

## **RESPOSTA DINÂMICA DE VIGAS DE AÇO PROTENDIDA SOB RUPTURA BRUSCA DOS CABOS DE PROTEÇÃO**

**Aline C. Ferreira<sup>a</sup>, Luciano M. Bezerra<sup>a</sup>, Paulo C. R. Martins<sup>a</sup>**

<sup>a</sup>*Programa de Pós-Graduação em Estruturas e Construção Civil, Universidade de Brasília, Campus Darcy Ribeiro, Ed. SG 12, Brasília-DF, Brasil. [imbz@unb.br](mailto:imbz@unb.br), <http://www.unb.br>*

**Palavra-chave:** Protensão, Viga Metálica, Ruptura de Cabos, Análise Dinâmica.

**Resumo:** A protensão em vigas metálicas é uma técnica utilizada para aumentar a capacidade resistente das vigas, possibilitando a redução do tamanho dos perfis e, conseqüentemente, a redução dos custos das construções. No entanto, ainda são poucos os estudos sobre protensão de estruturas de aço. Este artigo tem como objetivo analisar o comportamento dinâmico de vigas metálicas protendidas diante de uma eventual ruptura súbita dos cabos de protensão.

## 1 INTRODUÇÃO

Neste trabalho será desenvolvida uma formulação matemática para expressar o comportamento dinâmico de vigas metálicas protendidas (VMP) após a retirada, de forma súbita, dos cabos de protensão, através de uma função Heaviside.

## 2 FORMULAÇÃO MATEMÁTICA DA DINÂMICA DA VMP

O comportamento da viga metálica protendida à flexão pode ser representado pelo sistema de um grau de liberdade, cujo modelo reológico está apresentado na figura 1. Neste sistema, “m” é a massa da viga, “k” representa a rigidez e “c” o amortecimento. Este sistema pode ser simplificado para o modelo dinâmico de um grau de liberdade mostrado na figura 2, onde  $k'$  e  $c'$  são, respectivamente, a rigidez e o amortecimento equivalente.

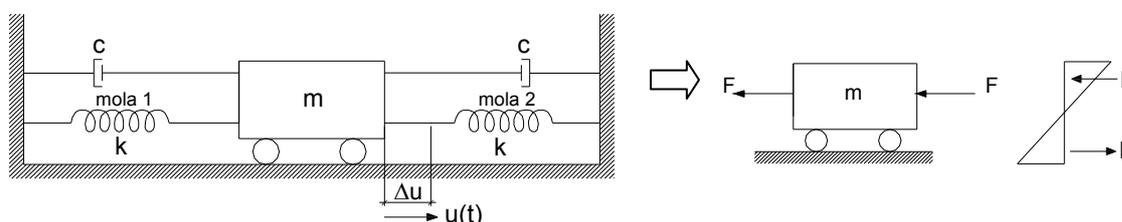


Figura 1 – Modelo reológico do comportamento dinâmico da viga metálica protendida

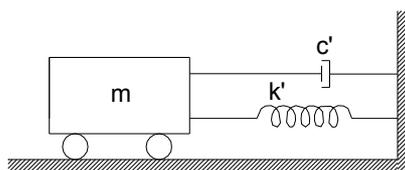


Figura 2 – Modelo dinâmico equivalente

O modelo mostrado na figura 1 representa o comportamento da viga à flexão porque quando a massa,  $m$ , vibra em torno da sua posição de equilíbrio, surgem forças opostas nas molas 1 e 2, ou seja, quando a mola 1 está comprimida, a mola 2 está tracionada e vice-versa, simulando o binário que surge na viga de forças de tração e compressão.

A vibração da viga, em torno do seu eixo de maior inércia, é definida pelo deslocamento  $u(t)$ , e a equação do movimento, considerando o sistema de um grau de liberdade e o seu respectivo modelo dinâmico mostrado da Figura 2, é apresentada a seguir:

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = U(t) - U(t - a) = H(t) \quad (1)$$

onde  $U(t)$  é igual a  $F$ , função constante, e  $U(t-a)$  é igual a  $F$  só para  $t > a$ .

A função  $H(t)$  expressa a força de protensão que atua na estrutura a partir de um  $t = 0$ , até a sua retirada, de maneira brusca, num tempo  $t = a$ . Essa função,  $H(t)$ , é obtida fazendo a subtração da função  $U(t)$  pela função  $U(t-a)$ , onde  $U(t)$  representa a atuação de uma força constante ao longo do tempo e a função  $U(t-a)$  expressa a atuação de uma força na estrutura

apenas a partir do  $t = a$ . Assim, encontra-se a função desejada:  $H(t) = U(t) - U(t-a)$ , que representa a situação da quebra repentina do cabo de protensão no tempo  $t_0 = a$ . A Figura 3 ilustra as funções descritas.

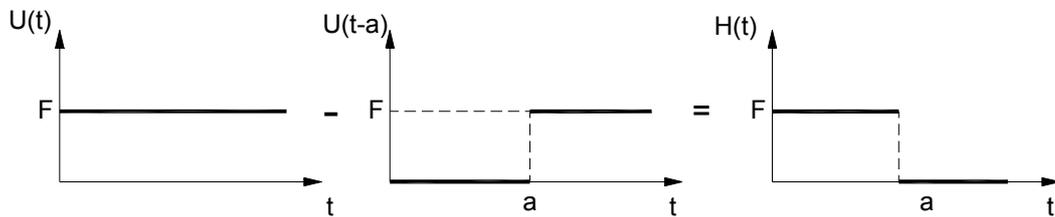


Figura 3 – Função que traduz a atuação da força de protensão até o tempo  $t=a$ , e a retirada desta força de forma súbita

Onde:  $U(t) = F, \quad t > 0$

$$U(t-a) = \begin{cases} 0, & 0 < t < a \\ F, & t \geq a \end{cases}$$

$$H(t) = \begin{cases} F, & 0 < t < a \\ 0, & t \geq a \end{cases}$$

Inicialmente, será considerada a vibração livre da viga sem amortecimento. Então, a Equação 1 pode ser escrita da seguinte maneira:

$$m\ddot{u} + k u = H(t) \tag{2}$$

As condições iniciais, estando a viga em repouso, são:  $u(0) = \dot{u}(0) = 0$

Aplicando a Transformada de Laplace para a Equação 2, tem-se:

$$\mathcal{L}\{m\ddot{u} + k u\} = \mathcal{L}\{m\ddot{u}\} + \mathcal{L}\{k u\} = m\mathcal{L}\{\ddot{u}\} + k\mathcal{L}\{u\} \tag{3}$$

Sendo assim, determina-se a Transformada de Laplace para o termo do lado esquerdo da Equação 4:

$$\mathcal{L}\{m\ddot{u} + k u\} = m[s^2\bar{u} - su(0) - \dot{u}(0)] + k\bar{u} = ms^2\bar{u} + k\bar{u} \tag{4}$$

Aplicando a Transformada de Laplace nos termos do lado direito da equação 2, tem-se:

$$\mathcal{L}\{H(t)\} = \mathcal{L}\{U(t)\} - \mathcal{L}\{U(t-a)\} \tag{5}$$

$$\mathcal{L}\{U(t)\} = \mathcal{L}\{F\} = \int_0^{\infty} Fe^{-st} dt = F \int_0^{\infty} e^{-st} dt = -\frac{F}{s} e^{-st} \Big|_0^{\infty} = \frac{F}{s} \tag{6}$$

$$\mathcal{L}\{U(t-a)\} = \mathcal{L}\{F\} = \int_a^{\infty} Fe^{-st} dt = F \int_a^{\infty} e^{-st} dt = -\frac{F}{s} e^{-st} \Big|_a^{\infty} = 0 - \left( -\frac{Fe^{-at}}{s} \right) = \frac{Fe^{-at}}{s} \quad (7)$$

Então, o resultado final da Equação 5 é representado pela seguinte expressão:

$$\mathcal{L}\{H(t)\} = \frac{F}{s} - \frac{Fe^{-as}}{s} \quad (8)$$

Portanto, após a Transformada de Laplace nos dois membros da Equação 2, tem-se:

$$ms^2\bar{u} + k\bar{u} = \frac{F}{s} - \frac{Fe^{-as}}{s} \quad (9)$$

A solução da Equação 9 é apresentada a seguir:

$$\bar{u} = \frac{\frac{F}{m}}{s\left(s^2 + \frac{k}{m}\right)} - \frac{\frac{Fe^{-as}}{m}}{s\left(s^2 + \frac{k}{m}\right)} \quad (10)$$

Desenvolvendo a Equação 10, encontra-se a seguinte expressão, que simula os deslocamentos da viga no espaço s:

$$\bar{u} = \frac{F}{mB^2} \left( \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + B^2} \right) - e^{as} \left[ \frac{F}{mB^2} \left( \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + B^2} \right) \right] \quad (11)$$

sendo:  $B^2 = \frac{k}{m}$

A Equação 11 é a Transformada de Laplace (TL) da Equação 2, mas a variável independente da Equação 2 é “t” enquanto que após a TL a variável é “s”. Aplica-se, então, a Transformada inversa de Laplace na Equação 11, de forma a obter a solução para o problema original, com variável independente “t”. Então:

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s} \right\} = 1 \quad (12)$$

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s}{s^2 + B^2} \right\} = \cos Bt \quad (13)$$

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ e^{-as} F(s) \right\} = f(t-a) U_a(t) \quad (14)$$

$$u(t) = \frac{F}{mB^2} (1 - \cos Bt) - \frac{F}{mB^2} [1 - \cos B(t-a)] U_a(t) \quad (15)$$

onde  $U_a$  é a função unitária de Heaviside:  $U_a(t) = \begin{cases} 0, & 0 < t < a \\ 1, & t > a \end{cases}$

Substituindo o valor de  $B^2 = \frac{k}{m}$  na equação 15, obtêm-se:

$$u(t) = \frac{F}{k} \left( 1 - \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t \right) - \frac{F}{k} \left[ 1 - \cos \sqrt{\frac{k}{m}} (t - a) \right] U_a(t) \quad (16)$$

A equação final para expressar o deslocamento da viga ao longo do tempo, sem amortecimento, é mostrada a seguir:

$$u(t) = \begin{cases} \frac{F}{k} \left( 1 - \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t \right), & \text{se } 0 < t \leq a \\ \frac{F}{k} \left( 1 - \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t \right) - \frac{F}{k} \left[ 1 - \cos \sqrt{\frac{k}{m}} (t - a) \right], & \text{se } t > a \end{cases} \quad (17)$$

Considerando, agora, a existência do amortecimento na estrutura, a aplicação da Transformada de Laplace na Equação 1 resulta na seguinte equação:

$$\mathcal{L}\{m\ddot{u} + c\dot{u} + ku\} = \mathcal{L}\{m\ddot{u}\} + \mathcal{L}\{c\dot{u}\} + \mathcal{L}\{ku\} = m\mathcal{L}\{\ddot{u}\} + c\mathcal{L}\{\dot{u}\} + k\mathcal{L}\{u\} \quad (18)$$

Neste caso, as condições de contorno para a viga em repouso são as mesmas descritas anteriormente:

$$u(0) = \dot{u}(0) = 0$$

Substituindo o resultado da Transformada de Laplace para a primeira e segunda derivada de  $u$  em relação a  $t$ , e também para  $u(t)$ , tem-se:

$$\mathcal{L}\{m\ddot{u} + c\dot{u} + ku\} = m[s^2\bar{u} - su(0) - \dot{u}(0)] + c[s\bar{u} - u(0)] + k\bar{u} \quad (19)$$

$$\mathcal{L}\{m\ddot{u} + c\dot{u} + ku\} = ms^2\bar{u} + cs\bar{u} + k\bar{u} \quad (20)$$

Sendo assim, utilizando a Transformada de Laplace na Equação 1, encontra-se a seguinte expressão:

$$ms^2\bar{u} + cs\bar{u} + k\bar{u} = \frac{F}{s} - \frac{Fe^{-as}}{s} \quad (21)$$

A solução para a Equação 21 será desenvolvida a seguir:

$$\bar{u} = \frac{\frac{F}{m}}{s\left(s^2 + \frac{c}{m}s + \frac{k}{m}\right)} - \frac{\frac{Fe^{-as}}{m}}{s\left(s^2 + \frac{c}{m}s + \frac{k}{m}\right)} \quad (22)$$

As raízes para a Equação do segundo grau  $s^2 + \frac{c}{m}s + \frac{k}{m}$  são:

$$s_{1,2} = \frac{-c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}} \quad (23)$$

Fazendo  $\omega^2 = \frac{k}{m}$ , a Equação 23 pode ser reescrita da seguinte forma:

$$s_{1,2} = \frac{-c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \omega^2} \quad (24)$$

De acordo com Clough, 1993, o amortecimento crítico acontece quando o termo do radical é igual a zero e, portanto,  $c_c = 2m\omega$ . No caso do amortecimento subcrítico,  $c < c_c$  (isto é,  $c < 2m\omega$ ). Portanto, o termo do radical se torna negativo. Para expressar a resposta da vibração, é conveniente expressar o amortecimento em termos da razão de amortecimento,  $\xi$ , que corresponde a razão entre o amortecimento  $c$  e o amortecimento crítico:

$$\xi = \frac{c}{c_c} = \frac{c}{2m\omega} \quad (25)$$

Introduzindo o termo da Equação 25 na Equação 24, tem-se:

$$s_{1,2} = -\xi\omega \pm i\omega_D \quad (26)$$

$$\omega_D = \omega\sqrt{1 - \xi^2} \quad (27)$$

A Equação 22 assume a seguinte forma:

$$\bar{u} = \frac{F/m}{s(s + \xi\omega - i\omega_D)(s + \xi\omega + i\omega_D)} - \frac{Fe^{-as}/m}{s(s + \xi\omega - i\omega_D)(s + \xi\omega + i\omega_D)} \quad (28)$$

Após desenvolvimento matemático, a Equação 28 assume a seguinte forma:

$$\bar{u} = \left( \frac{F}{m(\xi^2 \omega^2 + \omega_D^2)} \frac{1}{s} + \frac{F}{m(-2\xi\omega\omega_D - 2\omega_D^2)} \frac{1}{(s + \xi\omega - i\omega_D)} + \frac{F}{m(2\xi\omega\omega_D - 2\omega_D^2)} \frac{1}{(s + \xi\omega + i\omega_D)} \right) e^{-as} \left( \frac{F}{m(\xi^2 \omega^2 + \omega_D^2)} \frac{1}{s} + \frac{F}{m(-2\xi\omega\omega_D - 2\omega_D^2)} \frac{1}{(s + \xi\omega - i\omega_D)} + \frac{F}{m(2\xi\omega\omega_D - 2\omega_D^2)} \frac{1}{(s + \xi\omega + i\omega_D)} \right) \quad (29)$$

Aplicando a Transformada inversa de Laplace na Equação 29, de forma a obter a solução para o problema original:

$$u(t) = \frac{F}{k} + e^{-\xi\omega t} \left[ \left( \frac{-F}{k} \right) \cos\left( \frac{k}{m} \sqrt{1-\xi^2} \right) t - \left( \frac{F\xi}{k\sqrt{1-\xi^2}} \right) \text{sen}\left( \frac{k}{m} \sqrt{1-\xi^2} \right) t \right] - \left\{ \frac{F}{k} + e^{-\xi\omega t} \left[ \left( \frac{-F}{k} \right) \cos\left( \frac{k}{m} \sqrt{1-\xi^2} \right) t - \left( \frac{F\xi}{k\sqrt{1-\xi^2}} \right) \text{sen}\left( \frac{k}{m} \sqrt{1-\xi^2} \right) t \right] \right\} U_a(t) \quad (30)$$

Sabendo que  $U_a(t) = \begin{cases} 0, & 0 < t < a \\ 1, & t > a \end{cases}$ , função unitária Heaviside, chega-se, enfim, à

expressão que representa o deslocamento da viga, com amortecimento, para a situação de uma eventual ruptura dos cabos de protensão:

$$u(t) = \begin{cases} \frac{F}{k} + e^{-\xi\omega t} \left[ \left( \frac{-F}{k} \right) \cos\left( \frac{k}{m} \sqrt{1-\xi^2} \right) t - \left( \frac{F\xi}{k\sqrt{1-\xi^2}} \right) \text{sen}\left( \frac{k}{m} \sqrt{1-\xi^2} \right) t \right], & \text{se } 0 < t \leq a \\ \frac{F}{k} + e^{-\xi\omega t} \left[ \left( \frac{-F}{k} \right) \cos\left( \frac{k}{m} \sqrt{1-\xi^2} \right) t - \left( \frac{F\xi}{k\sqrt{1-\xi^2}} \right) \text{sen}\left( \frac{k}{m} \sqrt{1-\xi^2} \right) t \right] - \left\{ \frac{F}{k} + e^{-\xi\omega(t-a)} \left[ \left( \frac{-F}{k} \right) \cos\left( \frac{k}{m} \sqrt{1-\xi^2} \right) (t-a) - \left( \frac{F\xi}{k\sqrt{1-\xi^2}} \right) \text{sen}\left( \frac{k}{m} \sqrt{1-\xi^2} \right) (t-a) \right] \right\}, & \text{se } t > a \end{cases} \quad (31)$$

Os deslocamentos da viga em cada posição x, ao longo do seu comprimento, variando no tempo, são obtidos pela expressão abaixo:

$$y(x, t) = u(x) \cdot u(t) \quad (32)$$

A variação do deslocamento no tempo,  $u(t)$ , é determinada pelas equações, desenvolvidas neste trabalho, Equações 17 e 31. Já o deslocamento variando com a posição  $x$ , comprimento da viga, pode ser bem aproximado por uma função do tipo seno, da seguinte maneira:

$$u(x) = A \operatorname{sen}\left(\frac{x}{L} \pi\right) \quad (33)$$

A Equação 32 pode ser, portanto, reescrita de acordo com a expressão abaixo:

$$y(x, t) = u(t) A \operatorname{sen}\left(\frac{x}{L} \pi\right) \quad (34)$$

onde  $u(t)$  das Equações 17 e 31 serve apenas como uma amplitude da deformada senoidal admitida para a viga.

Os momentos fletores na viga podem, então, ser calculados, a partir da obtenção da segunda derivada de  $y(x, t)$  em relação a  $x$ . A equação 37 traz a expressão final para a determinação dos momentos ao longo da viga.

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -\frac{M}{EI} \quad (35)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -\frac{A\pi^2}{L^2} \operatorname{sen}\left(\frac{x}{L} \pi\right) u(t) \quad (36)$$

$$M(x, t) = -\frac{AEI\pi^2}{L^2} \operatorname{sen}\left(\frac{x}{L} \pi\right) u(t) \quad (37)$$

### 3 COMPARAÇÃO DO MÉTODO ANALÍTICO COM RESULTADOS NUMÉRICOS

#### 3.1 Exemplo

A viga a ser estudada apresenta as seguintes características:

- Comprimento ( $L$ ) = 20m

- Carregamentos:

Ato da protensão: Peso próprio, PP = 1,91 kN/m

Serviço: Carga permanente, CP = 11,81 kN/m (peso próprio + laje de concreto de 12cm de espessura)

Sobrecarga, SB = 16,5 kN/m

- Aço: A36

$f_y = 250$  MPa e  $f_u = 400$  MPa

- Força de protensão:  $P = 1439,7$  kN e ângulo de inclinação,  $\alpha = 3,18^\circ$

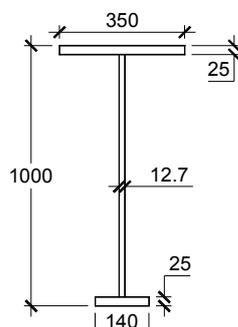
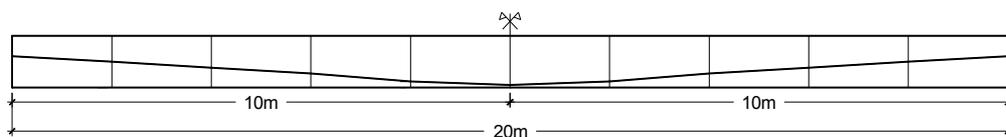
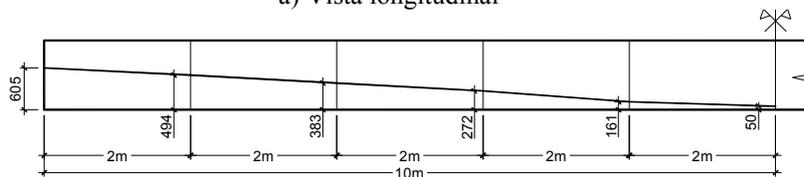


Figura 4 – Seção transversal

Os cabos têm traçado poligonal e a protensão será aplicada pelas duas extremidades da viga. A Figura 5 abaixo evidencia o traçado escolhido para os cabos de protensão.



a) Vista longitudinal



b) Coordenadas dos desviadores (altura em mm e comprimento em m)

Figura 5 – Traçado do cabo

Será avaliado o comportamento dinâmico da viga metálica protendida após o rompimento de um dos cabos de protensão, conforme mostra a Figura 6 abaixo.

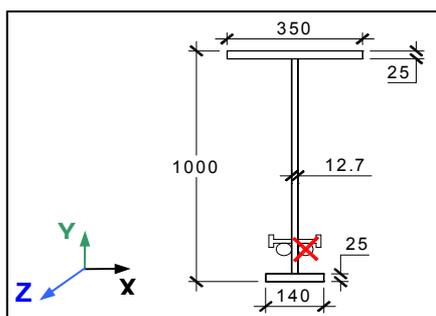


Figura 6 – Cabo de protensão desativado, simulando a sua ruptura

### 3.2. Análise dinâmica utilizando a formulação matemática

Os deslocamentos, ao longo do tempo, para a seção do meio do vão da viga, provenientes das modelagens numéricas, via método dos elementos finitos, serão comparados com os resultados encontrados a partir da formulação matemática desenvolvida neste trabalho, que também traz a vibração da viga no decorrer do tempo.

Inicialmente será considerada a situação da ruptura dos cabos de protensão para a estrutura sem amortecimento. Os valores da força  $F$ , rigidez  $k$  e massa  $m$ , serão substituídos na equação 17 mostrada anteriormente e são calculados da seguinte forma:

- Massa ( $m$ ):

Sabendo que a massa por unidade comprimento,  $\bar{m}$ , é obtida dividindo o peso por metro, pela aceleração da gravidade, então a massa,  $m$ , será encontrada multiplicando  $\bar{m}$  pelo comprimento da viga:

Peso por metro =  $1,91 \times 10^2$  kN/cm,  $g = 981$  cm/s<sup>2</sup> e  $L = 2000$  cm.

$$m = \bar{m}L = \frac{1,91 \times 10^{-2} \text{ kN/cm}}{981 \text{ cm/s}^2} \times 2000 \text{ cm}$$

$$m = 3,89 \times 10^{-2} \frac{\text{kNs}^2}{\text{cm}} = \mathbf{3894 \text{ kg}}$$

- Rigidez (k):

A frequência angular,  $\omega$ , é igual a  $2\pi f$ . A frequência natural calculada para a viga em estudo foi igual a 7,59Hz. A rigidez, k, pode ser determinada pela seguinte expressão:

$$\omega = 2\pi f \text{ e } \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \rightarrow \sqrt{\frac{k}{m}} = 2\pi f \quad (38)$$

Substituindo o valor da massa, m, e da frequência, f, na equação acima, tem-se:

$$\sqrt{\frac{k}{3,89 \times 10^{-2}}} = 2\pi 7,59 \rightarrow \mathbf{k = 88,6 \text{ kN/cm}}$$

- Força (F):

Neste exemplo, o traçado usado para o cabo de protensão foi parabólico, com ancoragens no centro de gravidade das seções extremas. Sendo assim, o deslocamento vertical da viga é gerado pela componente vertical da força de protensão.

$P = 1439,7 \text{ kN}$  e ângulo de inclinação,  $\alpha = 3,18^\circ$

Como o cabo é protendido pelas duas extremidades, a componente vertical total no meio do vão é:

$$F_v = 2 \times \text{sen}(3,18^\circ) = \mathbf{159,73 \text{ kN}}$$

A flecha devida a uma carga concentrada no meio do vão é calculada pela expressão:

$$\delta = \frac{FL^3}{48EI} \quad (39)$$

Sendo  $F = 159,76 \text{ kN}$ ;  $L = 2000 \text{ cm}$ ,  $E = 20500 \text{ kN/cm}^2$  e  $I_x = 354.991 \text{ cm}^4$ , a flecha calculada é igual a 3,66cm. Encontrado o valor do deslocamento vertical, é possível, então, determinar a força F, a ser utilizada na Equação 17, da seguinte forma:

$$F = k \delta \quad (40)$$

$$F = 88,6 \text{ kN/cm} \times 3,66 \text{ cm} = \mathbf{324 \text{ kN}}$$

A Figura 7 mostra a vibração da viga ao longo do tempo, com a simulação da ruptura do cabo no tempo  $t = 0,20 \text{ s}$ .

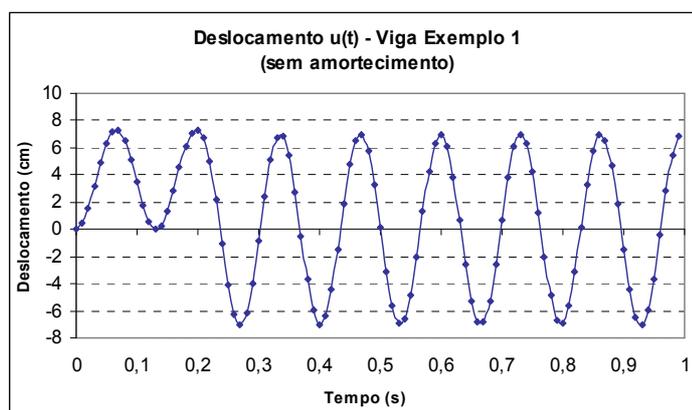


Figura 7 – Deslocamentos ao longo do tempo para a viga do exemplo 1, sem amortecimento

Considerando, agora, que existe amortecimento no sistema, com razão de amortecimento,  $\xi$ , igual a 3% e utilizando a Equação 31, obtêm-se o gráfico da Figura 8 para a vibração da viga no tempo. O cabo também foi rompido no tempo  $t = 0,20s$ .

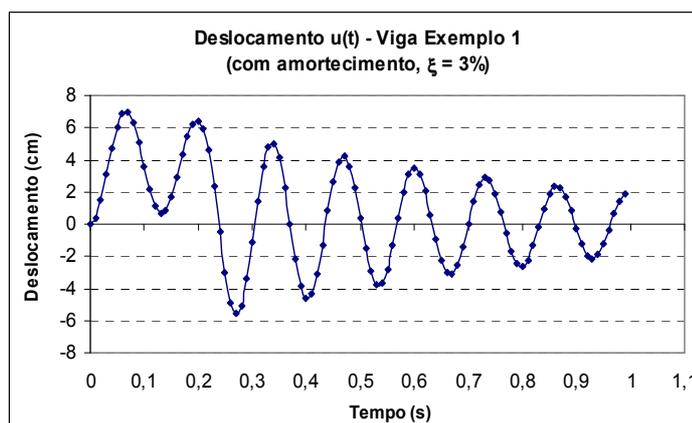


Figura 8 – Deslocamentos ao longo do tempo para a viga, com razão de amortecimento,  $\xi$ , igual a 3%

Considerando a massa adicional referente à laje de concreto na estrutura, encontra-se os novos valores para a massa  $m$ , rigidez  $k$  e força  $F$ :

- Massa ( $m$ ): A carga permanente totaliza  $11,81 \times 10^{-2}$  kN/cm. A massa total é, portanto **24,077kg**.

- Rigidez ( $k$ ): A frequência natural calculada para a viga com a massa adjunta da laje de concreto foi igual a 3,05Hz. A rigidez,  $k$  pode é **88,42kN/cm**

- Força ( $F$ ): A flecha devida à força de protensão foi calculada anteriormente e seu valor é 3,66cm. A força,  $F$ , a ser empregada na Equação 31 é  $F = k \delta =$  **323,63kN**

A Figura 9 apresenta a vibração da viga, com a massa adicional da laje, ao longo do tempo. A simulação da quebra do cabo foi feita para o tempo  $t = 0,40s$ .

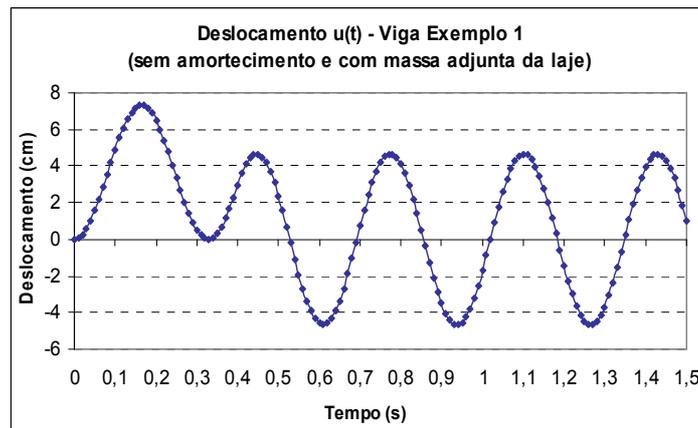


Figura 9 – Deslocamentos ao longo do tempo para a viga, sem amortecimento e com massa da laje de concreto

Admitindo que o amortecimento atue na estrutura, obtêm-se o gráfico da Figura 10.

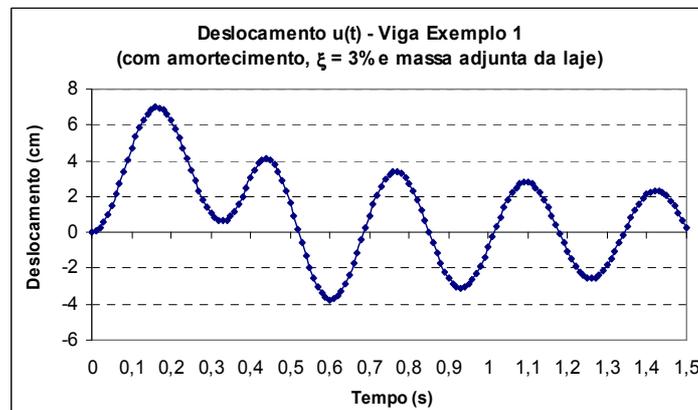


Figura 10 – Deslocamentos ao longo do tempo para a viga do exemplo 1, com massa adjunta e com razão de amortecimento,  $\xi$ , igual a 3%

### 3.3 Análise dinâmica utilizando o ANSYS

Serão reportadas, agora, as respostas dinâmicas provenientes das modelagens numéricas feitas no programa ANSYS. Para este estudo foi usado o modelo numérico simplificado, onde a viga é discretizada por elemento de barra e a protensão é dada por meio de forças equivalentes, conforme visto anteriormente. Foi analisado o deslocamento para o nó exatamente no meio do vão da viga. O *time history* para a viga sem amortecimento e sujeita apenas ao seu peso próprio e a força de protensão pode ser observado na Figura 11.

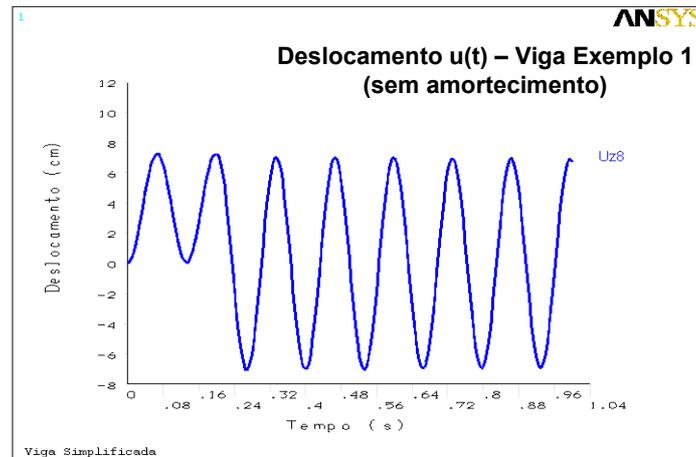


Figura 11 – Deslocamentos ao longo do tempo para a viga, sem amortecimento, obtidos pelo ANSYS

Para fazer a implementação, no modelo numérico, do amortecimento, com  $\xi$  igual a 3%, calculou-se as constantes de amortecimento  $\alpha$  e  $\beta$ , de acordo com a expressão:

$$\xi_i = \frac{\alpha}{2\omega_i} + \frac{\beta\omega_i}{2} \quad (41)$$

Os valores de  $\alpha$  e  $\beta$  foram determinados por interpolação linear, fazendo  $\xi_1 = 2,9\%$  e  $\xi_2 = 3,0\%$  e  $\omega_1 = 2\pi f_1$  e  $\omega_2 = 2\pi f_2$ , sendo  $f_1 = 7,59\text{Hz}$  e  $f_2 = 30,37\text{Hz}$ . Assim, encontra-se  $\alpha = 2,1875$  e  $\beta = 2,54 \times 10^{-4}$ .

A resposta dinâmica para esta situação é mostrada na Figura 12 abaixo, onde pode-se perceber a redução das amplitudes dos deslocamentos, no decorrer do tempo, em razão da existência do amortecimento.

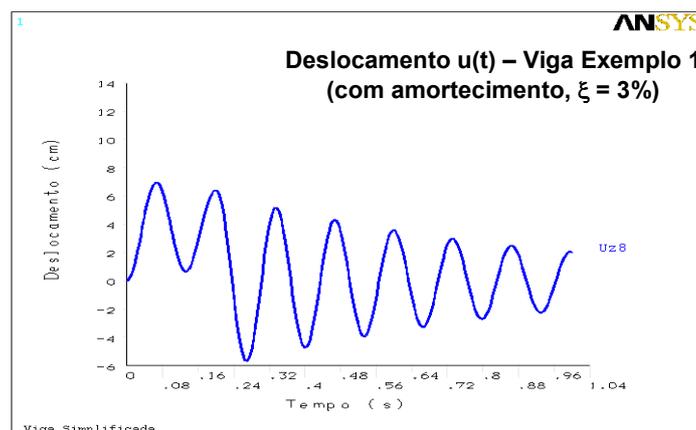


Figura 12 – Deslocamentos ao longo do tempo para a viga, com razão de amortecimento,  $\xi$ , igual a 3% (Resultado obtido do ANSYS)

Em seguida, foi acrescentada ao modelo numérico, a massa adicional da laje de concreto, e a resposta dinâmica obtida é mostrada na Figura 13.

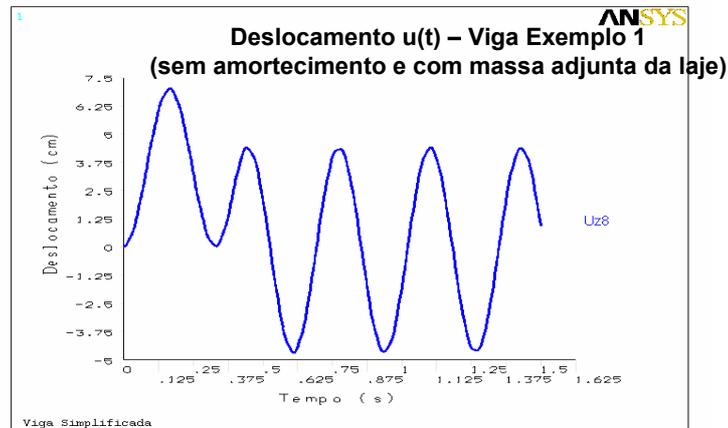


Figura 13 – Deslocamentos ao longo do tempo para a viga, sem amortecimento e com massa adjunta (ANSYS)

Para considerar o amortecimento, novamente foram calculadas as constantes  $\alpha$  e  $\beta$ , por interpolação linear, fazendo  $\xi_1 = 2,9\%$  e  $\xi_2 = 3,0\%$  e  $\omega_1 = 2\pi f_1$  e  $\omega_2 = 2\pi f_2$ . Neste caso,  $f_1=3,05\text{Hz}$  e  $f_2=12,21\text{Hz}$ . Assim, encontra-se  $\alpha = 0,879$  e  $\beta = 6,33 \times 10^{-4}$ . A Figura 14 traz a resposta dinâmica para esta situação.

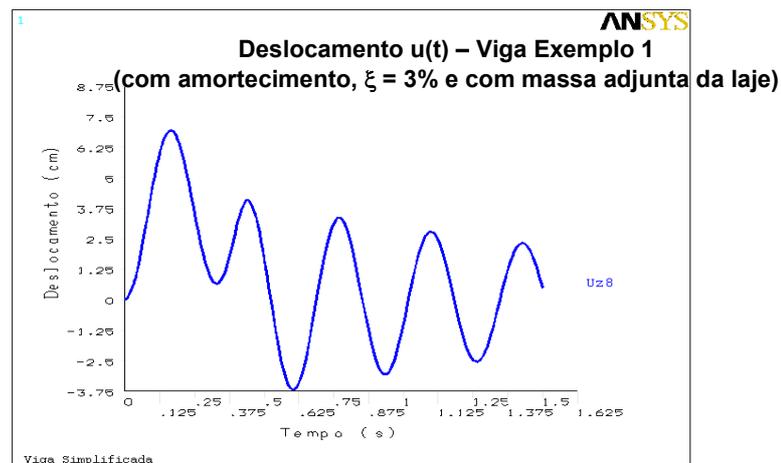


Figura 14 – Deslocamentos ao longo do tempo para a viga, com massa adjunta e com razão de amortecimento,  $\xi$ , igual a 3% (Resultado obtido do ANSYS)

### 3.4 Comparação das respostas dinâmicas: método analítico versus método numérico

Para uma melhor comparação entre as respostas dinâmicas obtidas com o uso da formulação matemática, e as provenientes da modelagem numérica, serão plotados, no mesmo gráfico, os deslocamentos encontrados pelos dois métodos.

As Figuras 15 e 16 mostram a vibração da viga, quando submetida apenas ao seu peso próprio e a força de protensão. O amortecimento é considerado na Figura 16.

Observando as figuras 15 e 16, pode-se constatar que as respostas dinâmicas obtidas através da formulação matemática e pela modelagem numérica, em elementos finitos,

apresentam uma enorme semelhança, estando as curvas dos resultados numéricos e analíticos sobrepostas.

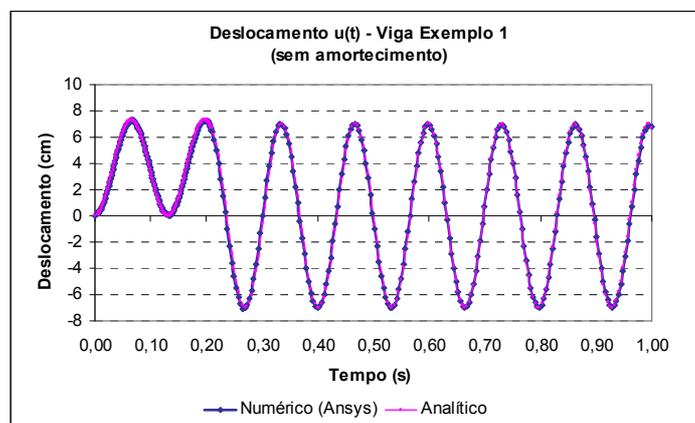


Figura 15 – Deslocamentos ao longo do tempo para a viga, sem amortecimento (Resultados numéricos e analíticos)

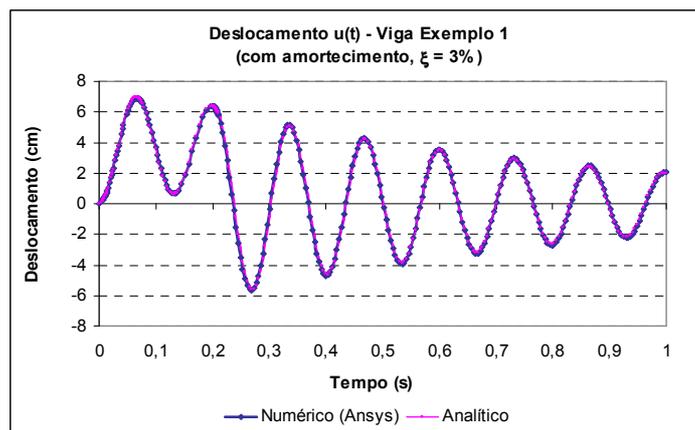


Figura 16 – Deslocamentos ao longo do tempo para a viga do exemplo 1, com razão de amortecimento,  $\xi$ , igual a 3% (Resultados numéricos e analíticos)

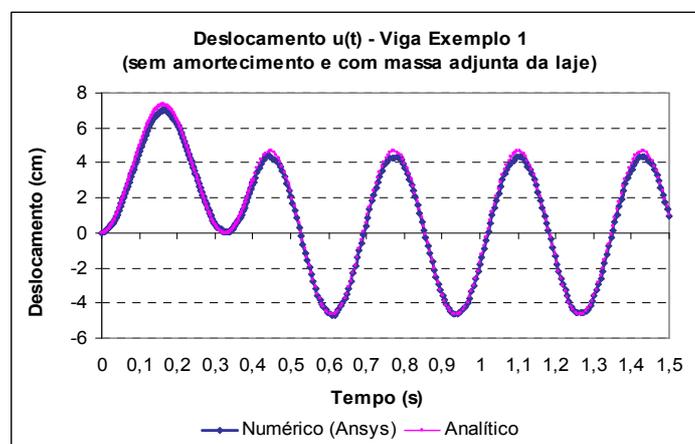


Figura 17 – Deslocamentos ao longo do tempo para a viga, sem amortecimento e com massa adjunta (Resultados numéricos e analíticos)

A seguir, serão apresentadas, nas Figuras 17 e 18, as respostas dinâmicas provenientes dos dois métodos em estudo, para a situação em que é acrescentada a massa adjunta, da laje de concreto, na estrutura.

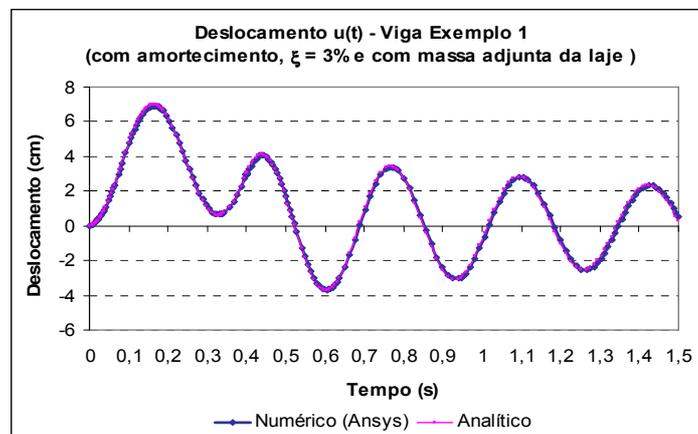


Figura 18 – Deslocamentos ao longo do tempo para a viga, com massa adjunta e com razão de amortecimento,  $\xi$ , igual a 3% (Resultados numéricos e analíticos)

As Figuras 17 e 18 evidenciam, mais uma vez, a grande semelhança entre as respostas dinâmicas encontrada pelos dois métodos de análise, numérico e analítico. As curvas da figura 17, onde não há amortecimento no sistema, apresentam uma pequena diferença nas amplitudes dos deslocamentos, mas as diferenças não são significativas.

A partir dos resultados obtidos, nota-se que houve redução das amplitudes dos deslocamentos e aumento do período de oscilação, quando comparadas as respostas dinâmicas da viga submetida apenas ao seu peso próprio e da viga com o acréscimo da massa da laje.

Observa-se, também, que o rompimento dos cabos de protensão faz a viga oscilar em torno da sua posição inicial ( $u = 0$ ), com amplitudes de deslocamentos positivas e negativas.

#### 4 - CONCLUSÕES

A partir das análises dinâmicas da vibração das vigas após a quebra dos cabos de protensão, foi possível validar as formulações matemáticas desenvolvidas, uma vez que as respostas dinâmicas encontradas usando essas equações foram muito semelhantes às obtidas por métodos numéricos. Observando os deslocamentos ao longo do tempo (*time history*), nota-se que a viga passa a oscilar em torno da posição inicial ( $u=0$ ), com amplitudes de deslocamentos positivas e negativas, após o rompimento dos cabos de protensão. Para a situação de serviço, considerando um deslocamento inicial para a viga, a ruptura do cabo de protensão faria a viga vibrar em torno dessa posição inicial. A consideração do amortecimento na estrutura fez as amplitudes dos deslocamentos reduzirem no tempo, como era esperado.

#### REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Clough, Ray W.; Penzien, Joseph. “*Dynamics of structures*”. 2nd edition, McGraw-Hill, Singapore, 1993.

- Nunziata, Vincenzo. “*Strutture in acciaio precompresso*”. Palermo: D. Flaccovio, 1999.
- Associação Brasileira Normas Técnicas. NBR 8800. “*Projeto e execução de estruturas de aço em edifícios – Métodos dos estados limites*”. NBR 8800, Rio de Janeiro, 1986.
- AISC - *American Institute of Steel Construction. Load and Resistance Factor Design Specification for Structural Steel Buildings*. Chicago, 1999.
- Troitsky, M. S. “*Prestressed steel bridges: theory and design*”. New York, Van Nostrand Reinhold Company, 1990.