

## ANÁLISE DE CONFIABILIDADE DE VIGAS DE CONCRETO ARMADO COM PLÁSTICO REFORÇADO POR FIBRAS

Sidnea E.C. Ribeiro<sup>a</sup> e Sofia M.C. Diniz<sup>b</sup>

<sup>a</sup>Centro Universitário UNA, Belo Horizonte, MG, Brazil, [sidnea.ribeiro@prof.una.br](mailto:sidnea.ribeiro@prof.una.br),  
<http://www.una.br>

<sup>b</sup>Departamento de Engenharia de Estruturas, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brazil, [diniz@dees.ufmg.br](mailto:diniz@dees.ufmg.br), <http://pos.dees.ufmg.br>

**Palavras-chave:** Concreto Armado, Confiabilidade Estrutural, métodos probabilísticos, normas técnicas, PRF, vigas.

**Resumo.** O plástico reforçado por fibras (PRF) constitui uma perspectiva promissora para utilização como armadura para o concreto armado. Embora a utilização do PRF para tal finalidade possa apresentar grandes promessas em termos de durabilidade, as características particulares deste material têm conduzido a novos desafios em relação ao projeto de componentes estruturais em concreto armado com PRF (CA-PRF). No projeto de vigas de CA, a falha é ditada pelo escoamento do aço, daí resultando em uma falha dúctil. Já o projeto de vigas de CA-PRF envolve dois materiais de comportamento frágil; assim uma falha frágil é inevitável. Desta maneira, uma mudança no paradigma anterior faz-se necessária. Pelo exposto, devido à crescente utilização do PRF e também às diferenças apresentadas entre os dois materiais (aço e PRF), a confiabilidade de vigas em CA-PRF deve ser analisada. Dado que a maioria das variáveis envolvidas no projeto (propriedades mecânicas, características geométricas, cargas, etc.) é aleatória, métodos probabilísticos devem ser empregados para a avaliação da confiabilidade de vigas em CA-PRF. Neste trabalho, uma especial atenção é dada ao procedimento determinístico utilizado para a estimativa da resistência da viga. A simulação de Monte Carlo é utilizada: (i) na obtenção de estatísticas da deformação última da viga; (ii) na obtenção de estatísticas do modo de falha correspondente; (iii) na obtenção de estatísticas do momento resistente da viga; e (iv) na determinação da probabilidade de falha para o estado limite último de flexão, para oitenta e uma vigas em CA-PRF. O efeito de diversos parâmetros nos níveis de confiabilidade implícitos em normas técnicas é discutido e sugestões são apresentadas.

## 1 INTRODUÇÃO

Os últimos anos têm assistido a um interesse crescente em relação a materiais de alto desempenho, tais como o concreto de alta resistência e materiais compósitos, dentre outros. Este interesse visa a obtenção de resistências mais elevadas e maior durabilidade, e conseqüentemente possíveis ganhos em relação aos custos ao longo da vida útil da estrutura. Um dos grandes problemas associados à durabilidade do concreto armado é a corrosão das barras de aço. Desta maneira o plástico reforçado por fibras (PRF) apresenta uma perspectiva promissora para utilização como armadura para o concreto armado.

Embora a utilização do PRF como armadura estrutural possa apresentar grandes promessas em termos de durabilidade, as características particulares deste material têm conduzido a novos desafios em relação ao projeto de componentes estruturais em concreto armado com PRF (CA-PRF). Algumas recomendações para projeto já foram desenvolvidas, tendo em comum o fato de serem baseadas em normas de projeto para vigas em concreto armado com aço (CA). No projeto de vigas de CA, a falha é ditada pelo escoamento do aço, daí resultando em uma falha dúctil. Já o projeto de vigas de CA-PRF envolve dois materiais de comportamento frágil; assim uma falha frágil é inevitável. Desta maneira, uma mudança no paradigma anterior faz-se necessária.

Pelo exposto, devido à crescente utilização do PRF e também às diferenças apresentadas entre os dois materiais (aço e PRF), a confiabilidade de vigas em CA-PRF deve ser avaliada. A maior parte das sugestões propostas para o projeto de vigas em CA-PRF tem sido feita a partir de um ponto de vista determinístico. Entretanto, dado que a maioria das variáveis envolvidas no projeto (propriedades mecânicas dos materiais, características geométricas, cargas, etc.) é aleatória, métodos de confiabilidade estrutural, isto é, métodos probabilísticos devem ser empregados para avaliação da confiabilidade de vigas em CA-PRF. Neste trabalho, a simulação de Monte Carlo é utilizada para a análise de confiabilidade de vigas em CA-PRF para o estado limite último de flexão. O estudo apresentado em Diniz (2008) é aprofundado e uma especial atenção é dada ao procedimento determinístico utilizado para a estimativa da resistência da viga.

Para a simulação de Monte Carlo é necessário que sejam conhecidas as distribuições de probabilidade de todas as variáveis aleatórias envolvidas no problema e também a relação determinística entre estas variáveis que define o desempenho da viga. As 81 vigas em CA-PRF analisadas foram projetadas segundo as recomendações do ACI 440 (2006). A seguir são apresentados: (i) as recomendações para projeto de vigas em CA-PRF segundo o ACI 440, (ii) a configuração estrutural das vigas analisadas, (iii) a descrição estatística das variáveis básicas envolvidas no problema (variabilidade da resistência e variabilidade do carregamento), (iv) o procedimento computacional para o cálculo do momento resistente da viga em CA-PRF, e (v) os procedimentos envolvidos na análise de confiabilidade. Os efeitos de diversos parâmetros nos níveis de confiabilidade

implícitos nos procedimentos de projeto adotados são discutidos.

## 2 PROJETO DE VIGAS EM CA-PRF SEGUNDO O ACI 440

Segundo o ACI Committee 440 (2006), a resistência à flexão de vigas em CA-PRF depende do modo de falha da viga (esmagamento do concreto ou ruptura do PRF). O modo de falha é determinado comparando-se a taxa de armadura do PRF,  $\rho_f$  (Eq. 1), com a taxa de armadura balanceada,  $\rho_{fb}$  (isto é, condição na qual o esmagamento do concreto ocorre simultaneamente à ruptura do PRF, Eq. 2):

$$\rho_f = \frac{A_f}{bd} \quad (1)$$

onde:  $A_f$  = área total das seções transversais das barras de PRF;  $b$  = largura da seção transversal;  $d$  = distância da fibra comprimida mais distante até a centróide da armadura de tração, e

$$\rho_{fb} = 0,85\beta_1 \frac{f'_c}{f_{fu}} \left( \frac{E_f \varepsilon_{cu}}{E_f \varepsilon_{cu} + f_{fu}} \right) \quad (2)$$

onde:  $\beta_1$  = fator tomado como 0,85 para a resistência do concreto ( $f'_c$ ) até 27,6 MPa. Para resistência acima de 27,6 MPa, este fator é continuamente reduzido a uma taxa de 0,05 para cada 6,9 MPa de resistência a mais de 27,6 MPa, mas nunca menor que 0,65;  $f'_c$  = resistência característica à compressão do concreto;  $f_{fu}$  = resistência à tração de projeto do PRF, considerando a redução para condição de serviço;  $E_f$  = módulo de elasticidade do PRF definido como a média dos valores obtidos em testes;  $\varepsilon_{cu}$  = deformação última do concreto.

Se a taxa de armadura está abaixo da taxa de armadura balanceada ( $\rho_f < \rho_{fb}$ ), o modo de falha é a ruptura do PRF; caso contrário, ( $\rho_f > \rho_{fb}$ ), o esmagamento do concreto governa a falha. Quando  $\rho_f < 1,4 \rho_{fb}$  é assumido que a falha da estrutura é iniciada pelo esmagamento do concreto, e a distribuição de tensões no concreto pode ser obtida através do bloco retangular de tensões do ACI 318-08 (ACI 318, 2008). Baseado no equilíbrio de forças e compatibilidade de deformações, o momento resistente nominal pode ser obtido por:

$$M_n = A_f f_f \left( d - \frac{a}{2} \right) \quad (3)$$

onde a profundidade do bloco de tensões,  $a$ , e a tensão no PRF,  $f_f$ , são dadas por:

$$a = \frac{A_f f_f}{0,85 f'_c b} \quad (4)$$

$$f_f = \left( \sqrt{\frac{(E_f \varepsilon_{cu})^2}{4} + \frac{0,85\beta_1 f'_c}{\rho_f} E_f \varepsilon_{cu}} - 0,5 E_f \varepsilon_{cu} \right) \leq f_{fu} \quad (5)$$

Quando  $\rho_f < \rho_{fb}$ , a falha da viga é iniciada pela ruptura do PRF, e o bloco de tensões do ACI 318-08 não é mais aplicável. Neste caso, um bloco equivalente de tensões precisa ser usado para aproximar a distribuição de tensões no concreto ao nível de deformação alcançado no problema específico em questão. O ACI 440 (2006) propõe a seguinte equação simplificada para a resistência à flexão:

$$M_n = A_f f_{fu} \left( d - \frac{\beta_1 c_b}{2} \right) \quad (6)$$

$$c_b = \left( \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{cu} + \varepsilon_{fu}} \right) d \quad (7)$$

A resistência à flexão de projeto (resistência minorada,  $\phi M_n$ ) de uma viga deve exceder o momento fletor oriundo das cargas atuantes majoradas, ou seja:

$$\phi M_n \geq M_u \quad (8)$$

onde:  $\phi$  = fator de minoração da resistência;  $M_n$  = valor nominal do momento fletor resistente;  $M_u$  = momento fletor último, resultado do carregamento atuante majorado. (Nas recomendações do ACI 440 os coeficientes de majoração das cargas são aqueles definidos pelo ACI 318-08). O ACI 440 (2006) sugere os seguintes fatores de minoração da resistência:

$$\phi = 0,55 \text{ para } \rho_f \leq \rho_{fb} \quad (9)$$

$$\phi = 0,3 + 0,25 \frac{\rho_f}{\rho_{fb}} \text{ para } \rho_{fb} < \rho_f < 14\rho_{fb} \quad (10)$$

$$\phi = 0,65 \text{ para } \rho_f \geq 14\rho_{fb} \quad (11)$$

onde  $\rho_{fb}$  é dado pela Eq. 2. O ACI 440 (2006) limita a armadura mínima de PRF, no caso da estrutura ser projetada para falha por ruptura do PRF, ou seja, quando  $\rho_f < \rho_{fb}$ , deve-se adotar uma área mínima.

### 3 CONFIGURAÇÃO ESTRUTURAL

Dentre os objetivos deste trabalho está a avaliação da influência de diversos parâmetros na confiabilidade de vigas de CA-PRF. Os parâmetros analisados são: a resistência à compressão do concreto, a resistência à tração do PRF, a taxa de armadura longitudinal e a razão do carregamento,  $\mu_{CP} / \mu_{SC}$ . Foram analisadas três resistências à compressão do concreto (resistências características de 30 MPa, 50 MPa e 70 MPa), três resistências à tração do PRF (resistências características de 425 MPa, 850 MPa e 1275 MPa), uma seção transversal (200x300mm<sup>2</sup>), taxas de armadura longitudinal de PRF na faixa de 0,82 a 1,66  $\rho_{fb}$ , correspondendo a seções subarmadas e superarmadas e três razões de carregamento, média da carga permanente / média

da sobrecarga ( $\mu_{CP} / \mu_{SC} = 0,5, 1$  e  $2$ ). Devido ao menor custo dentre os três tipos de fibras mais utilizadas na construção civil (carbono, aramida e vidro), foi considerado que todas as vigas analisadas são armadas com fibras de vidro (VPRF).

Cada viga recebeu uma identificação constituída por 4 grupos de letras e números. O primeiro grupo representa a resistência à compressão do concreto (resistência característica) e consiste da letra C seguida de 30, 50 ou 70, onde C30, C50 e C70 correspondem às resistências de 30 MPa, 50 MPa e 70 MPa, respectivamente. O segundo grupo representa a resistência à tração do PRF e consiste da letra P seguida de 1, 2 ou 3 onde P1, P2 e P3 correspondem às resistências de 425 MPa, 850 MPa e 1275 MPa, respectivamente. Estas resistências estão dentro da faixa de resistência à tração do VPRF (ACI 440, 2006). O terceiro grupo representa a razão do carregamento,  $\mu_{CP} / \mu_{SC}$ , e consiste da letra R seguida de 5, 1 ou 2 onde R5, R1 e R2 correspondem às razões de carregamento de 0,5, 1 e 2, respectivamente. O quarto grupo representa a taxa de armadura e consiste das letras SB, TR ou SP, correspondendo a seções subarmadas, região de transição e superarmadas, respectivamente (regiões definidas pelas Eqs. 9-11).

Foram escolhidas três resistências à compressão do concreto: 30, 50 e 70 MPa. O primeiro valor representa concretos usuais, o segundo representa um limite superior para concretos usuais e o último valor representa uma tendência mundial em se utilizar concretos com maior resistência e melhor desempenho. Deve-se observar também que a utilização de concretos de alta resistência permite uma melhor utilização da alta resistência mecânica das barras de PRF (ACI 440, 2006). Neste estudo foram escolhidas barras de PRF com diâmetros de 6,3 a 25 mm. Preferência foi dada, sempre que possível, para as barras de menor diâmetro. A Tabela 1 apresenta as características geométricas, as propriedades mecânicas e a razão entre estas taxas,  $\rho_f / \rho_{fb}$ , das vigas analisadas. As áreas das armaduras utilizadas conduziram a uma razão taxa de armadura longitudinal / taxa de armadura balanceada na faixa de 0,82 (C70-P2-R\*-SB) a 1,66 (C30-P1-R\*-SP). As vigas SB apresentam razão  $\rho_f / \rho_{fb}$  inferior a 1,0; as vigas TR apresentam razão  $1,0 < \rho_f / \rho_{fb} < 1,4$  e as vigas SP apresentam razão  $\rho_f / \rho_{fb} > 1,4$ . Esta tabela indica razão de carregamento R\*, ou seja, todas as vigas apresentam as mesmas características geométricas e propriedades mecânicas dos materiais para os grupos R5, R1 e R2.

<b>Identificação</b>	<b>Seção transversal (cm<sup>2</sup>)</b>	<b>f'<sub>c</sub> (MPa)</b>	<b>f*<sub>fu</sub> (MPa)</b>	<b>A<sub>f</sub> (cm<sup>2</sup>)</b>	<b>Razão <math>\rho_f / \rho_{fb}</math></b>
C30-P1-R*-SB	20 x 30	30	425	3 $\phi$ 16	0,83
C30-P1-R*-TR	20 x 30	30	425	3 $\phi$ 19	1,18
C30-P1-R*-SP	20 x 30	30	425	3 $\phi$ 22,5	1,66
C30-P2-R*-SB	20 x 30	30	850	3 $\phi$ 9,5	0,86
C30-P2-R*-TR	20 x 30	30	850	4 $\phi$ 9,5	1,16

C30-P2-R*-SP	20 x 30	30	850	3 $\phi$ 12,5	1,51
C30-P3-R*-SB	20 x 30	30	1275	4 $\phi$ 6,3	0,93
C30-P3-R*-TR	20 x 30	30	1275	5 $\phi$ 6,3	1,15
C30-P3-R*-SP	20 x 30	30	1275	3 $\phi$ 9,5	1,56
C50-P1-R*-SB	20 x 30	50	425	3 $\phi$ 19	0,85
C50-P1-R*-TR	20 x 30	50	425	3 $\phi$ 22,5	1,20
C50-P1-R*-SP	20 x 30	50	425	4 $\phi$ 22,5	1,61
C50-P2-R*-SB	20 x 30	50	850	4 $\phi$ 9,5	0,84
C50-P2-R*-TR	20 x 30	50	850	3 $\phi$ 12,5	1,09
C50-P2-R*-SP	20 x 30	50	850	4 $\phi$ 12,5	1,44
C50-P3-R*-SB	20 x 30	50	1275	5 $\phi$ 6,3	0,84
C50-P3-R*-TR	20 x 30	50	1275	3 $\phi$ 9,5	1,14
C50-P3-R*-SP	20 x 30	50	1275	4 $\phi$ 9,5	1,54
C70-P1-R*-SB	20 x 30	70	425	4 $\phi$ 19	0,86
C70-P1-R*-TR	20 x 30	70	425	4 $\phi$ 22,5	1,22
C70-P1-R*-SP	20 x 30	70	425	4 $\phi$ 25	1,51
C70-P2-R*-SB	20 x 30	70	850	3 $\phi$ 12,5	0,82
C70-P2-R*-TR	20 x 30	70	850	4 $\phi$ 12,5	1,09
C70-P2-R*-SP	20 x 30	70	850	6 $\phi$ 12,5	1,64
C70-P3-R*-SB	20 x 30	70	1275	3 $\phi$ 9,5	0,86
C70-P3-R*-TR	20 x 30	70	1275	4 $\phi$ 9,5	1,16
C70-P3-R*-SP	20 x 30	70	1275	3 $\phi$ 12,5	1,51

Tabela 1: Características geométricas e propriedades mecânicas dos materiais.

#### 4 SIMULAÇÃO DA RESISTÊNCIA

Neste estudo é utilizada a Simulação de Monte Carlo para a análise de confiabilidade de vigas em CA-PRF para o estado limite último de flexão. Conforme mencionado, para a utilização da Simulação de Monte Carlo é necessário que sejam conhecidas as distribuições de probabilidade de todas as variáveis aleatórias envolvidas no problema e também a relação determinística entre estas variáveis que define o desempenho das vigas. Assim, neste ítem são apresentados: (1) o procedimento determinístico para o cálculo do momento resistente da viga em CA-PRF, e (2) as estatísticas das variáveis básicas pertinentes ao problema. Especial atenção foi dada ao desenvolvimento de um procedimento computacional para o cálculo do momento resistente da viga em CA-PRF. Neste desenvolvimento as seguintes hipóteses foram feitas:

- Seções transversais planas permanecem planas depois da deformação;
- As deformações seguem uma distribuição linear;
- A resistência à tração do concreto pode ser desprezada;

- O diagrama tensão-deformação do concreto é não-linear;
  - O PRF apresenta um comportamento elasto-frágil;
  - Existe perfeita aderência entre o PRF e o concreto.
- O momento resistente,  $M_R$ , é obtido através do seguinte procedimento iterativo:
- A deformação da fibra mais comprimida é assumida;
  - A posição da linha neutra é assumida;
  - O trecho da seção transversal correspondente ao concreto comprimido é discretizado em faixas horizontais;
  - A tensão no concreto correspondente à deformação no centro de cada faixa é obtida a partir da relação tensão-deformação correspondente (equação de Thorenfeldt et al. (1987));
  - A força resultante no concreto,  $R_C$ , é calculada;
  - Para esta posição da linha neutra, a deformação correspondente ao PRF é obtida;
  - A tensão no PRF correspondente a esta deformação é calculada;
  - A força resultante no PRF,  $R_{PRF}$ , é calculada pela multiplicação da tensão no PRF pela área total das barras de PRF;
  - A força resultante no concreto,  $R_C$ , é comparada à força resultante no PRF,  $R_{PRF}$ ;
  - Se o equilíbrio não é obtido, a posição da linha neutra é iterada até que o equilíbrio seja estabelecido, ou seja,  $R_C = R_{PRF}$ , dentro da tolerância  $| (R_C - R_{PRF}) / R_C | \leq 0,001$ ;
  - Se o equilíbrio é obtido, a tensão nas barras de PRF é comparada com a resistência à tração do PRF;
  - Se a resistência do PRF não for ultrapassada, o momento resistente correspondente a esta deformação (deformação na fibra mais comprimida) é calculado. Esta deformação e este momento correspondem a um ponto na curva momento resistente x deformação (Fig. 1). A deformação das fibras extremas do concreto é incrementada e os passos anteriores são repetidos para a geração de toda a curva  $M_R \times \varepsilon$ ;
  - Se a resistência à tração do PRF for ultrapassada, o modo de falha da viga é por ruptura do PRF e toda a curva  $M_R \times \varepsilon$  já foi obtida;
  - momento resistente da viga é o máximo obtido através da curva  $M_R \times \varepsilon$ .

Neste trabalho a simulação de Monte Carlo é utilizada para a obtenção das estatísticas do momento resistente para cada uma das 81 vigas em CA-PRF. Para tal, o procedimento determinístico apresentado acima e a geração de números aleatórios consistente com as estatísticas das variáveis básicas foram utilizados. Este procedimento computacional foi implementado a partir do software Matlab, versão 7.0.1. e as ferramentas do *Statistics toolbox*. Para cada viga foi gerada uma amostra constituída por 100.000 elementos, ou seja, 100.000 realizações do momento resistente.

A Tabela 2 apresenta um resumo das estatísticas das variáveis básicas consideradas neste trabalho (média, desvio padrão, coeficiente de variação e tipo de distribuição de probabilidade), para maiores detalhes ver Ribeiro (2009). Vale ressaltar

que o módulo de elasticidade do concreto,  $E_c$ , foi tomado como uma variável aleatória derivada da variável resistência à compressão do concreto,  $F_c$ , ou seja  $E_c = 4750 (F_c)^{0,5}$  (MPa). Todas as variáveis, com exceção do módulo de elasticidade do PRF, apresentadas na Tabela 2 foram consideradas como estatisticamente independentes. Algumas variáveis foram assumidas como determinísticas, a saber, o vão da viga ( $L = 3000$  mm) e a área da armadura do PRF. As características geométricas da seção transversal da barra de PRF influenciam na variabilidade da resistência à tração do PRF (ACI 440, 2006); neste trabalho será considerado que o efeito de uma possível variabilidade da área da seção transversal está incluído na variabilidade das propriedades mecânicas do PRF. Assim, a área das barras de PRF será tomada como uma variável determinística, de valor igual ao valor nominal das mesmas. Os valores nominais da largura e altura da seção transversal são 200 e 300 mm, respectivamente.

Variável Básica	Média ( $\mu$ )	Desvio Padrão ( $\sigma$ )	Coefficient e de variação	Distribuição de probabilidade
Dimensões				
$\Delta_h, \Delta_b$	1,524 mm	6,35 mm	0,0417	Normal
$\Delta_c$	$6,35 + 0,004 h$ (mm)	4.22 mm	---	Normal
Resistência à compressão do concreto (corpo-de-prova cilíndrico)				
$f'_c = 30$ MPa	34,64 MPa	3,46 MPa	0,10	Lognormal
$f'_c = 50$ MPa	54,74 MPa	5,77 MPa	0,10	Lognormal
$f'_c = 70$ MPa	80,83 MPa	8,08 MPa	0,10	Lognormal
Resistência à tração do VPRF				
$f_{fu} = 425$ MPa	500 MPa	25 MPa	0,05	Normal
$f_{fu} = 850$ MPa	1000 MPa	50 MPa	0,05	Normal
$f_{fu} = 1275$ MPa	1500 MPa	75 MPa	0,05	Normal
Módulo de elasticidade do VPRF				
$E_{PRF} = 35$ GPa	35 GPa	1750 MPa	0,05	Normal
$E_{PRF} = 42,5$ GPa	42,5 GPa	2125 MPa	0,05	Normal
$E_{PRF} = 50$ GPa	50 GPa	12500 MPa	0,05	Normal
Cargas				
Carga Permanente	Ver Ribeiro (2009)		0,10	Normal
Sobrecarga	Ver Ribeiro (2009)		0,25	Tipo I

Tabela 2 - Estatísticas das variáveis básicas.

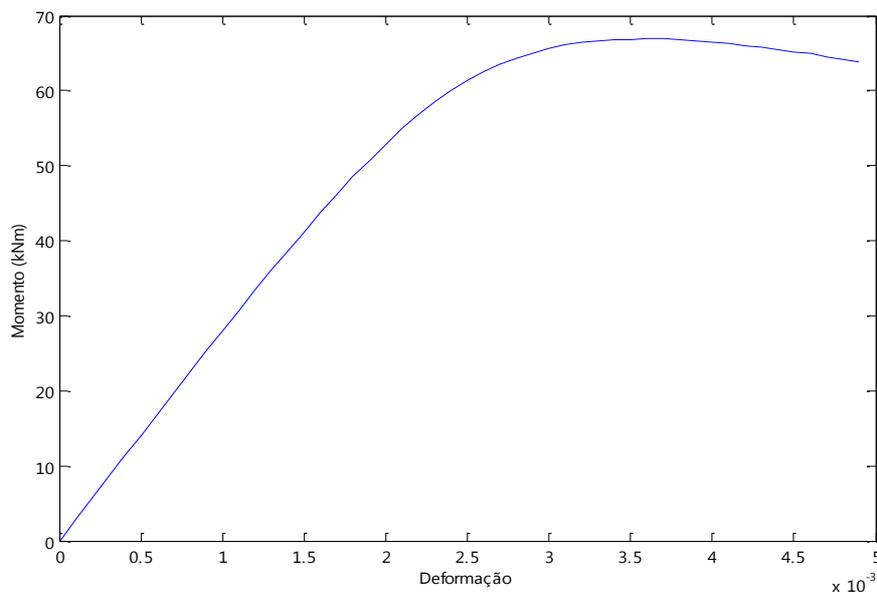


Figura 1 – Diagrama *Momento resistente vs Deformação* ( $M_R \times \epsilon$ ).

#### 4.1 Estatísticas do Momento Resistente

As estatísticas do momento resistente (mínimo, máximo, média e desvio padrão) para as vigas analisadas estão apresentadas na Tabela 3. Esta tabela também apresenta o valor do momento resistente nominal,  $M_n$  (calculado segundo as recomendações do ACI 440 (2006)) e a razão  $\mu_{MR-SMC}/M_n$ . Uma comparação entre o momento resistente nominal,  $M_n$ , e o momento resistente médio,  $\mu_{MR-SMC}$ , para cada viga é apresentada na Fig. 2. A análise dos resultados apresentados na Tabela 3 e Fig. 2 mostra que a resistência à compressão do concreto é o fator de maior influência no momento resistente, o que pode ser constatado através dos valores correspondentes a coluna  $\mu_{MR-SMC}/M_n$  da Tabela 3.

Quando o  $f'_c$  adotado é de 30 MPa, a razão  $\mu_{MR-SMC}/M_n$  alcança os maiores valores (1,0464 a 1,2151); já quando o  $f'_c$  é de 50 MPa a razão  $\mu_{MR-SMC}/M_n$  encontra-se na faixa de 1,0076 a 1,1542 e quando o  $f'_c$  é de 70 MPa a razão  $\mu_{MR-SMC}/M_n$  alcança os menores valores (0,9434 a 1,0813). Desta maneira pode-se antecipar que a resistência à compressão do concreto tem uma influência significativa nos níveis de confiabilidade de vigas em CA-PRF. Outro fator que também apresenta grande influência no momento resistente é a taxa de armadura de PRF (vigas subarmadas, transição e superarmada), o que pode ser constatado através dos valores correspondentes a coluna  $\mu_{MR-SMC}/M_n$  da Tabela 3. Quando a viga é subarmada a razão  $\mu_{MR-SMC}/M_n$  alcança os maiores valores (1,0304 a 1,2151); já quando a viga está na região de transição a razão  $\mu_{MR-SMC}/M_n$  encontra-se na faixa de 0,9470 a 1,1204 e quando a viga é superarmada a razão  $\mu_{MR-SMC}/M_n$  alcança os menores valores (0,9434 a 1,1093). Desta maneira pode-se antecipar que a taxa de armadura de PRF também tenha uma influência significativa nos níveis de confiabilidade de vigas em CA-PRF.

## 4.2 Estatísticas da Deformação Última

A Tabela 4 apresenta as estatísticas da deformação última,  $\varepsilon_{ult}$  (mínimo, média, máximo e desvio padrão) para as vigas analisadas. Através desta tabela pode-se observar que enquanto a deformação correspondente à tensão máxima no concreto aumenta à medida que a resistência à compressão do concreto aumenta, a tendência oposta é observada em relação à deformação última. Por exemplo, as médias de  $\varepsilon_{ult}$  para as vigas C30-P2-R\*-SB, C50-P2-R\*-SB e C70-P2-R\*-SB são 0,0049, 0,0038 e 0,0034, respectivamente. Estes resultados confirmam a tendência observada na literatura (ACI 363, 1984) de menores deformações últimas para resistências do concreto mais elevadas. Com relação ao coeficiente de variação da deformação última, para estas mesmas vigas, os valores correspondentes são 1,4 %, 1,33 % e 1,26 %, indicando uma menor dispersão dos resultados à medida que a resistência à compressão do concreto aumenta.

Vigas	Momento Resistente, $M_{R-SMC}$ (kN m)				$M_n$	$\mu_{R-SMC} / M_n$
	Mínimo	Média	Máximo	Desvio padrão		
C30-P1-R*-SB	41,1	55,4	72,7	13,6	45,8	1,2114
C30-P1-R*-TR	45,5	61,7	81,8	4,1	58,1	1,0627
C30-P1-R*-SP	49,8	68,0	91,1	4,7	65,0	1,0464
C30-P2-R*-SB	30,7	41,2	53,3	2,6	33,9	1,2151
C30-P2-R*-TR	34,3	46,1	59,8	2,9	41,7	1,1044
C30-P2-R*-SP	37,4	50,3	65,7	3,2	46,1	1,0933
C30-P3-R*-SB	26,7	35,8	46,1	2,2	30,4	1,1770
C30-P3-R*-TR	29,3	39,2	50,6	2,4	35,0	1,1204
C30-P3-R*-SP	32,7	43,9	56,9	2,8	39,6	1,1093
C50-P1-R*-SB	53,6	73,4	96,5	4,9	65,4	1,1226
C50-P1-R*-TR	59,6	82,3	109,0	5,6	81,3	1,0129
C50-P1-R*-SP	65,7	91,3	121,6	6,4	90,6	1,0076
C50-P2-R*-SB	39,3	52,8	68,3	3,3	45,7	1,1542
C50-P2-R*-TR	43,1	58,2	75,6	3,7	56,2	1,0349
C50-P2-R*-SP	48,1	65,3	85,2	4,2	63,5	1,0285
C50-P3-R*-SB	32,6	43,5	56,0	2,7	38,4	1,1341
C50-P3-R*-TR	37,4	50,1	64,7	3,1	48,0	1,0436
C50-P3-R*-SP	42,0	56,4	73,1	3,6	54,4	1,0374
C70-P1-R*-SB	67,2	91,4	123,6	6,4	87,6	1,0435
C70-P1-R*-TR	75,1	102,7	139,8	7,4	108,4	0,9470
C70-P1-R*-SP	80,1	109,9	150,5	8,1	116,5	0,9434
C70-P2-R*-SB	47,6	64,0	85,0	4,3	59,2	1,0813

C70-P2-R*-TR	53,6	72,2	96,3	4,9	74,9	0,9640
C70-P2-R*-SP	62,8	85,1	114,4	5,9	88,9	0,9573
C70-P3-R*-SB	40,2	53,7	70,8	3,5	52,1	1,0304
C70-P3-R*-TR	46,2	62,0	82,2	4,1	63,9	0,9704
C70-P3-R*-SP	50,9	68,5	91,3	4,6	71,0	0,9659

Tabela 3 - Estatísticas do momento resistente obtido via simulação de Monte Carlo,  $M_{R-SMC}$ , momento resistente nominal,  $M_n$ , e razão  $\mu_{R-SMC} / M_n$ .

Vigas	Mínimo	Média	Máximo	Desvio Padrão	Prob. de falha por ruptura do PRF
C30-P1-R*-SB	0,0031	0,0048	0,0049	1,95E-04	5,26E-03
C30-P1-R*-TR	0,0036	0,0046	0,0049	2,67E-04	*
C30-P1-R*-SP	0,0035	0,0044	0,0049	3,00E-04	*
C30-P2-R*-SB	0,0035	0,0049	0,0049	4,41E-05	1,64E-03
C30-P2-R*-TR	0,0039	0,0049	0,0049	5,89E-05	*
C30-P2-R*-SP	0,0037	0,0049	0,0049	1,24E-04	*
C30-P3-R*-SB	0,0043	0,0049	0,0049	1,74E-05	8,00E-05
C30-P3-R*-TR	0,0042	0,0049	0,0049	2,83E-05	*
C30-P3-R*-SP	0,0040	0,0049	0,0049	5,81E-05	*
C50-P1-R*-SB	0,0032	0,0035	0,0044	1,29E-04	1,00E-05
C50-P1-R*-TR	0,0031	0,0034	0,0043	1,28E-04	*
C50-P1-R*-SP	0,0030	0,0033	0,0041	1,02E-04	*
C50-P2-R*-SB	0,0033	0,0038	0,0044	1,80E-04	4,00E-05
C50-P2-R*-TR	0,0033	0,0037	0,0044	1,49E-04	*
C50-P2-R*-SP	0,0033	0,0036	0,0044	1,41E-04	*
C50-P3-R*-SB	0,0033	0,0040	0,0044	2,16E-04	5,00E-05
C50-P3-R*-TR	0,0033	0,0039	0,0044	1,95E-04	*
C50-P3-R*-SP	0,0033	0,0038	0,0044	1,60E-04	*
C70-P1-R*-SB	0,0030	0,0032	0,0036	5,47E-05	*
C70-P1-R*-TR	0,0030	0,0031	0,0034	7,41E-05	*
C70-P1-R*-SP	0,0030	0,0031	0,0033	6,30E-05	*
C70-P2-R*-SB	0,0031	0,0034	0,0039	8,95E-05	*
C70-P2-R*-TR	0,0031	0,0033	0,0037	6,42E-05	*
C70-P2-R*-SP	0,0031	0,0032	0,0036	7,18E-05	*
C70-P3-R*-SB	0,0031	0,0035	0,0050	1,96E-04	*

C70-P3-R*-TR	0,0031	0,0034	0,0040	9,51E-05	*
C70-P3-R*-SP	0,0031	0,0033	0,0038	7,42E-05	*

Tabela 4 - Estatísticas da deformação última,  $\epsilon_{ult}$  obtidas via simulação de Monte Carlo (\* Probabilidade inferior a  $10^{-5}$ ).

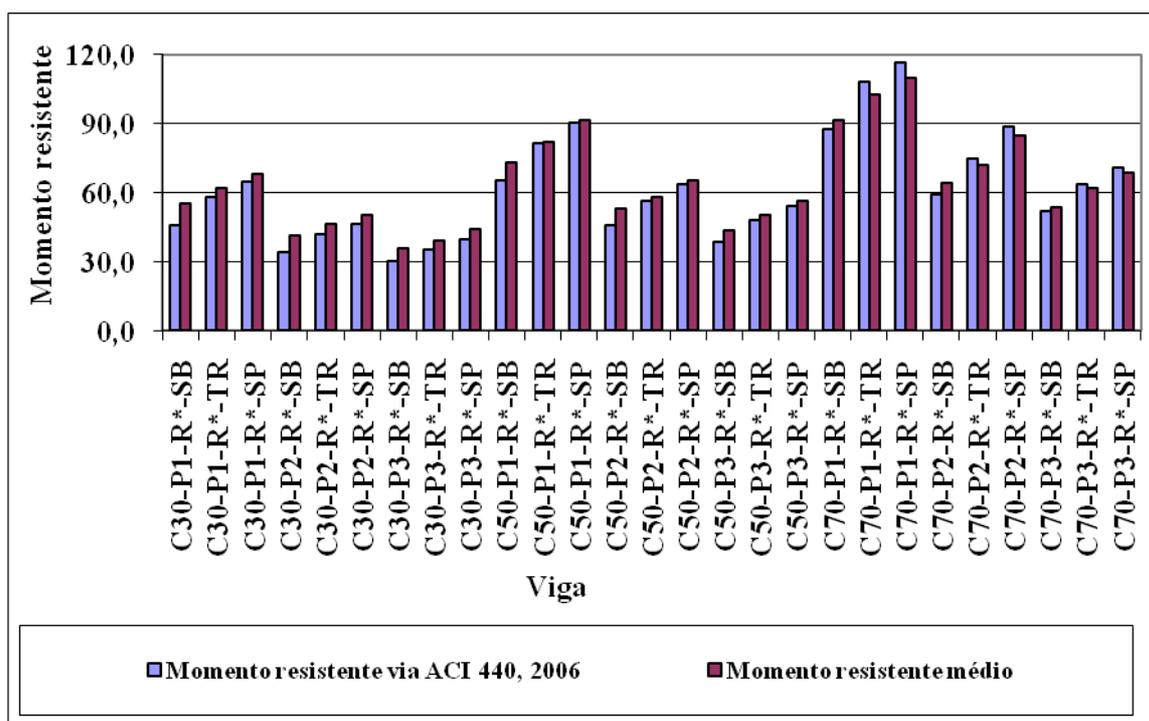


Figura 2 – Momento resistente médio,  $M_{R-SMC}$ , e momento resistente nominal,  $M_n$ .

### 4.3 Estatísticas do Modo de Falha

Conforme mencionado, o esmagamento do concreto é mais desejável que a ruptura do PRF. É de interesse portanto o conhecimento do modo de falha, caso a viga em CA-PRF venha a falhar. Tal informação está lançada na última coluna da Tabela 4. A análise desta tabela permite observar que, em linhas gerais, quando a resistência do concreto aumenta a probabilidade de "falha por ruptura do PRF" tende a diminuir. Para as vigas analisadas (taxa de armadura na faixa de 0,82 a 1,66  $\rho_{fb}$ ), realizações de "falha por ruptura do PRF" foram observadas apenas para os casos de vigas subarmadas. A maior probabilidade deste modo de falha corresponde à viga C30-P1-R\*-SB, sendo igual a  $5,26 \times 10^{-3}$ . Pode-se concluir que tais probabilidades são aceitáveis.

## 5 ANÁLISE DE CONFIABILIDADE

No problema em questão a função de desempenho é dada por:

$$g(M_R, M_{CP}, M_{SC}) = M_R - M_{CP} - M_{SC} \quad (12)$$

onde  $M_R$  é o momento resistente da viga,  $M_{CP}$  e  $M_{SC}$  são o momento fletor devido à carga permanente, e à sobrecarga, respectivamente. Na equação acima o momento resistente,  $M_R$ , é função de uma série de variáveis aleatórias, a saber: largura da seção transversal, altura da seção transversal, resistência à compressão do concreto, resistência à tração do PRF, módulo de elasticidade do PRF e módulo de elasticidade do concreto. As parcelas do momento fletor,  $M_{CP}$  e  $M_{SC}$ , por sua vez, são função da carga permanente,  $CP$ , e da sobrecarga,  $SC$ , respectivamente. Vale ressaltar que na Eq. 12, o momento resistente não é definido explicitamente e sim através de um procedimento numérico (ver seção 4).

A Tabela 5 apresenta os resultados encontrados via Simulação de Monte Carlo para a probabilidade de falha associada a cada viga e outras grandezas de interesse (vigas R5). Resultados análogos para as vigas R1 e R2 são encontrados em Ribeiro (2009). Para facilidade da análise destes resultados, nestas tabelas também estão apresentados a média,  $\mu_{R-SMC}$ , e o desvio padrão,  $\sigma_{R-SMC}$ , do momento resistente,  $M_R$ , e a média,  $\mu_{A-SMC}$ , e o desvio padrão,  $\sigma_{A-SMC}$ , do momento atuante,  $M_A$ . Adicionalmente, os índices de confiabilidade associados a estas probabilidades de falhas,  $\beta_{SMC}$ , também foram calculados.

VIGAS	$M_R$ (kN m)		$M_A$ (kN m)		Probabilidade de falha	$\beta_{SMC}$
	$\mu_{MR-SMC}$	$\sigma_{MR-SMC}$	$\mu_{MA}$	$\sigma_{MA}$		
C30-P1-R5-SB	55,4	3,6	25,2	4,7	1,80E-04	3,5678
C30-P1-R5-TR	61,7	4,1	34,5	6,4	3,03E-03	2,7445
C30-P1-R5-SP	68,0	4,7	42,3	7,8	1,12E-02	2,2825
C30-P2-R5-SB	41,2	2,6	18,6	3,5	1,60E-04	3,5985
C30-P2-R5-TR	46,1	2,9	24,5	4,5	1,47E-03	2,9739
C30-P2-R5-SP	50,3	3,2	29,9	5,6	6,52E-03	2,4827
C30-P3-R5-SB	35,8	2,2	16,7	3,1	2,40E-04	3,4917
C30-P3-R5-TR	39,2	2,4	20,6	3,8	1,30E-03	3,0115
C30-P3-R5-SP	43,9	2,8	25,7	4,8	5,32E-03	2,5543
C50-P1-R5-SB	73,4	4,9	36,0	6,7	4,50E-04	3,3201
C50-P1-R5-TR	82,3	5,6	48,8	9,1	6,79E-03	2,4682
C50-P1-R5-SP	91,3	6,4	58,9	10,9	1,64E-02	2,1345
C50-P2-R5-SB	52,8	3,3	25,1	4,7	3,10E-04	3,4227
C50-P2-R5-TR	58,2	3,7	32,2	6,0	2,58E-03	2,7969
C50-P2-R5-SP	65,3	4,2	41,3	7,7	1,29E-02	2,2286
C50-P3-R5-SB	43,5	2,7	21,1	3,9	4,00E-04	3,3528
C50-P3-R5-TR	50,1	3,1	28,2	5,2	3,34E-03	2,7124
C50-P3-R5-SP	56,4	3,6	35,4	6,6	1,16E-02	2,2695

C70-P1-R5-SB	91,4	6,4	48,2	8,9	1,46E-03	2,9760
C70-P1-R5-TR	102,7	7,4	65,4	12,1	1,46E-02	2,1802
C70-P1-R5-SP	109,9	8,1	75,8	14,1	3,08E-02	1,8696
C70-P2-R5-SB	64,0	4,3	32,6	6,0	8,80E-04	3,1280
C70-P2-R5-TR	72,2	4,9	43,0	8,0	6,89E-03	2,4629
C70-P2-R5-SP	85,1	5,9	57,8	10,7	2,62E-02	1,9397
C70-P3-R5-SB	53,7	3,5	28,7	5,3	1,63E-03	2,9421
C70-P3-R5-TR	62,0	4,1	37,7	7,0	8,88E-03	2,3706
C70-P3-R5-SP	68,5	4,6	46,1	8,6	2,39E-02	1,9797

Tabela 5 - Momento resistente,  $M_R$  (média e desvio padrão), momento atuante,  $M_A$  (média e desvio padrão), probabilidades de falha e índices de confiabilidade (vigas R5).

Os índices de confiabilidade obtidos para as 81 vigas analisadas são apresentados na Fig. 3. Nesta figura, as barras representadas com as mesmas cores indicam vigas em que as características geométricas e as propriedades mecânicas dos materiais são as mesmas, exceto a taxa de armadura de PRF. Por exemplo, as vigas C70-P2-R5-SB, C70-P2-R5-TR e C70-P2-R5-SP têm os diagramas de barras correspondentes com a cor verde, indicando que a primeira é uma viga subarmada, a segunda encontra-se na região de transição e a terceira é uma viga superarmada, ou seja, diferem apenas na taxa de armadura de PRF. A Fig. 3a, b, c corresponde às vigas C30, C50 e C70, respectivamente. Vale ressaltar que para as vigas onde a probabilidade de falha é inferior a  $10^{-5}$ , o índice de confiabilidade é lançado como 4,75.

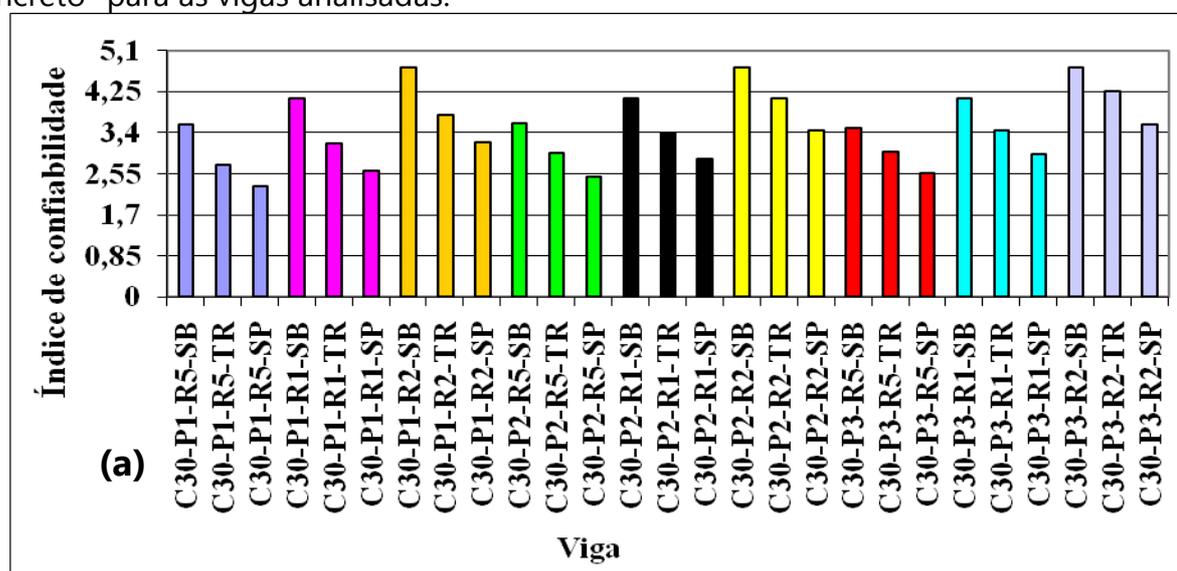
Pelos resultados obtidos pode-se observar que:

- À medida que a resistência à compressão do concreto aumenta há um aumento significativo na probabilidade de falha (e uma redução no índice de confiabilidade);
- As vigas subarmadas apresentam índices de confiabilidade razoavelmente superiores àqueles apresentados pelas vigas na região de transição e superarmadas;
- A resistência à tração do PRF tem grande influência nos resultados para os casos de vigas nas região de transição e vigas superarmadas. Nestes casos pode-se observar que à medida que a resistência à tração do PRF aumenta há uma redução significativa na probabilidade de falha (e aumento no índice de confiabilidade);
- A razão entre os carregamentos tem grande influência nos resultados. Nestes casos pode-se observar que à medida que a razão,  $\mu_{CP} \square / \mu_{SC}$  aumenta há uma redução significativa na probabilidade de falha (e um aumento no índice de confiabilidade);
- A maior probabilidade de falha obtida corresponde à viga C70-P1-R5-SP,  $P_F = 3.08 \times 10^{-2}$  ( $\beta_{SMC} = 1,8696$ );
- As menores probabilidades de falha correspondem à combinação menor

resistência à compressão do concreto, maior resistência a tração do PRF, maior razão de carregamento e vigas subarmadas. Nestes casos probabilidades de falha inferiores a  $10^{-5}$  podem ser obtidas.

## 6 CONCLUSÕES

Neste trabalho a simulação de Monte Carlo foi utilizada na avaliação da confiabilidade de vigas em CA-PRF para o estado limite último de flexão simples. Este procedimento foi implementado de forma modular; inicialmente a modelagem do momento resistente foi feita para que em seguida esta informação pudesse ser utilizada no critério de desempenho correspondente. O procedimento modular adotado também permitiu um maior entendimento do comportamento das vigas em CA-PRF sujeitas à flexão. Uma comparação entre o momento resistente nominal,  $M_n$ , e o momento resistente médio,  $\mu_{MR-SMC}$ , mostrou que a resistência à compressão do concreto é o fator de maior influência no momento resistente. Outro fator que também apresenta grande influência no momento resistente é a taxa de armadura de PRF (vigas subarmadas, transição e superarmadas). Para as vigas subarmadas analisadas neste trabalho a razão  $\mu_{MR-SMC}/M_n$  alcançou os maiores valores, sendo que os menores valores para esta razão são alcançados para as vigas superarmadas. A simulação do momento resistente também permitiu a obtenção de estatísticas da deformação última,  $\varepsilon_{ult}$  (mínimo, média, máximo e desvio padrão) e da probabilidade de falha associada aos modos de falha "ruptura do PRF" e "esmagamento do concreto" para as vigas analisadas.



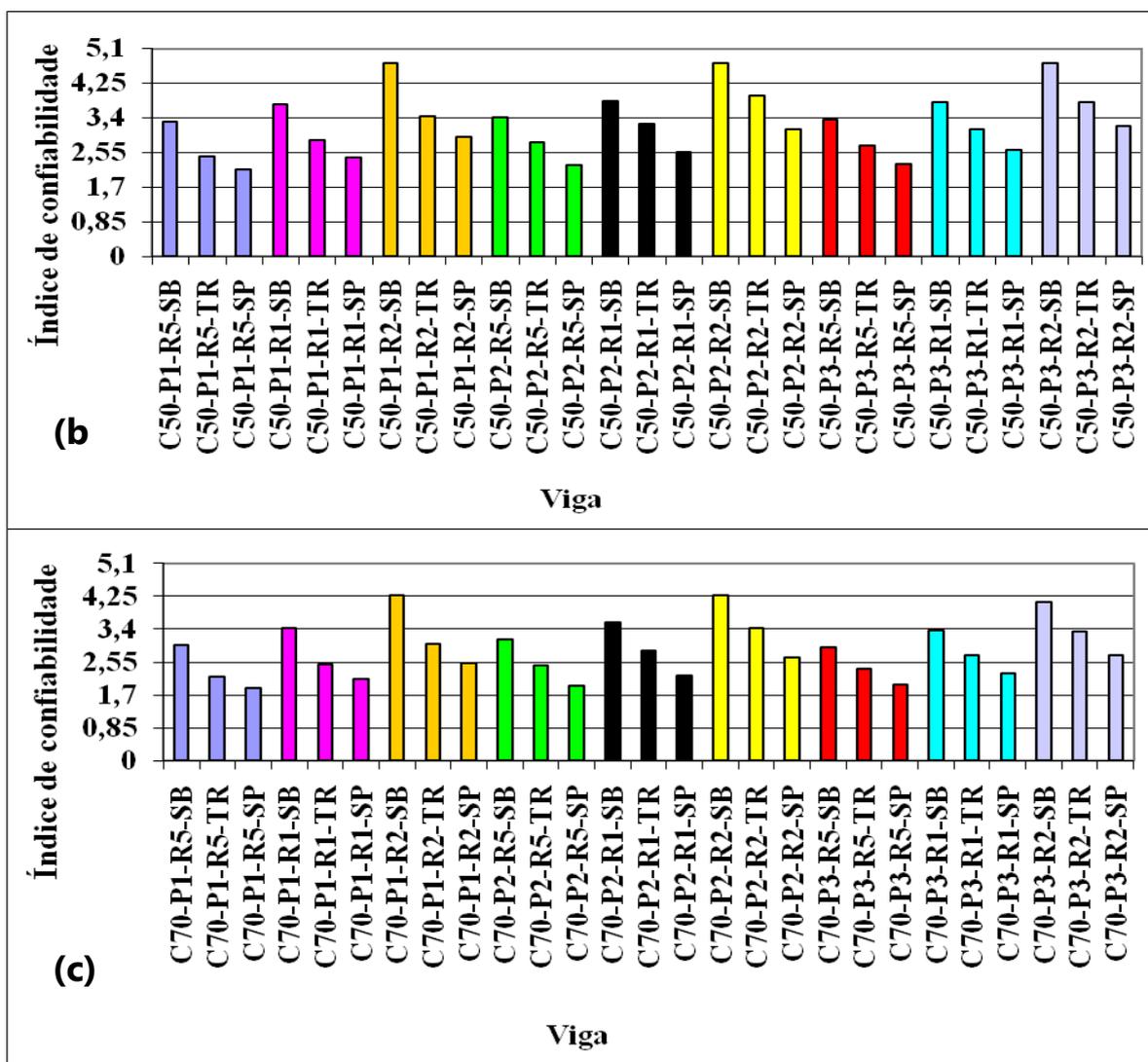


Figura 3 – Índices de confiabilidade para as vigas: (a) C30, (b) C50 e (c) C70.

A simulação de Monte Carlo apresentou grandes vantagens visto que uma série de simplificações que seriam necessárias em outros procedimentos puderam ser evitadas, tais como, a utilização de funções normais equivalentes, transformação de variáveis correlacionadas em estatisticamente independentes. Ademais o tratamento de funções implícitas, como aquele correspondente à definição do momento resistente, foi bastante facilitado pela utilização da simulação de Monte Carlo.

O tratamento modular utilizado nesta pesquisa permitirá uma fácil utilização dos procedimentos aqui implementados no desenvolvimento de normas técnicas para projeto de estruturas em CA-PRF. Vale ressaltar que o módulo "simulação de Monte Carlo para a resistência da viga" é independente de critérios normativos. No procedimento implementado para a análise de confiabilidade, tais critérios estão presentes na definição das estatísticas do carregamento. Assim, a análise de confiabilidade para uma determinada norma técnica para projeto de estruturas em

CA-PRF demandará adaptação dos procedimentos utilizados na definição das estatísticas do carregamento, o que pode ser feito com grande facilidade.

Quanto à adequação das recomendações do ACI 440 (2006) pode-se dizer que:

- A utilização de PRF de menor resistência e menor módulo de elasticidade (vigas P1) conduziu a índices de confiabilidade reduzidos. Desta maneira a utilização de materiais com estas características deve ser evitada;
- Os resultados encontrados neste estudo apontaram para a possibilidade de que níveis reduzidos de confiabilidade possam ser obtidos, em especial para a combinação de maior resistência à compressão do concreto, menor resistência à tração do PRF e menor relação  $\mu_{CP}/\mu_{SC}$ . Tal resultado pode ser atribuído, em especial, a uma menor resistência à compressão do concreto in situ relativamente àquela medida em corpos-de-prova cilíndricos. Neste trabalho um fator variável foi utilizado nesta conversão; já no ACI 440 este parâmetro é tomado como fixo e igual a 0,85. É interessante notar que no caso de vigas em CA, sendo usualmente projetadas como vigas subarmadas, tal consideração resulta em um efeito de menor importância. Entretanto, a resistência do concreto é de fundamental importância no caso de vigas superarmadas em CA-PRF. Assim, a utilização dos procedimentos da ACI 440 para concretos de resistência mais elevada deve ser feita com cautela;
- A taxa de armadura de PRF tem grande influência nos níveis de confiabilidade implícitos nas recomendações do ACI 440. Os resultados obtidos indicaram que as vigas subarmadas apresentam índices de confiabilidade razoavelmente superiores àqueles apresentados pelas vigas na região de transição e superarmadas. Vê-se assim que o objetivo de prover mais segurança para o modo de falha correspondente à ruptura do PRF é atingido;
- A razão entre os carregamentos tem grande influência nos níveis de confiabilidade implícitos nas recomendações do ACI 440. Neste estudo pôde ser observado que a medida em que a razão  $\mu_{CP}/\mu_{SC}$  aumenta há uma redução significativa na probabilidade de falha e conseqüentemente um aumento no índice de confiabilidade. Este fato já observado por outros autores (Nogueira e Diniz, 2007 e Pilakoutas et al., 2002) é, entretanto, de difícil tratamento dentro do contexto do projeto semiprobabilístico.

## AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais (FAPEMIG) e ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pelo apoio recebido para o desenvolvimento desta pesquisa.

## REFERÊNCIAS

ACI Committee 318. *Building Code Requirements for Reinforced Concrete and Commentary*. Farmington Hills, Michigan, 2008.

- ACI Committee 363. State-of-the-Art on High-Strength Concrete, *ACI Journal*, Vol.81, No. 4, pp. 364-411, 1984.
- ACI Committee 440. *Guide for the Design and Construction of Structural Concrete Reinforced with FRP Bars*. ACI 440.1R-06, 2006.
- Ang, A. H-S. e Tang, W. H. *Probability Concepts in Engineering Planning and Design, Decision, Risk and Reliability*. V. II, 562 p., 1990.
- Diniz, S. M. C. Reliability Evaluation of FRP Reinforced Concrete Beams. *50º Congresso Brasileiro do Concreto*, Salvador, 2008 (CD-ROM).
- Nogueira, H.A.T. e Diniz, S.M.C. A NBR 6118 e o concreto de alta resistência: projetando com segurança além dos 50 MPa, *49º Congresso Brasileiro do Concreto*, 1 a 5 de setembro de 2007, Bento Gonçalves, 2007 (CD-ROM).
- Pilakoutas, K., Neocleous, K. e Guadagnini, M. Design Philosophy Issues of Fiber Reinforced Polymer Reinforced Concrete Structures. *Journal of Composites for Construction*, ASCE, 6(3), pp. 154-161, 2002.
- Ribeiro, S.E.C. *Análise da Confiabilidade de Vigas de Concreto Armado com Plástico Reforçado por Fibras*, Tese de doutorado, PROPEES-UFMG, 2009.
- Thorenfeldt, E., Tomaszewicz, A. e Jensen, J.J. Mechanical Properties of High Strength Concrete and Application to Design, *Proceedings of the Symposium: Utilization of High-Strength Concrete*, Stavanger, Norway, pp. 149-159, 1987.