos C.A. The strain energy release approach for modeling cracks in rotors: A state of the art review. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 22(4):763–789, 2008.
- Papadopoulos C.A. and Dimarogonas A.D. Coupled longitudinal and bending vibrations of a rotating shaft with an open crack. *Journal of Sound and Vibration*, 117(1):81–93, 1987.
- Saavedra P.N. and Cuitino L.A. Vibration analysis of rotor for crack identification. *Journal of Vibration and Control*, 8(1):51–67, 2002.
- Sabnavis G., Kirk R.G., Kasarda M., and Quinn D. Cracked shaft detection and diagnostics: A literature review. *The Shock and Vibration Digest*, 36(4):287–296, 2004.
- Sampaio R. and Cataldo E. Comparing two strategies to model uncertainties in structural dynamics. *Shock and Vibration*, 17(2):171–186, 2010.
- Shannon C.E. A mathematical theory of communication. *Bell System Technologies Journal*, 27:379–423 e 653–659, 1948.
- Soize C. A comprehensive overview of a non-parametric probabilistic approach of model uncertainties for predictive models in structural dynamics. *Journal of Sound and Vibration*, 288(3):623–652, 2005.
- Wauer J. On the dynamics of cracked rotors: A literature survey. *Applied Mechanical Reviews*, 43(1):–, 1990.