

## MÉTODO DE COLOCAÇÃO ESTOCÁSTICA APLICADO A QUANTIFICAÇÃO DE INCERTEZAS EM FRATURA HIDRÁULICA

**Souleymane Zio and Fernando A. Rochinha**

*Mechanical Engineering Department, Federal University of Rio de Janeiro, Cidade Universitária - Ilha  
do Fundão, Caixa Postal 68.503, CEP 21945-970, Rio de Janeiro, Brazil*

*<http://www.mecanica.ufrj.br/ufrj-em/>*

**Abstract.** Grandes variabilidades podem ser encontradas nas propriedades de reservatórios de petróleo. Essas variabilidades são devidas a vários fatores tais como: o ambiente do reservatório, as técnicas usadas para medir os dados, a modelagem do processo de fratura hidráulica. Nesse trabalho, estuda-se como essas variabilidades tem influência sobre a saída do processo de fratura hidráulica. Por isso, construí-se um modelo robusto de resolução de fratura hidráulica através do método de colocação estocástica. Nesse caso, considera-se o módulo de elasticidade do reservatório como parâmetro incerto. Devido à literatura considera-se que o módulo de elasticidade tem uma distribuição log-normal.

## 1 INTRODUÇÃO

O fraturamento hidráulico consiste na injeção de um fluido fraturante em uma formação rochosa, sob uma pressão suficientemente alta para causar a ruptura da rocha por tração. Por consequência, inicia-se uma fratura na rocha. Esta fratura propaga-se, à medida que o fluido fraturante continua sendo bombeado. Em adição ao fluido fraturante, é introduzido material granular (denominado agente de sustentação) de forma a manter a fratura aberta quando for cessado o bombeio. Assim, cria-se um canal permanente de alta permeabilidade, para o escoamento de hidrocarboneto entre a formação rochosa e o poço.

A técnica de fraturamento tem sido responsável, ao longo dos anos, pela viabilização econômica de muitos campos petrolíferos, em todo o mundo (Fernandes, 1998).

Estima-se que cerca de 40 por cento dos poços produtores de petróleo são estimulados por fraturamento hidráulico. No Brasil, os arenitos friáveis de campos têm se constituído no principal cenário de aplicação da técnica, seja para o aumento de produtividade, seja para controle de produção de areia.

Para alcançar com mais precisão os objetivos do uso da técnica de fratura hidráulica, o programa de simulação numérico deve ser o mais robusto possível, i.e um programa capaz de reproduzir com grande confiança os resultados do processo de fratura hidráulica. Os resultados desse algoritmo devem se aproximar o mais possível dos resultados reais, por isso, é preciso resolver o problema levando em conta o ambiente real do reservatório.

Considerando o fato do reservatório de petróleo ser um ambiente bastante complexo, muitas informações são desprezadas na resolução determinística desse processo. Os parâmetros de entrada usados nessa resolução são medidos numa porção bem pequena do reservatório, portanto esse tipo de resolução pode limitar a visão do projetista. Para aumentar o campo de previsão do projeto introduz-se o conceito de incertezas sobre alguns parâmetros de entrada do processo de fratura.

As incertezas no reservatório podem ser devido à variação dos dados experimentais, as dificuldades de medição desses dados no volume inteiro do reservatório ou as variabilidades do ambiente operacional. Incertezas também podem surgir das dificuldades de descrever com grande confiança a física do problema de fratura (as precisões sobre a geometria do reservatório e das condições de contorno). Também podem ocorrer devido à representação matemática do sistema físico (erros de aproximação e a escolha do modelo de fratura). A presença dessas incertezas pode ser modelada através da reformulação das equações governantes em equações diferenciais parciais estocásticas (SPDEs). Na literatura existem varias técnicas de resolução das SPDEs, essas técnicas podem ser classificadas em dois grupos: a abordagem estatística e não-estatística.

A simulação de Monte Carlo (R.E.Caffish., 1998; et al, 2001) e de Quasi Monte Carlo (Niederreiter, 1992) são abordagens estatísticas para resolver as SPDEs. Estes métodos não aproximam o domínio estocástico. Uma das grandes vantagens desses métodos é a taxa de convergência que não depende do número de variáveis incertas e é muito fácil de implementar, basta ter um código determinístico valido. Contudo, essa abordagem tem limitação pois, torna-se intratável por um problema de grande dimensão estocástica. No outro lado, temos a abordagem não-estatística que consiste em uma aproximação e uma modelagem das incertezas no sistema. Um exemplo dessa abordagem é o método de perturbação ou de decomposição de Neumann (et al, 1992) que são baseados em representações em série de Taylor da solução do problema.

Nos últimos anos, outras abordagens surgiram como o método de Galerkin espectral (Babuška and Chleboun, 2002; Ghanem and Spanos, 1991) e o método de colocação estocástica (Ganap-

athysubramanian and Zabararas, 2008; Ma and Zabararas, 2009).

No método de Galerkin espectral as aproximações no espaço convencional são feitas usando elementos finitos, volumes finitos etc; e o campo aleatório é considerado como uma dimensão adicional ao tempo e espaço. A idéia básica dessa técnica é de projetar as variáveis do modelo determinístico num espaço estocástico construído a partir de um conjunto de polinômios ortogonais. Esses polinômios são função de um conjunto de variáveis aleatórias  $\xi(\theta)$  onde  $\theta$  é a realização no espaço dos eventos. O método é adequado para resolver equações diferenciais ordinárias e parciais, mesmo no caso de dependência não-linear das variáveis aleatórias. A principal desvantagem desse método é o acoplamento das equações, que torna a técnica não eficiente, pois é preciso mudar os códigos determinísticos já existente para aplica-la. Um método alternativo que surge para contornar o problema encontrado no método de Galerkin é o método de colocação estocástica. Este método é bastante usado hoje em dia para propagar incertezas em vários problemas complexos com grandes dimensões estocásticas. Além de ser um método não intrusivo, o método preserva a rápida convergência do método de Galerkin espectral.

Nos métodos de resolução de SPDEs proposto até hoje, o método de colocação estocástica parece ser um método ideal para propagar incertezas num sistema. Esses métodos de resolução de problema estocástico são usados para propagar incertezas no modelo. Mas antes da propagação das incertezas no modelo determinístico, existe um passo importante que é a identificação e a modelagem das incertezas.

O objetivo principal desse trabalho é de estender a resolução determinística de fratura hidráulica proposto por (Peirce and Detournay, 2008), e de propor um modelo de resolução que leve em consideração a presença de incertezas no reservatório. Considerando o modulo de elasticidade como parâmetro incerto, uma vez que está fortemente ligado à criação de fratura no reservatório. As incertezas são modeladas usando a distribuição de probabilidade log-normal. Uma das motivação do uso dessa distribuição vem de (Eckhard limper, 2001) que apresentou a distribuição log-normal como uma distribuição ideal para a modelagem das incertezas sobre os parâmetros na area de geologia, de mina. Também, essa distribuição é escolhida para respeitar a física do problema.

Para propagar incertezas no modelo de fratura, usamos o método de colocação estocástica. para alguns autores, o método é ideal para resolver problemas estocásticos com menos custo computacional. Para verificação e validação dos resultados do método de colocação estocástica (Ma and Zabararas, 2009). comparamos a convergência e os resultados do método de colocação estocástica à simulação de Monte Carlo (Niederreiter, 1992), cuja a eficiência foi mostrada por vários autores e tem sido aplicado para resolver problemas na varias areas. Na seção 2, apresentamos a formulação determinística do problema de fratura hidráulica, a física do problema e as formulações adimensionais do problema. Na seção 3, apresenta-se as técnicas de resolução das equações estocásticas do problema de fratura hidráulica. Na seção 4, apresenta-se os resultados numéricos obtidos e as discussões. As conclusões são apresentadas na ultima seção

## 2 FORMULAÇÃO DETERMINISTA

O princípio básico do fraturamento hidráulico consiste na aplicação de um elevado diferencial de pressão, por meio da injeção de fluido na formação, de modo a levar a rocha-reservatório à ruptura, vencendo a resistência mecânica da rocha e a tensão confinante a qual ele está submetida. Na figura. 1 tem-se uma esquema simplificada do processo de fraturamento hidráulico. Uma vazão  $Q_0$  é injetada no poço que se divide para as duas asas da fratura. A vazão em cada seção ao longo da fratura é dada por  $q(x, t)$ , a vazão perdida (*leak-off*) para o meio poroso  $\ell^l$  e  $\ell^r$ .  $p(x, t)$  é a pressão nas seções longitudinais, esta pressão é produzida pelo fluxo de fluido

injetado na fratura. Ela provocará a ruptura da rocha quando  $p(x, t)$  for maior que  $\sigma_0$  somada à resistência à tração da rocha, e com a elevação de seu valor a propagação gradativa da fratura  $\ell^l, \ell^r$ , variação da abertura  $w(x, t)$ .

A injeção de fluido na formação se dá por meio dos canhoneados, que são orifícios no poço de injetor. A propagação da fratura se dá pelo bombeado, acima da pressão de fraturamento, de um certo volume de fluido. Para garantir a manutenção da fratura após o término da injeção de fluido, um agente de sustentação (material granular de alta resistência) é bombeado juntamente com o fluido fraturante. Desta forma, cria-se um caminho de alta permeabilidade, o qual facilitará o fluxo de fluidos do reservatório. Os modelos estudados aqui não contemplam a modelagem do transporte e deposição do agente de sustentação, apenas modelam a propagação da fratura.

Em resumo a fratura hidráulica é dominada pelos processos físicos seguinte [et al \(2007\)](#); [Peirce and Detournay \(2008\)](#): deformação da rocha, criação de novas superfícies de fratura, fluxo de fluido de fraturamento, perda do fluido no meio rochoso. Para capturar esses fenômenos físicos e modelar o problema, usa-se o modelagem de fratura proposto para [Peirce and Detournay \(2008\)](#); [et al \(2007\)](#). O modelo assume que a fratura está submetida à condição de deformação plana no plano horizontal e que a extremidade da fratura está pontiaguda figura. 1.

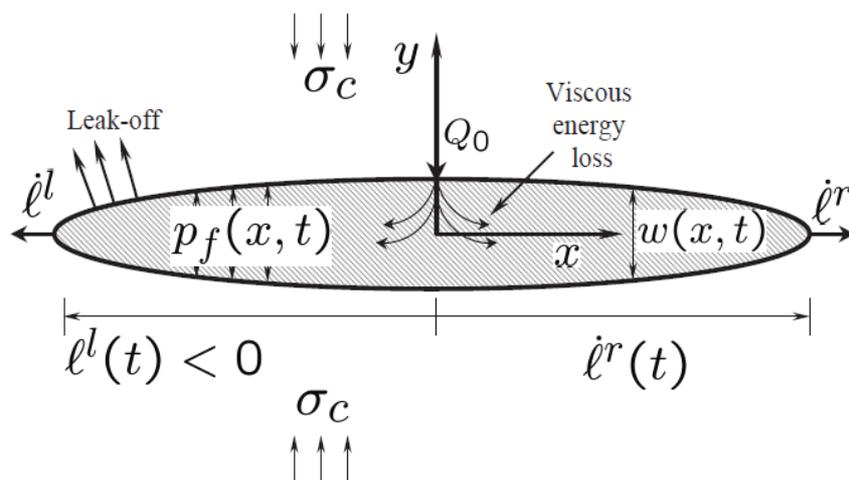


Figure 1: Geometria de uma fratura unidimensional. [Rochinha and Peirce \(2009\)](#)

Dado uma taxa de injeção  $Q_0$ , procura-se a determinar o comprimento  $\ell$  que depende do tempo de injeção  $t$  na direita ou esquerda do ponto de injeção, a abertura  $w$  e a pressão do fluido  $p_f$  ( $p = p_f - \sigma_0$  onde  $p$  pressão líquida e  $\sigma_0$  tensão do poço perpendicular à fratura).  $w$  e  $p$  dependem de duas posições (uma posição espacial  $x$  e temporal  $t$ ). A posição espacial  $x$  tem por origem o ponto onde cair o fluido de fratura, esse fluido é um fluido incompressível newtoniano. A fratura é governada por duas equações diferenciais, condições iniciais e de fronteira: (i) uma equação de elasticidade usada para calcular a abertura da fratura devida a pressão causada pelo fluido de fratura. (ii) uma equação do fluido que exprime o movimento do fluido dentro do reservatório subterrâneo e é governada pelas equações de continuidade e da lei de Poiseuille. (iii) condições iniciais, de fronteira e de propagação.

## 2.1 Equações governantes

O processo de fratura hidráulica é governado para dois equações acopladas (equação de elasticidade e de lubrificação) e com fronteira moveis. A equação de elasticidade fornece uma relação entre a pressão líquida  $p(x, t) = p_f(x, t) - \sigma_0$  e abertura  $w(x, t)$  (Rice, 1968).

$$p = \frac{-E'}{4\pi} \int_{\ell^l}^{\ell^r} \frac{w(x', t)}{(x - x')^2} dx, \quad (1)$$

onde  $E' = \frac{E}{1-\nu^2}$  é o modulo da deformação plano escrito em termos de modulo de Young's  $E$  e de poisson  $\nu$ .  $\ell^l, \ell^r$  são os comprimentos esquerdo e direito da fratura.

A equação de lubrificação, ou de Reynolds, que governa o fluxo de fluido na fratura é dada por (Batchelor, 1967)

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial t} = \frac{C'H(t - t_0(x))}{\sqrt{t - t_0(x)}} + Q(t)\delta(x). \quad (2)$$

$$q = \frac{-w^3}{\mu'} \frac{\partial p_f}{\partial x}, \ell^l(t) < x < \ell^r(t). \quad (3)$$

Onde  $q(x, t)$  é a vazão volumétrica;  $H(t)$  é a função de Heaviside;  $\delta$  é a função delta de Dirac;  $Q(t)$  é a taxa de injeção do fluido;  $\mu' = 12\mu$  viscosidade do fluido;  $C' = 2C_l$  coeficiente de perda do fluido no meio rochoso;  $t_0(x)$  é o tempo para qual a frente da fratura passa pelo ponto  $x$ .

As condições de contorno na entrada do poço ( $x = 0$ ) e nas extremidades de fratura podem ser escrita das seguintes forma: o fluxo na entrada

$$\pm q \Big|_{x=0^+}^{x=0^-} = \frac{Q_0}{2}, x = \pm 0. \quad (4)$$

Na extremidade da fratura ( $x = \pm \ell$ ) a abertura e o fluxo são iguais a zero,

$$w = 0, q = 0, x = \pm \ell. \quad (5)$$

A equação 2 permite de escrever uma relação entre  $w$  e  $p$  na extremidade da fratura

$$w^3 \frac{dp}{dx}, x = \pm \ell. \quad (6)$$

Para calcular a posição da extremidade de fratura a medida que o fluido está sendo bombeado é importante conhecer qual é o regime de propagação de fluido no poço. segundo (Peirce and Detournay, 2008), o processo de fratura é governado por dois conflitantes processo de dissipação e de dois componentes do equilíbrio do fluido, que são a viscosidade do fluido, tenacidade da rocha, armazenamento do fluido e perda do fluido no meio poroso. Assim temos quatro regimes de propagação de fratura hidráulica: o regime de viscosidade dominante, de tenacidade dominante, de viscosidade e perda do fluido, de tenacidade e perda do fluido. Esses regimes tem um grande importância na determinação das soluções de fratura hidráulica. Pode-se constatar que as equações 1-6 não são suficientes para calcular as soluções do processo de fratura hidráulica, pois os comprimentos  $\ell^l$  e  $\ell^r$  não são *a priori* conhecidos. Portanto, para determina-los, é preciso de uma condição. Essa condição depende do tipo de regime de propagação. Na simulação numérica de fratura, o tipo de regime de propagação é escolhido através os parâmetros físico seguintes  $K', C', \mu'$ . Exemplos: se  $K' = C' = 0$  a fratura está no

regime de viscosidade dominante, se  $C' = 0$  e  $K' > 0$  a fratura está no regime de tenacidade dominante. Em cada regime de propagação, o comportamento assintótico da abertura é estimado na frente de fratura. A inversão dessa expressão permite de calcular a posição da frente de fratura. por exemplo para o regime de tenacidade dominante a expressão assintótica da abertura Rochinha and Peirce (2009) é:

$$w \stackrel{x \rightarrow \ell}{\sim} \frac{K'}{E'} \sqrt{(|\ell - x|)}, K' = 4\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} K_{IC}, \quad (7)$$

A inversão dessa expressão permite de calcular os comprimentos  $\ell^l$  e  $\ell^r$ . E para o regime de viscosidade dominante a expressão assintótica da abertura:

$$w \sim \beta \left(\frac{\mu' v}{E'}\right) \hat{x}^{2/3}, \beta = 2^{1/3} 3^{5/6}, \quad (8)$$

com  $\hat{x} = l(t) - x$ , a inversão da equação 8 permite de calcular a posição da frente. Para escrever essas equações 1-8 sobre forma adimensionais foi introduzido as variáveis seguintes:

$$x = \ell_* \chi, t = t_* \tau, \ell(t) = \ell_* \gamma(\tau), p = p_* \Pi, w = w_* \Omega, \sigma_c = p_* \Sigma_0 \Phi(x), \quad (9)$$

onde  $\ell_*$ ,  $t_*$ ,  $p_*$ , e  $w_*$  representam o comprimento, o tempo, a pressão e a abertura. As quantidades  $\chi$ ,  $\tau$ ,  $\gamma$ ,  $\Pi$  e  $\Omega$  representam a coordenada espacial adimensional, tempo adimensional, a coordenada adimensional da frente da fratura, a pressão adimensional, e a abertura adimensional. Essas transformações permitem de reduzir as equações 1-8 a sua forma adimensional. Portanto as equações torna-se:

$$\Pi_f(\chi, \tau) - \Sigma_0 \Phi(\chi) = \frac{-g_e}{4\pi} \int_{\gamma^l}^{\gamma^r} \frac{\Omega(\chi', \tau)}{(\chi - \chi')^2} d\chi'. \quad (10)$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \tau} = g_m \frac{\partial}{\partial \chi} \left( \Omega^3 \frac{\partial \Pi_f}{\partial \chi} \right) + \frac{g_c H(\tau - \tau_0(\chi))}{\sqrt{(\tau - \tau_0(x))}} + \Psi(\tau) g_v \delta(\chi), \gamma^l(\tau) < \chi < \gamma^r(\tau). \quad (11)$$

Com as condições de contorno adimensionais escrevem-se:

$$\Omega(\gamma^{\ell,r}, \tau) = 0, \lim_{\chi \rightarrow \gamma} \Omega^3 \frac{\partial \Pi_f}{\partial \chi} = 0, \lim_{\chi \rightarrow \gamma} \Omega = g_k \sqrt{(\gamma - \chi)}, \quad (12)$$

onde

$$g_c = \frac{C' t_*^{1/2}}{w_*}, g_e = \frac{E' w_*}{p_* \ell_*}, g_m = \frac{w^2 p_* t_*}{\mu' \ell_*^2}, g_v = \frac{Q_0 t_*}{w_* l_*}, g_k = \frac{K' \ell_*^{1/2}}{E' w_*}. \quad (13)$$

Para escrever as equações 7-8 a suas formas adimensionais é introduzida a coordenada  $\xi = l(t) - x$ . Essa coordenada represente a distancia normal ao extremidade de fratura e tem origem na ponta de fratura. Essa distancia  $\xi$  foi calculada usando a expansão assintótica da abertura. Nessa seção apresentamos essa expansão em cada regime de propagação de fratura. A expansão assintótica obtida da equação 7 torna-se:

$$\Omega \stackrel{\xi \rightarrow 0}{\sim} \zeta^{1/2}, \quad (14)$$

a inversão da equação 14 permite de calcular a posição da frente de fratura

$$\zeta \sim \Omega^2. \quad (15)$$

A expansão assintótica da equação 7 torna-se:

$$\Omega \stackrel{\zeta \rightarrow 0}{\sim} \beta_{m0} v^{1/3} \zeta^{2/3}, \quad (16)$$

a inversão de equação 16 permite de calcular a posição da frente de fratura

$$\zeta \sim \left( \frac{\Omega}{\beta_{m0} v^{1/3}} \right)^{3/2}, \beta_{m0} = 2^{1/3} 3^{5/6}. \quad (17)$$

Nesse regime de propagação, a posição da frente de fratura depende da velocidade da extremidade de fratura  $v$  (Peirce and Detournay, 2008). Essa velocidade é calculada conhecendo a posição da frente de fratura  $\xi_0$  no tempo  $\tau - \Delta\tau$ ,

$$v = \frac{\zeta - \zeta_0}{\Delta\tau}, \quad (18)$$

também é possível calcular  $\xi$  com conhecimento da abertura, mudando a equação 18 em equação 16 temos:

$$\xi^3 - \xi_0 \xi^2 - \Delta\tau \left( \frac{\Omega}{\beta_{m0}} \right)^3 = 0. \quad (19)$$

### 3 MÉTODOS DE CÁLCULO ESTOCÁSTICO

Nesta seção, apresente-se técnicas de resolução de problema estocástico. Cada um dessas técnicas proposto tem a sua eficiência e desvantagens a resolver um problema. Hoje na literatura existe varias técnicas que conseguem aproximar com um erro aceitável a dimensão estocástica, o grande problema que diferencia essas técnicas é o tempo que cada um usa para resolver os problemas (custo computacional). A pesquisa hoje em dia está muita envolvida para construir um método ideal que aproxima com grande precisão o domínio estocástico e resolve o problema com menos custo computacional. Apresenta-se em seguir alguns métodos de resolver: Monte Carlo (MC) et al (2009), Método de Galerkin estocástico (Babuška and Chleboun, 2002), o método de colocação estocástica (Ganapathysubramanian and Zabarar, 2007b).

#### 3.1 Monte Carlo

Entre os métodos mais usados para resolver equações diferenciais estocásticas, pela sua simplicidade, está o chamado monte Carlo (Schüeller and Spanos, 2001; Caflish, 1998), este método consiste em resolver equações diferenciais determinísticas para cada amostra aleatória dos parâmetros de entrada. Neste método os pesos de integração  $w_N = \frac{1}{N}$  (Nouy, 2008). Uma das grandes atrações desse método é a taxa de convergência que não depende do número de variáveis incertas. Porém, para problemas complexos onde precisamos de várias variáveis de entrada, o método torna-se intratável.

#### 3.2 Método de colocação estocástica

O método de colocação estocástica é baseado na construção de polinômios de interpolação num espaço aleatório multidimensional. Esse método exige apenas a resolver um conjunto de problemas determinísticos em cada ponto pré-determinado no espaço randômico. Usando os resultados obtidos na cada ponto, a interpolação é construída para aproximar a solução estocástica  $u$  (Ganapathysubramanian and Zabarar, 2007a).

Seja  $\xi = [\xi_1, \dots, \xi_n]$  alguns pontos no espaço randômico,  $\Gamma \subset R^n$ ,  $\Pi_n$  o espaço contendo todos os polinômios de dimensão  $n$ . O problema de interpolação de Lagrange pode ser declarado

como: Dado um conjunto de pontos pré-determinados  $x_n = \xi^i, i = 1, \dots, n$ , no domínio aleatório  $\Gamma$  e uma função suave  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , achar uma função  $I_f \in \Pi_n$  tal que  $I_f(\xi^i) = f(\xi^i), \forall i = 1, \dots, n$ . Portanto usando os polinômios de Lagrange é possível obter uma aproximação para qualquer ponto no espaço  $\Gamma$  através de

$$I_f(\xi) = \sum_{i=1}^n f(\xi^i) L_i(\xi) \quad (20)$$

onde

$$L_i(\xi^j) = \delta_{ij}, [i, j] \in [1, n], \quad (21)$$

segundo a equação 20 é possível obter a aproximação da função  $u(\xi, x)$ ,

$$\hat{u}(x, \xi) = \sum_{i=1}^n u(x, \xi^i) L_i(\xi). \quad (22)$$

Mudando o valor de  $u$  para  $\hat{u}$  na equação determinística obtemos:

$$\mathcal{L}(\hat{u}; x, \xi) \Big|_{\xi}^k = 0, \forall k \in 1, \dots, n, \quad (23)$$

Usando a equação 21 obtemos uma equação desacoplada,

$$\mathcal{L}(u(x, \xi^k); x, \xi^k) = 0, \forall k \in 1, \dots, n, \quad (24)$$

Finalmente, o método de colocação estocástica é equivalente a resolver  $n$  equações determinísticas nos pontos de grids espaço. As soluções, média e variância são calculadas

$$E[\hat{u}] = \sum_{i=1}^n u(\xi^i, x) \int_{\Gamma} L_i(\xi) \rho(\xi) d\xi, \nu(u) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (u^j - \mu(u))^2. \quad (25)$$

Nos métodos de resolução apresentados, o método de colocação estocástica tem o lado eficaz de cada um deles. Como o método de Monte Carlo, o método de colocação estocástica é desacoplado e precisa só de uma caixa preta valida do problema em que nos queremos propagar incertezas. Também, como o método de Galerkin, o método de colocação tem a mesma eficiência a aproximar o espaço estocástico com grande precisão.

Na area de quantificação de incertezas, esse método parece ser o mais eficaz para propagar incertezas num modelo de menos ou de grande dimensão estocástica. Vários autores o usou na varias areas para propagar incertezas. *Zabaras e Bastar* o usou para propagar incertezas num problema de convecção natural (*Ganapathysubramanian and Zabaras, 2007c*) e para a modelagem de difusão em meios aleatórios heterogêneos (*Ganapathysubramanian and Zabaras, 2007a*). *Ganis (et al, 2008)* e seus companheiros usam o método para resolver um problema de fluxo em meios porosos. *Agarwal, Nitin e Aluru* usam-lo para quantificar as incertezas num sistema micro-electromechanical (MEMS).

#### 4 RESULTADOS NUMÉRICOS

Nesta seção são apresentados resultados do processo de fratura hidráulica obtidos usando o método de colocação estocástica. Também a convergência e o desempenho computacional do método foi analisada. O modulo de elasticidade do reservatório foi considerado como parâmetro incerto de distribuição log-normal. O regime de viscosidade dominante foi considerado como

mode de propagação do fluido no reservatório. As seguintes parâmetros foram considerados como parâmetros de simulação pode-se ver na tabela 1

Table 1: Parâmetros de simulação

Parâmetros de simulação	valores usados pra simulação
módulo de Elasticidade $E_p$	media=1 e variância=0.01
Vazão de bombeio, Q	1
Coefficiente de perda ( <i>leak-off</i> , CM)	0
Resistência a fratura, KM	0
Tensão in situ	1

#### 4.1 Condições iniciais do processo de fratura

Neste trabalho, o processo de fratura foi iniciado a um tempo de bombeio  $\tau = 39.1195$ , nesse tempo a abertura na entrada do poço é avaliada a  $\Omega(\chi = 0, \tau) = 4.3192$  e nas extremidades esquerda e direita do poço a abertura é  $\Omega(\chi = \ell(\tau), \tau) = 0.6950$ . O raio inicial fraturado é  $\ell(\tau) = 7$ . A pressão líquida na entrada do poço  $P(\chi = 0, \tau) = 0.1547$  e  $0.069$  nas duas extremidades do poço. Nas discretizações temporais considera-se 30 passos de tempo,  $\tau = \text{numero de passo} * d\tau$ . Enquanto que nas discretização espacial fixou-se o passo  $d\chi = 2$ . A abertura e a pressão são calculadas no meio de cada elemento  $\frac{dx}{2}$ .

#### 4.2 Monte Carlo e colocação estocástica

Para o estudo de convergência entre o método de Monte Carlo e de Colocação estocástica, escolhe-se três tempos de bombeamento do fluido  $\tau = 2 * d\tau$ ,  $\tau = 6 * d\tau$ ,  $\tau = 10 * d\tau$ . A convergência dos dois métodos foi avaliada usando a solução do método de Monte Carlo no ponto de convergência como a solução exata. Na simulação de Monte Carlo, a convergência foi analisada para um numero crescente de realização, partindo de 50 até 2000. A taxa de convergência foi avaliada a partir do calculo do erro relativo. Nesse caso, a solução de Monte Carlo a 2000 realizações foi considerada como a solução exata pode-se ver figura 2.

O método de colocação estocástica foi construído usando o toolbox de grids esparsos desenvolvido por (Klimke, 2008). Nesse caso, os grids esparsos de tipo *Chebyshev* foram usados. Para avaliar a convergência deste método foi calculado o erro relativo. Nesse caso, Os resultados obtidos para níveis de interpolação crescente foram considerados como soluções experimentais e o resultado obtido pela simulação de Monte Carlo a 2000 realizações. Pode-se ver o resultado da convergência deste método na figura 3.

Para comparar a convergência dos dois métodos, fixa-se um ordem de erro de  $10^{-3}$  como ordem maxima do erro. Nos gráficos das figuras 2-3 observa-se que o método de Monte Carlo começa com 50 pontos, nesse numero de ponto a ordem de erro é de  $10^{-2}$  enquanto que no método de colocação estocástica, o teste de convergência começa no nível 1 de interpolação que corresponde a 3 pontos, neste ponto o erro tem um ordem de  $10^{-1}$ . A medida que o numero de ponto está crescendo constata-se que a 1000 pontos o erro do método de Monte Carlo atinge uma ordem de  $10^{-3}$  enquanto que para a mesma ordem de erro o método de colocação estocástica usa 4 níveis de interpolação que corresponde a 17 pontos. Com esses resultado ficou claro que o método de colocação estocástica resolve o problema de fratura hidráulica com menos custo computacional do que o método de Monte Carlo.

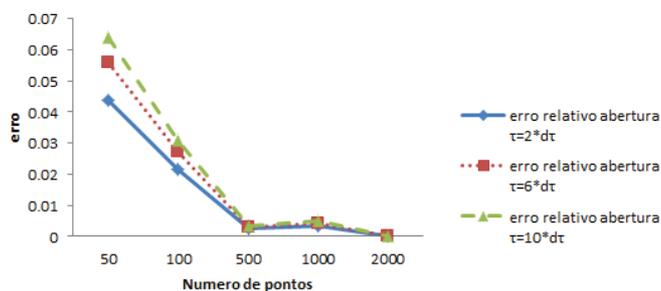


Figure 2: Convergência da simulação de Monte Carlo

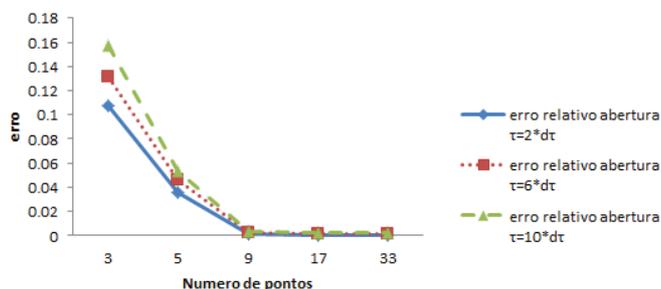
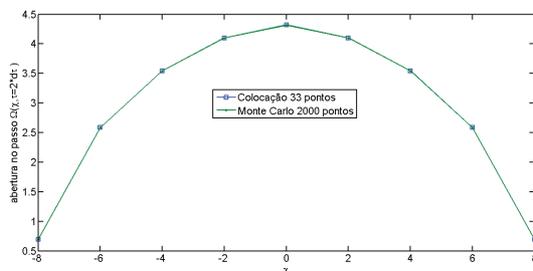


Figure 3: Convergência do método de colocação estocástica

#### 4.3 Validação dos resultados do método de colocação estocástica

Nesta seção, compara-se os resultados do método de colocação estocástica com à solução exata do problema( Monte Carlo a 2000 pontos). Neste caso, as soluções do método de colocação estocástica a 33 pontos foram comparadas à solução exata do problema. Pode-se ver nos gráficos da figura 4-6. Um ponto importante a ser observado e que, a medida que o tempo de bombeamento aumenta, o erro entre a solução exata e o método de colocação estocástica a 33 pontos aumenta pode-se observar a tabela 2.

Figure 4: Resultados obtidos nos pontos de convergência do método de Monte Carlo (2000 pontos) e de Colocação estocástica (33 pontos)  $\tau = 2 * dt$

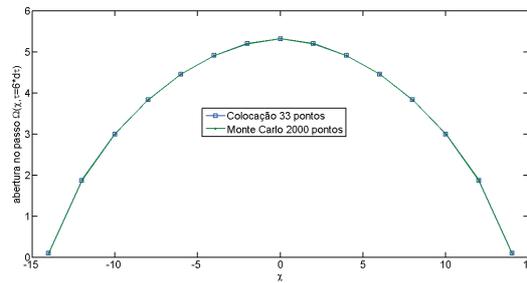


Figure 5: Resultados obtidos nos pontos de convergência do método de Monte Carlo (2000 pontos) e de Colocação estocástica (33 pontos)  $\tau = 6 * d\tau$

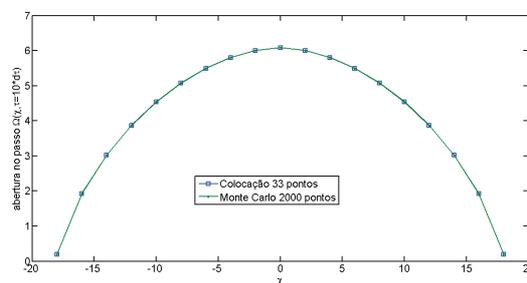


Figure 6: Resultados obtidos nos pontos de convergência do método de Monte Carlo (2000 pontos) e de Colocação estocástica (33 pontos)  $\tau = 10 * d\tau$

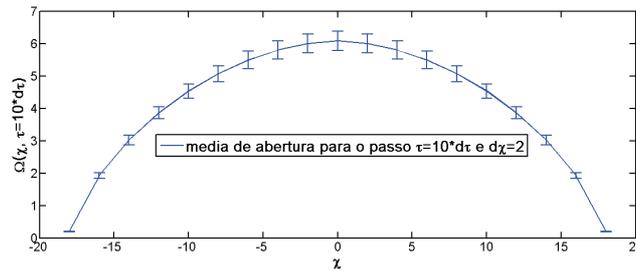
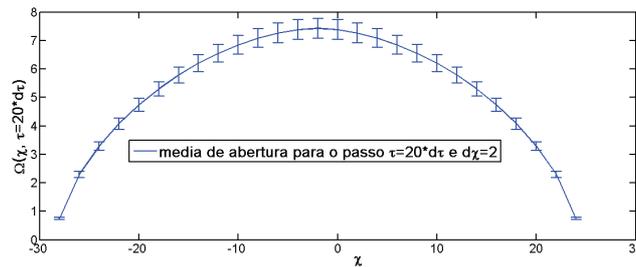
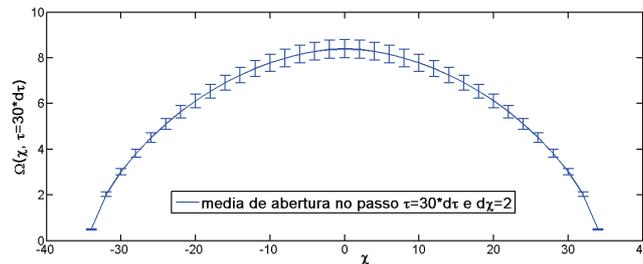
Table 2: erro entre a solução exata e o método de Colocação estocástica a 33

tempo de injeção	erro na media Monte Carlo e colocação estocástica
$\tau = 2 * d\tau$	$4.9396 \times 10^{-4}$
$\tau = 6 * d\tau$	0.0013
$\tau = 10 * d\tau$	0.0021

#### 4.4 Quantificação de incertezas

Um dos grandes desafios na área de quantificação de incertezas é o custo computacional usado para resolver os problemas. Na seção 4.3 mostra-se que o método de colocação estocástica é um bom candidato para resolver o problema do custo computacional. Além de resolver o problema de fratura hidráulica com menos custo computacional, o método tem resultados quase iguais ao método de Monte Carlo. Nesse caso, usa-se o método de colocação estocástica para propagar incertezas no modelo de fratura hidráulica. O processo de fratura hidráulica tem várias saídas importantes que podem ser função da dimensão espacial ou temporal.

Como variáveis que dependem da coordenada espacial tem-se a abertura  $\Omega(\chi)$  para um tempo de bombeio  $\tau$  fixado. Neste trabalho escolhe-se três tempos de bombeio para representar a abertura  $\Omega(\chi)$  nas coordenadas  $\chi$  fraturadas. Esses três tempos de bombeio escolhidos são:  $\tau = 10 * d\tau$ ,  $\tau = 20 * d\tau$ ,  $\tau = 30 * d\tau$ . Os gráficos das figuras 10-9 mostram como a abertura cresce no tempo e suas variabilidades nas coordenadas  $\chi$  fraturadas. Pode-se observar nesses gráficos que a abertura tem grandes variabilidades na entrada do poço e variabilidades menores nas extremidades de fratura. Observa-se também que a medida que o tempo de bombeamento aumenta, a coordenada  $\chi$  fraturada aumenta.

Figure 7: media e variabilidade de abertura no passo de tempo  $dt=10$  e  $dx=2$ Figure 8: media e variabilidade de abertura no passo de tempo  $dt=20$  e  $dx=2$ Figure 9: media e variabilidade de abertura no passo de tempo  $dt=30$  e  $dx=2$ 

Como variáveis de interesse dependendo da coordenada temporal, tem-se a pressão líquida na entrada do poço  $p(\chi = 0, \tau)$ , a abertura na entrada do poço  $\Omega(\chi = 0, \tau)$  e o raio fraturado  $\ell(\tau)$ . Na figura 10, observa-se que a pressão líquida na entrada do poço diminui a medida que o tempo de bombeio está aumentando, suas variabilidades em cada tempo de bombeio tem grandes variabilidades nos primeiros tempo de bombeio. Essa pressão líquida na entrada do poço cria uma abertura  $\Omega(\chi = 0, \tau)$ . Na figura 11, pode-se ver que a abertura na entrada do poço é iniciada ao tempo  $\tau = 38.5499$ , a medida que o tempo de bombeio aumenta a abertura cresce e a sua variabilidade aumenta com o tempo. A figura 12, apresenta o raio fraturado no poço. Pode-se observar que o raio fraturado aumenta com o tempo. Mas a sua variabilidade fica bem menor quase constante nos tempos de bombeio.

#### 4.5 Cálculo das distribuições de probabilidade das variáveis de interesse

O método de colocação estocástica é usada para interpolar as variáveis de interesse para 4000 amostras do modulo de elasticidade. Essa interpolação permite-se de construir as distribuições de probabilidade de alguns variáveis de interesse nas coordenadas  $\chi$  e  $\tau$  escolhidas. Na figura 13, observa-se que na entrada do poço a media da pressão líquida é maior na entrada para um

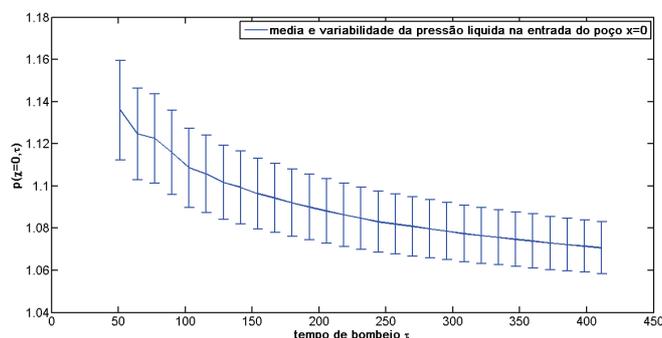


Figure 10: media e variabilidade da pressão líquida na entrada do poço

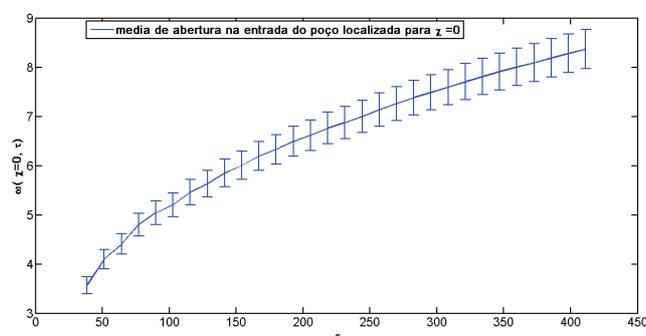


Figure 11: media de abertura e suas variabilidades na entrada do poço

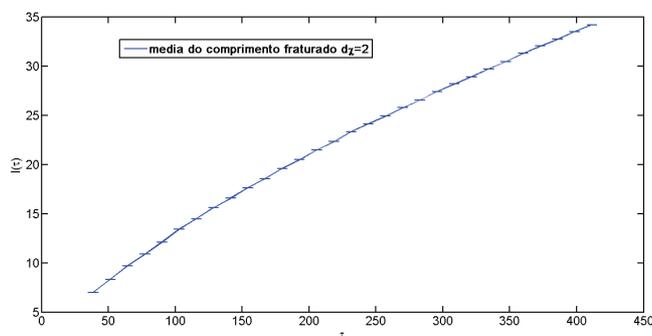


Figure 12: media do raio fraturado e suas variabilidades

tempo de bombeio de  $\tau = 10 * d\tau$  e fica constante nos tempos  $\tau = 20 * d\tau$  e  $\tau = 30 * d\tau$ . O desvio da abertura diminui quando o tempo de bombeio aumenta. O valor mínimo de pressão é obtido no tempo  $\tau = 30 * d\tau$  e o valor máximo é obtido no tempo  $\tau = 10 * d\tau$ .

Nos gráficos das figuras 14-16, pode-se observar as pdf da abertura nos tempo de bombeio  $\tau = 10 * d\tau$ ,  $\tau = 20 * d\tau$  e  $\tau = 30 * d\tau$ . A pdf da abertura na entrada do poço tem uma media e desvio no tempo de bombeio  $\tau = 30 * d\tau$ . A media e o desvio menores são encontradas no tempo de bombeio  $\tau = 10 * d\tau$ . O valor mínimo de abertura da abertura no tempo  $\tau = 20 * d\tau$  é maior do que o valor mínimo no tempo  $\tau = 30 * d\tau$ . Nas extremidades de fratura, a abertura tem uma medi e desvio maiores no tempo  $\tau = 20 * d\tau$ . Pode-se observar também que a media

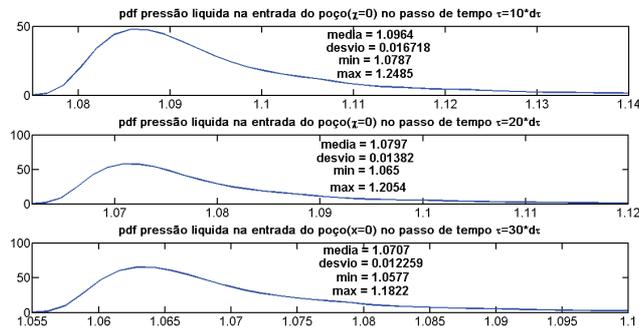


Figure 13: distribuição de probabilidade da pressão na entrada do poço para passo de tempo de  $\tau = 10 \cdot d\tau$ ,  $\tau = 20 \cdot d\tau$ ,  $\tau = 30 \cdot d\tau$

e o desvio da abertura na extremidade de fratura do tempo  $\tau = 10 \cdot d\tau$  e  $\tau = 30 \cdot d\tau$  são quase iguais um erro de  $10^{-3}$  entre os dois resultados. O valor mínimo da abertura nos três tempo de bombeio é observado no tempo  $\tau = 30 \cdot d\tau$ .

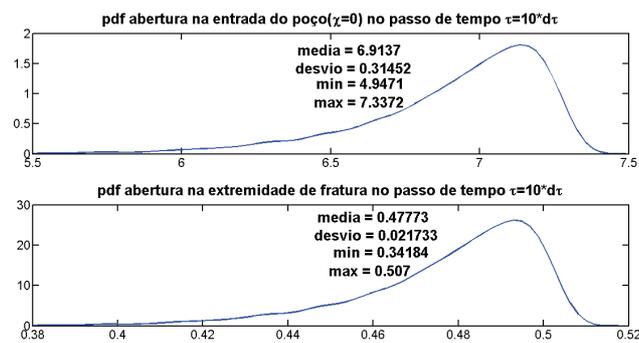


Figure 14: distribuição de probabilidade da abertura na entrada do poço e na extremidade de fratura no passo de tempo  $dt=10$

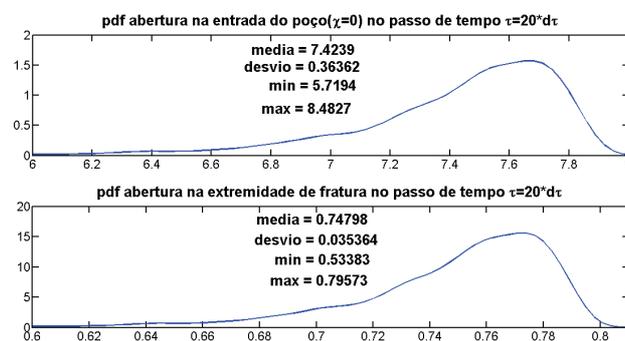


Figure 15: distribuição de probabilidade da abertura na entrada do poço e na extremidade de fratura no passo de tempo  $dt=20$

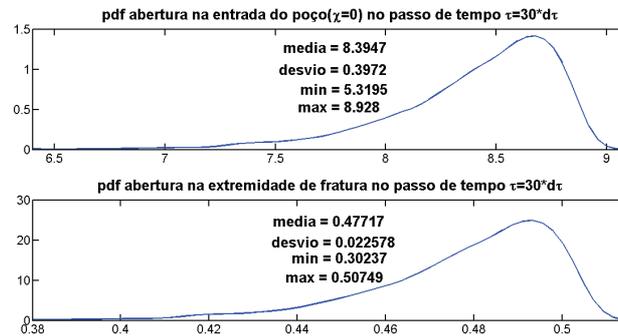


Figure 16: distribuição de probabilidade da abertura na entrada do poço e na extremidade de fratura no passo de tempo  $dt=30$

## 5 CONCLUSÃO

Neste trabalho apresentou-se resultados do processo de fratura hidráulica considerando o módulo de elasticidade do reservatório como parâmetros incertos. O método de colocação estocástica que foi usado para propagar incertezas no modelo de fratura hidráulica apresentou resultados de fratura hidráulica com menos custo computacional comparando ao método de Monte Carlo. Ao longo do trabalho, mostrou-se como as incertezas no módulo de elasticidade podem influenciar a saída do processo de fratura hidráulica. As variabilidades das saídas do processo de fratura obtidos podem dar uma visão ampla do comportamento da fratura no poço. Essas informações são dados importante para uma tomada de decisão num projeto de fratura hidráulica.

## REFERENCES

- Babuška I. and Chleboun J. Effects of uncertainties in the domain on the solution of Neumann boundary value problems in two spatial dimensions. *Mathematics of Computation* 71(240):1339–1370, 2002.
- Batchelor G. An introduction to fluid mechanics. *Cambridge University Press*, 1967.
- Caffish R.E. Monte Carlo and quasi-Monte Carlo methods. 199(33-36):1 – 49, 1998.
- Eckhardt Werner A. Lognormal distributions across the sciences: keys and clues. *Bioscience*, 51, 2001.
- et al B.G. Stochastic collocation and mixed finite elements for flow in porous media. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 197(43-44):3547 – 3559, 2008.
- et al F.C. Parallel and interacting Markov chain Monte Carlo algorithm. *Mathematics and Computers in Simulation*, 79(12):3424 – 3433, 2009.
- et al G.I.S. Monte Carlo simulation. *Balkema, Rotterdam*, 2001.
- et al J.A. Computer simulation of hydraulic fractures. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, 44(5):739 – 757, 2007.
- et al M.K. The stochastic finite element method. basic perturbation technique and computer implementation. *Chichester*, 1992.
- Fernandes P.D. Modelagem semi analítica pseudo tridimensional de propagação e fechamento de fraturas induzidas em rochas. *FEM - UNICAMP*, 228, 1998.
- Ganapathysubramanian B. and Zabaras N. Modeling diffusion in random heterogeneous media: Data-driven models, stochastic collocation and the variational multiscale method. *Journal of Computational Physics*, 226(1):326 – 353, 2007a.
- Ganapathysubramanian B. and Zabaras N. Sparse grid collocation schemes for stochastic natural convection problems. *Journal of Computational Physics*, 225(1):652 – 685, 2007b.
- Ganapathysubramanian B. and Zabaras N. Sparse grid collocation schemes for stochastic natural convection problems. *Journal of Computational Physics*, 225(1):652 – 685, 2007c.
- Ganapathysubramanian B. and Zabaras N. A seamless approach towards stochastic modeling: Sparse grid collocation and data driven input models. *Finite Elements in Analysis and Design*, 44(5):298 – 320, 2008.
- Ghanem R. and Spanos P. Stochastic finite elements : a spectral approach. *Springer, Berlin*, 1991.
- Klimke A. Sparse grid interpolation toolbox user's guide. *Stuttgart - Institut für Angewandte Analysis und Numerische Simulation*, 2008.
- Ma X. and Zabaras N. An adaptive hierarchical sparse grid collocation algorithm for the solution of stochastic differential equations. *Journal of Computational Physics*, 228(8):3084 – 3113, 2009.
- Niederreiter H. Random number generation and quasi-Monte Carlo methods. *SIAM, Philadelphia, PA*, 1992.
- Nouy A. Contributions à la quantification et à la propagation des incertitudes en mécanique numérique. 2008.
- Peirce A. and Detournay E. An implicit level set method for modeling hydraulically driven fractures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 197(33-40):2858 – 2885, 2008.
- R.E.Caffish. Monte Carlo and quasi-Monte Carlo methods. *Acta Numer.*, 1-49, 1998.
- Rice J. Mathematical analysis in the mechanics of fracture. *Academic Press*, 1968.
- Rochinha F.A. and Peirce A. Monitoring hydraulic fractures: State estimation using an extended

kalman filter. 2009.  
Schüeller G. and Spanos P.D. Monte carlo simulation. 2001.