

COMBINAÇÃO DE ELEMENTOS FINITOS DE PLACA, VIGA E INTERFACE NA SIMULAÇÃO NUMÉRICA DE VIGAS MISTAS DE AÇO E CONCRETO

João Batista M. Sousa Jr.^a, Amilton R. da Silva^b

*Departamento de Engenharia Civil, Escola de Minas, Universidade Federal de Ouro Preto
35400000, Ouro Preto, MG, Brasil, joao@em.ufop.br*

^b*Coord. Eng. Civil, Universidade Federal de S. J. Del Rey, Campus Alto Paraopeba
Ouro Branco, MG, Brasil, amilton@metalicas.em.ufop.br*

Palavras Chave: vigas mistas, estruturas mistas, interação parcial.

Resumo. Em geral as vigas mistas de aço e concreto são compostas por um perfil metálico ligado a uma laje de concreto, por meio de conectores de cisalhamento. A resistência e rigidez relativa da conexão podem classificá-la como de interação parcial, permitindo deslocamentos relativos entre os dois componentes. Nos últimos anos, diversos modelos de elementos finitos foram propostos para a análise deste tipo de estrutura, com ênfase nos elementos finitos de barra com deslizamento incorporado. Nestes elementos, a seção transversal de concreto admite variação uniforme de tensões ao longo da direção perpendicular ao plano da viga. Em função da largura colaborante da laje ser de uma ordem de grandeza superior, a desconsideração desta variação de tensões não permite obter uma resposta compatível com a realidade, principalmente no que se refere ao fenômeno de *shear lag* (redução de tensão normal na direção perpendicular), o que traz conseqüências tanto nas fases elásticas quanto nas análises em regime de ruptura. Este artigo apresenta uma formulação de elementos finitos de barra e de placa para a análise não-linear física e geométrica de vigas mistas de aço e concreto. Para a simulação da interação parcial entre os materiais são desenvolvidos elementos de interface específicos, aptos a combinar os dois tipos de componentes. Um modelo constitutivo em camadas é empregado para analisar a laje de concreto. Exemplos numéricos demonstram a viabilidade e precisão do modelo, bem como a sua capacidade de representar situações nas quais os elementos de barra seriam insuficientes, como em pavimentos inteiros de estruturas mistas ou para a representação do *shear lag*.

1 INTRODUÇÃO

Este trabalho consiste na implementação e teste de elementos finitos capazes de simular o comportamento de placas de concreto ligadas a vigas de aço através de uma conexão deformável.

Na implementação do elemento finito de placa, que simula o comportamento da laje de concreto da viga mista, foi considerada uma não linearidade física com objetivo de avaliar a influência da interação parcial. Neste estado limite, a placa de concreto assume deslocamentos consideráveis, podendo assim, dependendo das condições de contorno da placa, sofrer a influência do efeito de membrana, o que leva a necessidade de uma análise não linear geométrica. Este efeito de membrana em placas de concreto é verificado em Huang et al. (2003b) através da comparação dos resultados numéricos de duas placas considerando análise linear e não linear.

Para simular o comportamento da viga de aço foi implementado um elemento de viga semelhante ao implementado nos trabalhos de Silva e Sousa Jr. (2009) e Sousa Jr. e Silva (2007), com a diferença da consideração de um grau de liberdade de translação e outro de rotação a mais, para que haja compatibilidade com o elemento de placa. Também foi inserido o efeito de segunda ordem como em Sousa Jr. *et al.* (2010).

O comportamento não linear da conexão deformável entre a laje de concreto e a viga de aço é simulada pelo elemento de interface, que faz também a ligação entre os elementos de placa e viga. Este elemento é, também, semelhante ao implementado por Sousa Jr. e Silva (2007).

2 ELEMENTO DE PLACA

O elemento de placa implementado neste trabalho é um elemento isoparamétrico de nove nós. A não linearidade física é verificada dividindo a seção em várias camadas e considerando que em cada camada as propriedades do material possam ser diferentes. As principais considerações para este tipo de análise são descritas a seguir (Huang *et al.*, 2003-a):

- a) As diferentes camadas do elemento de placa são consideradas de concreto ou aço de reforço, não sendo permitido qualquer deslizamento entre elas;
- b) As propriedades mecânicas do material de cada camada podem ser inicialmente diferentes e as suas relações tensão-deformação são independentes para cada camada;
- c) As barras de reforço em qualquer direção são transformadas em uma camada equivalente de aço com rigidez somente na direção da barra. É assumido um vínculo perfeito entre as camadas de aço que representam as barras de reforço e as camadas de concreto;
- d) As camadas de concreto são consideradas em um estado plano de tensão, e o concreto é considerado ortotrópico após fissuração ou esmagamento.

De forma distinta do elemento de placa tradicional, o elemento implementado neste trabalho considera, além do deslocamento vertical na direção de z e rotações em torno dos eixos x e y , translações nas direções dos eixos x e y como mostra a Figura 1. As translações seriam necessárias mesmo para o caso de análise linear, uma vez que, ao conectá-lo a um elemento de viga, a posição da linha neutra não é mais conhecida.

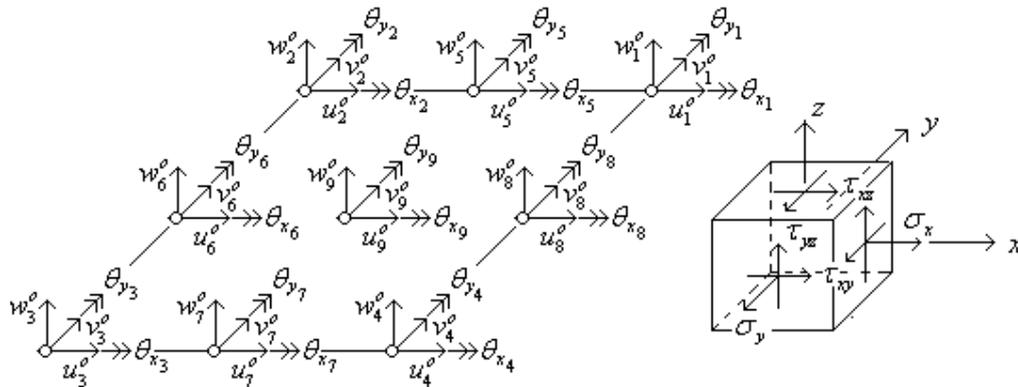


Figura 1: graus de liberdade do elemento de placa com 9 nós

2.1 Hipóteses cinemáticas

As hipóteses cinemáticas para o campo de deslocamentos do elemento da Figura 1 são representadas por:

$$\begin{aligned}
 u(x, y, z) &= u^o(x, y) + z\theta_y(x, y) \\
 v(x, y, z) &= v^o(x, y) - z\theta_x(x, y) \\
 w(x, y, z) &= w^o(x, y)
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

que consideram a hipótese de seções planas mas não perpendiculares ao eixo deformado, conforme a Teoria de Placas de Reissner-Mindlin. Os valores com sobrescrito θ indicam deslocamentos no eixo de referência da placa. As direções positivas dos deslocamentos e rotações indicados estão indicadas na Figura 1.

2.2 Campo de Deformações

O campo de deformações adotado corresponde à consideração de não linearidade geométrica segundo as hipóteses de Von Kármán e pode ser separado em termos de suas componentes lineares e não-lineares conforme

$$\mathbf{e} = \mathbf{e}_l + \mathbf{e}_{nl}
 \tag{2}$$

Onde os componentes dos vetores \mathbf{e}_l e \mathbf{e}_{nl} são dados por

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yz} \end{Bmatrix}_l = \begin{Bmatrix} u_{,x} + z\theta_{y,x} \\ v_{,y} - z\theta_{x,y} \\ u_{,y} + v_{,x} + z(\theta_{y,y} - \theta_{x,x}) \\ w_{,x} + \theta_y \\ w_{,y} - \theta_x \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \frac{1}{2}(w_{,x})^2 \\ \frac{1}{2}(w_{,y})^2 \\ w_{,x}w_{,y} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}
 \tag{3}$$

As relações entre deslocamentos nodais e deformações generalizadas podem ser obtidas a partir das Eqs. (3), introduzindo-se as funções de interpolação na forma usual de elementos finitos baseados em deslocamentos. Se Φ representa um vetor com as funções de interpolação lagrangianas, pode-se escrever para o vetor de deslocamentos nodais \mathbf{u} com componentes u, v

e w

$$\mathbf{u} = \mathbf{\Psi}^T \mathbf{q} \quad \text{onde} \quad \mathbf{\Psi} = \begin{bmatrix} \Phi & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Phi & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \Phi & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \Phi & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \Phi \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{q} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_u \\ \mathbf{q}_v \\ \mathbf{q}_w \\ \mathbf{q}_{\theta_x} \\ \mathbf{q}_{\theta_y} \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Definindo de forma padrão os operadores diferenciais que relacionam os deslocamentos com as deformações, podem-se obter as matrizes que relacionam de forma não-linear os deslocamentos nodais com as deformações generalizadas, na forma total e na forma incremental. As manipulações envolvidas podem ser encontradas em livros-texto de elementos finitos (Zienkiewicz e Taylor, 1991). Nas expressões finais surgem as matrizes \mathbf{B} e \mathbf{B}^* , que relacionam deformações com deslocamentos no elemento:

$$\mathbf{e} = \mathbf{B}\mathbf{u} \quad \text{e} \quad \delta\mathbf{e} = \mathbf{B}^* \delta\mathbf{u} \quad (5)$$

Considerando as funções de interpolação as relações deformação-deslocamento incrementais são

$$\delta\mathbf{e} = \mathbf{B}^* \mathbf{\Psi}^T \delta\mathbf{q} \quad (6)$$

Considerando que as tensões que surgem no elemento de placa são agrupadas no vetor \mathbf{s} , e que os esforços generalizados são obtidos a partir de integração das tensões ao longo da espessura da placa, tem-se:

$$\mathbf{s} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{N} = \begin{Bmatrix} \int \sigma_x dz \\ \int \sigma_y dz \\ \int \tau_{xy} dz \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{M} = \begin{Bmatrix} \int z \sigma_x dz \\ \int z \sigma_y dz \\ \int z \tau_{xy} dz \end{Bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{Q} = k \begin{Bmatrix} \int \tau_{xz} dz \\ \int \tau_{yz} dz \end{Bmatrix} \quad (7)$$

A aplicação do Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV) ao elemento, na forma padrão, permite a obtenção do vetor de forças internas como

$$\mathbf{f}_{\text{int}} = \iiint_V \mathbf{\Psi} \mathbf{B}^{*T} \mathbf{s} dV = \iiint_V \mathbf{\Psi} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_m^T & \mathbf{0} \\ z\mathbf{B}_b^T + \mathbf{B}_u^T & \mathbf{B}_s^T \end{bmatrix} \mathbf{s} dV \quad (8)$$

onde \mathbf{B}_m , \mathbf{B}_b , \mathbf{B}_u e \mathbf{B}_s são matrizes de operadores diferenciais (Zienkiewicz e Taylor, 1991) referentes aos termos de membrana, flexão, cisalhamento e membrana não-linear que aplicadas aos componentes de tensão e integradas ao longo da espessura fornecem

$$\mathbf{f}_{\text{int}} = \iiint_V \mathbf{\Psi} \begin{Bmatrix} \mathbf{B}_m^T \mathbf{N} \\ \mathbf{B}_b^T \mathbf{M} + \mathbf{B}_u^T \mathbf{N} + \mathbf{B}_s^T \mathbf{Q} \end{Bmatrix} dA \quad (9)$$

Finalmente, derivando o vetor de forças internas em relação aos deslocamentos nodais \mathbf{q} , a matriz de rigidez tangente do elemento de placa pode ser obtida como

$$\mathbf{K} = \iiint_V \Psi \begin{bmatrix} \mathbf{B}_m^T & \mathbf{0} \\ z\mathbf{B}_b^T + \mathbf{B}_u^T & \mathbf{B}_s^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{D}_p & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_m & z\mathbf{B}_b + \mathbf{B}_u \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}_s \end{bmatrix} dV + \iiint_V \Psi \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{G}^T \mathbf{H} \mathbf{G} \end{bmatrix} dV \quad (10)$$

sendo os termos referentes à lei constitutiva tangente

$$\delta \mathbf{s} = \mathbf{D} \delta \mathbf{e} \quad \text{onde} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_p & \mathbf{0}_{2 \times 3} \\ \mathbf{0}_{2 \times 3} & \mathbf{D}_s \end{bmatrix} \quad (11)$$

e a matriz \mathbf{H} agrupa os componentes de tensão que influenciam na rigidez geométrica

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} \quad (12)$$

A integral de volume da Eq. (10) pode ser separada previamente com termos ao longo da espessura, de tal forma que a matriz de rigidez final seja obtida por integração na área do elemento. Ao longo da espessura a integração é feita por camadas considerando a não linearidade física do concreto e armaduras, segundo os critérios apresentados a seguir.

2.3 Leis constitutivas dos materiais

Para a avaliação do problema não linear físico foi adotada para o concreto na tração a curva tensão-deformação da Figura 2, usada também por Huang et al. (2003-b) na avaliação de seus exemplos, que serviram, neste trabalho, como validação para o elemento de placa implementado. No presente trabalho foi adotado $\epsilon_{tu} = 10\epsilon_{tr}$ (deformação última e deformação correspondente à tensão de pico), e para a resistência a tração do concreto foi usada a relação $f_t = 0.3321\sqrt{f_c}$ fornecida pela ASCE (1982), onde f_c é a resistência a compressão do concreto em MPa.

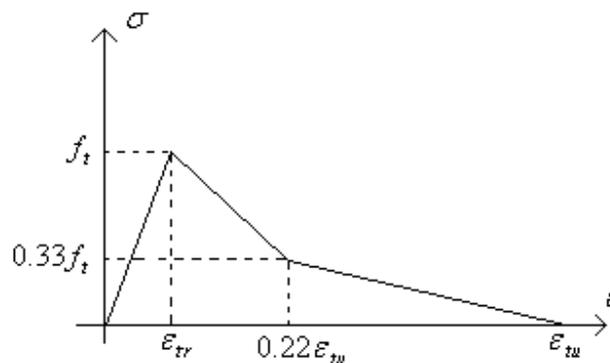


Figura 2: relação tensão-deformação para o concreto na tração

Já para o concreto na compressão, é adotada a curva tensão-deformação especificada no

Eurocode 4 (1992) mostrada na Figura 3 e com expressão analítica dada por

$$\sigma_c(\varepsilon) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{3\varepsilon f_c}{\varepsilon_{cr} [2 + (\varepsilon/\varepsilon_{cr})^3]} & \text{se } 0 < \varepsilon < \varepsilon_{cr} \\ f_c \frac{\varepsilon - \varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{cr} - \varepsilon_{cu}} & \text{se } \varepsilon > \varepsilon_{cr} \end{array} \right\} \quad (13)$$

onde ε_{cr} é a deformação correspondente à tensão de pico f_c e ε_{cu} é a deformação última.

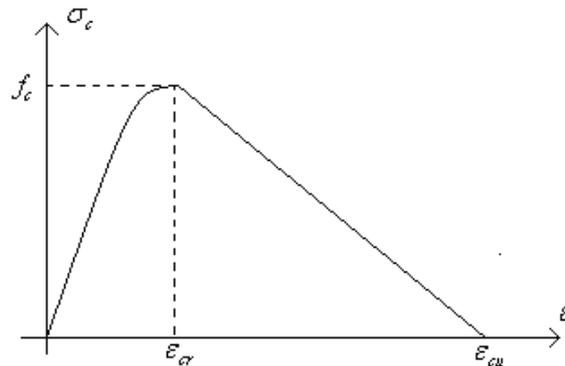


Figura 3: curva tensão-deformação do concreto na compressão

A Figura 4 mostra a curva tensão-deformação para o aço de reforço como especificada no Eurocode 4 (1992).

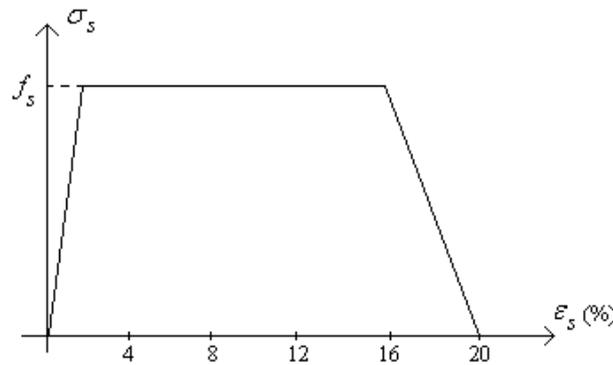


Figura 4: relação tensão-deformação do aço de reforço

No processo incremental usado para definir a curva carga-deslocamento do problema analisado a não linearidade física é avaliada a cada passo. Isso é feito atribuindo, a cada camada do elemento, uma rigidez obtida a partir da curva tensão-deformação do material e das deformações principais no ponto de Gauss da integração numérica do elemento. Em cada ponto de Gauss, e para cada camada do elemento de placa, as deformações nas direções dos eixos x e y são obtidas. Considerando as camadas em estado plano de tensões, são determinadas as direções principais 1 e 2, onde a direção 1 indica a direção de maior deformação principal.

Um critério de falha baseado na máxima deformação é adotado neste trabalho. De forma simplificada, a região de falha do concreto foi assumida como sendo a região fora da região retangular definida pelos vértices opostos $(\varepsilon_{cr}, \varepsilon_{cr})$ e $(\varepsilon_{tr}, \varepsilon_{tr})$, onde ε_{cr} e ε_{tr} são definidos nas Figuras 2 e 3. Se as deformações principais $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ se encontrarem fora da região de falha então o concreto é considerado isotrópico e linear, e o módulo de deformação axial do concreto é obtido da curva da figura 3 fazendo $E_c = \frac{\partial \sigma_c}{\partial \varepsilon_c}(\varepsilon_c = 0)$. Caso contrário, o concreto é considerado ortotrópico com a relação tensão-deformação desacoplada nas direções 1 e 2 (direções principais). Neste sistema, a relação incremental entre tensões e deformações é dada por

$$\mathbf{D}_{12} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{p12} & \mathbf{0}_{2 \times 3} \\ \mathbf{0}_{2 \times 3} & \mathbf{D}_{s12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & E_2 & 0 & 0 & 0 \\ & & \frac{1}{2}(G_1 + G_2) & 0 & 0 \\ Sim. & & & G_1 & 0 \\ & & & & G_2 \end{bmatrix} \quad (14)$$

Na Eq. 14, os módulos tangentes para as direções principais são dados pelas equações

$$E_1 = \frac{\partial \sigma_c}{\partial \varepsilon_c}(\varepsilon_c = \varepsilon_1) \quad E_2 = \frac{\partial \sigma_c}{\partial \varepsilon_c}(\varepsilon_c = \varepsilon_2) \quad G_1 = \frac{E_1}{2(1+\nu)} \quad G_2 = \frac{E_2}{2(1+\nu)} \quad (15)$$

A matriz constitutiva tangente na direção dos eixos cartesianos originais x e y pode ser obtida a partir de \mathbf{D}_{12} por meio de uma adequada rotação de eixos.

3 ELEMENTO DE VIGA

O elemento de viga empregado neste trabalho tem graus de liberdade compatíveis com aqueles definidos para o elemento de placa do item anterior. Este elemento é semelhante ao implementado no trabalho de Sousa Jr. *et al.* (2010) e seus graus de liberdade estão representados na Figura 5.

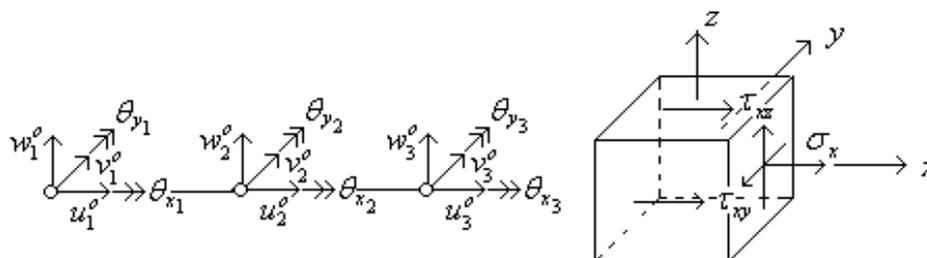


Figura 5: graus de liberdade do elemento de viga

3.1 Hipóteses cinemáticas

Para haver compatibilidade com o elemento de placa, é utilizado um elemento de viga de acordo com a teoria de Timoshenko, que emprega hipóteses análogas à teoria de Reissner para placas. O campo de deslocamentos é dado por

$$\begin{aligned}
 u(x, y, z) &= u^o(x) + z\theta_y(x) \\
 v(x, y, z) &= v^o(x) - z\theta_x(x) \\
 w(x, y, z) &= w^o(x) + y\theta_x(x)
 \end{aligned}
 \tag{16}$$

A compatibilidade entre os elementos exige que o elemento de viga considere a ocorrência de torção na sua seção transversal. Neste trabalho somente é considerada a torção uniforme, e eventuais efeitos de empenamento são desprezados. Em geral, em pavimentos mistos a conexão entre laje e viga restringe o empenamento da seção.

3.2 Campo de deformações

As deformações presentes no elemento de viga são obtidas a partir da diferenciação dos deslocamentos (Eqs. 16) e são compatíveis com as hipóteses de Von Kármán usadas para a placa:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x &= u_{,x} + z\theta_{y,x} + \frac{1}{2}w_{,x}^2 \\
 \varepsilon_{xz} &= \theta_y + w_{,x} + y\theta_{x,x} \\
 \varepsilon_{xy} &= v_{,x} - z\theta_{x,x}
 \end{aligned}
 \tag{17}$$

Na aproximação de elementos finitos baseado em deslocamentos, as equações dos deslocamentos são mais uma vez aproximadas por funções de forma (Φ - vetor coluna das funções de forma) associadas aos deslocamentos nodais (\mathbf{q}).

Adotando funções de interpolação Φ adequadas para a descrição das variáveis cinemáticas (translações e rotações) pode-se obter as relações incrementais entre deslocamentos nodais e deformações e a partir desta, empregando o Princípio dos Trabalhos Virtuais, o vetor de forças internas para o elemento de viga:

$$\mathbf{f}_{\text{int}} = \begin{Bmatrix} N_x \Phi_{,x} \\ N_{xy} \Phi_{,x} \\ N_{xz} \Phi_{,x} + N_x \Phi_{,x} w_{,x} \\ T_x \Phi_{,x} \\ M_x \Phi_{,x} + N_{xz} \Phi \end{Bmatrix}
 \tag{18}$$

sendo os esforços resistentes N_x , N_{xy} , N_{xz} , M_x e T_x calculados através das seguintes equações:

$$N_x = \int_A \sigma_x dA \quad N_{xy} = \int_A \tau_{xy} dA \quad N_{xz} = \int_A \tau_{xz} dA \quad M_x = \int_A \sigma_x z dA \quad T_x = \int_A (\tau_{xz} y - \tau_{xy} z) dA
 \tag{19}$$

As integrais que surgem na avaliação dos esforços resistentes podem ser obtidas a partir de integração numérica, como no método das fibras, ou através de uma técnica de integração analítica baseada no Teorema de Green.

A matriz de rigidez tangente do elemento de barra pode ser obtida a partir da diferenciação do vetor de forças internas em relação aos deslocamentos nodais \mathbf{q} . Após alguma manipulação, a matriz \mathbf{K} pode ser obtida como

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \Phi_{,x} \left(\frac{\partial N_x}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \\ \Phi_{,x} \left(\frac{\partial N_{xy}}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \\ \Phi_{,x} \left(\frac{\partial N_{xz}}{\partial \mathbf{q}} \right)^T + \Phi_{,x} w_{,x} \left(\frac{\partial N_x}{\partial \mathbf{q}} \right)^T + N_x \Phi_{,x} \left(\frac{\partial w_{,x}}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \\ \Phi_{,x} \left(\frac{\partial T_x}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \\ \Phi_{,x} \left(\frac{\partial M_x}{\partial \mathbf{q}} \right)^T + \Phi_{,x} \left(\frac{\partial N_{xy}}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \end{bmatrix} \quad (20)$$

Na expressão para a matriz de rigidez do elemento de viga aparecem as derivadas dos esforços resistentes (Eqs. 19) em relação aos deslocamentos nodais. Estes valores podem ser obtidos a partir da aplicação da regra da cadeia, diferenciando primeiro em relação às deformações, e multiplicando pelas derivadas das deformações em relação aos deslocamentos nodais. Como exemplo, apresenta-se a seguir a expressão para a derivada do momento fletor M_x :

$$\frac{\partial M_x}{\partial \mathbf{q}} = \begin{Bmatrix} \Phi_{,x} \int_A E z dA \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \Phi_{,x} \int_A E z^2 dA \end{Bmatrix} \quad (21)$$

Na Eq. (21) as integrais na seção transversal (rigidezes generalizadas) são efetuadas analiticamente da mesma forma que na avaliação dos esforços resistentes.

4 ELEMENTO DE INTERFACE

O elemento de interface implementado neste trabalho simula o comportamento da conexão deformável e faz a ligação entre os elementos de placa e viga definidos anteriormente. Portanto, seus graus de liberdade são compatíveis com estes elementos, como é mostrado na Figura 6. Este elemento é baseado no elemento de interface implementado por Sousa Jr. e Silva (2007) e Silva e Sousa Jr. (2009).

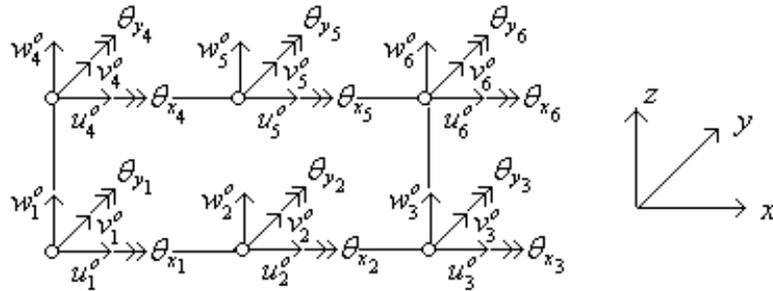


Figura 6: graus de liberdade do elemento de interface

Os deslocamentos relativos entre as faces do elemento de espessura nula na direção do eixo longitudinal são (

Figura 7):

$$w_u(x) = u_2^0(x) - u_1^0(x) - (y_2 - d)\theta_{y2}(x) - (d - y_1)\theta_{y1}(x) \tag{22}$$

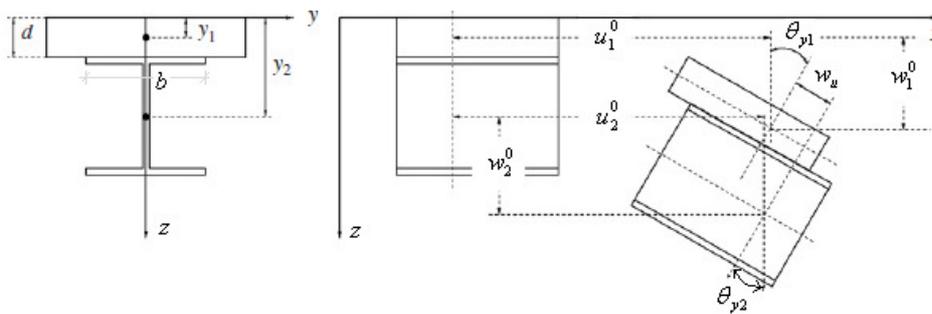


Figura 7: deslizamento na direção x

Os deslocamentos relativos entre as faces do elemento de espessura nula na direção do eixo transversal à viga são dados por (Figura 8):

$$w_v(x) = v_2^0(x) - v_1^0(x) + (y_2 - d)\theta_{x2}(x) + (d - y_1)\theta_{x1}(x) \tag{23}$$

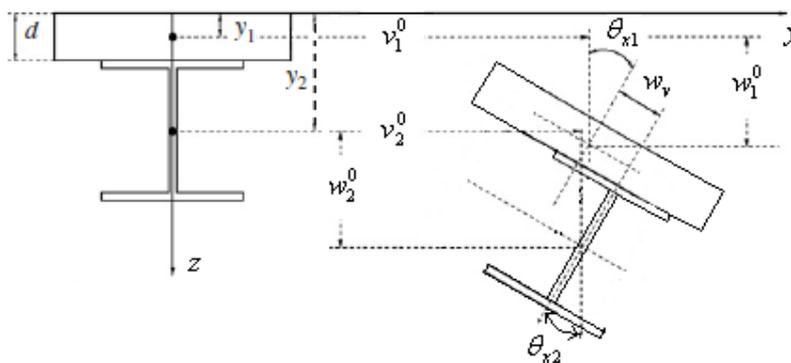


Figura 8: deslizamento na direção y

Por último, a equação dos deslocamentos relativos na direção z , que são correspondentes à separação vertical (Figura 9), é dada por

$$w_w(x) = w_2^0(x) - w_1^0(x) + y(\theta_{x2}(x) - \theta_{x1}(x)) \tag{24}$$

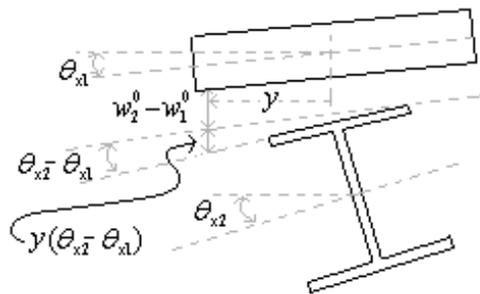


Figura 9: separação vertical entre elementos

Os deslocamentos relativos w_u , w_v e w_w do elemento de interface são obtidos a partir da interpolação dos valores nodais apresentados na Figura 6. As funções de forma empregadas são semelhantes às dos elementos de placa e viga.

As relações constitutivas não-lineares do elemento de interface para as direções longitudinais, transversais e verticais são dadas, respectivamente, pelas expressões:

$$S_b = S_b(w_u) \quad V_b = V_b(w_v) \quad N_b = N_b(w_w) \tag{25}$$

Aplicando o PTV ao elemento de interface isoladamente e em seguida substituindo os deslocamentos relativos pelas suas interpolações nodais pode-se calcular o vetor de forças internas do elemento de interface (Eq. 17). Derivando o vetor de forças internas em relação aos deslocamentos nodais obtém-se a matriz de rigidez tangente do elemento de interface (Eq. 1827).

$$\mathbf{f}_{\text{int}} = \left\{ \begin{array}{c} -S_b \Phi \\ -V_b \Phi \\ -N_b^1 \Phi \\ [(d - y_1)V_b - N_b^2] \Phi \\ (y_1 - d)S_b \Phi \\ S_b \Phi \\ V_b \Phi \\ N_b^1 \Phi \\ [(y_2 - d)V_b + N_b^2] \Phi \\ (d - y_2)S_b \Phi \end{array} \right\} \tag{26}$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix}
 -\Phi \left(\frac{\partial S_b}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \\
 -\Phi \left(\frac{\partial V_b}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \\
 -\Phi \left(\frac{\partial N_b^1}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \\
 \Phi \left[(d - y_1) \left(\frac{\partial V_b}{\partial \mathbf{q}} \right)^T - \frac{\partial N_b^2}{\partial \mathbf{q}} \right] \\
 (y_1 - d) \Phi \left(\frac{\partial S_b}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \\
 \Phi \left(\frac{\partial S_b}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \\
 \Phi \left(\frac{\partial V_b}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \\
 \Phi \left(\frac{\partial N_b^1}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \\
 \Phi \left[(y_2 - d) \left(\frac{\partial V_b}{\partial \mathbf{q}} \right)^T + \frac{\partial N_b^2}{\partial \mathbf{q}} \right] \\
 (d - y_2) \Phi \left(\frac{\partial S_b}{\partial \mathbf{q}} \right)^T
 \end{bmatrix} \quad (27)$$

5 EXEMPLO NUMÉRICO

Para validar a ação conjunta dos elementos de placa, viga e interface implementados neste trabalho foi analisado um exemplo com configuração bastante comum na prática da construção civil. Este exemplo consiste de uma laje de concreto ligada por meio de conectores a três vigas de aço longitudinais e duas transversais com apoios nas interseções destas vigas, como mostra a Figura 10. Este mesmo exemplo foi analisado experimentalmente e numericamente por Nie et al (2008) e seus resultados são usados neste trabalho como dados comparativos.

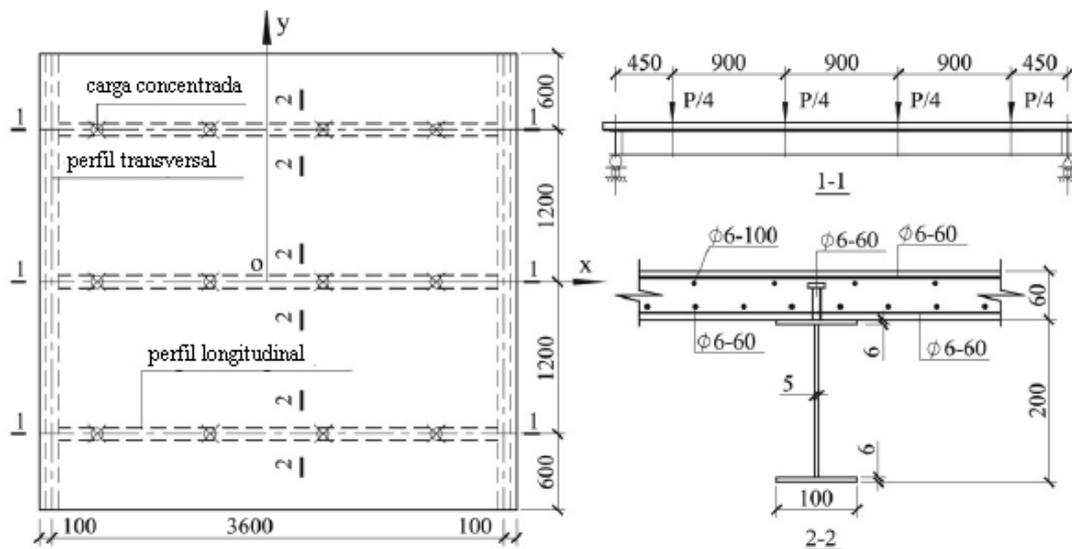


Figura 10: laje de concreto conectada a perfis de aço

A estrutura da Figura 10 foi levada a ruptura através de três jacks em série apoiados sobre as três vigas longitudinais com um incremento de carga de 2 kN. Durante o teste, os autores (Nie et al., 2008) monitoraram deslocamento, deformação e deslizamento. No entanto, devido a alta rigidez da conexão e o fato desta não causar efeitos significativos no estado limite último da estrutura, o deslizamento não foi avaliado pelos autores.

A curva tensão-deformação adotada para o perfil de aço e as barras de reforço é representada na Figura 11. Para o perfil de aço foram adotados $f_y = 295$ MPa e $f_u = 448$ MPa. Para as barras de reforço foram adotados $f_y = 380$ MPa e $f_u = 478$ MPa. E para ambos foram adotados $E_s = 206000$ MPa e $E_t = 2000$ MPa.

Para o concreto foi considerada a curva tensão deformação definida anteriormente com $\varepsilon_{cr} = 0.002$, resistência a compressão de 30.3 MPa e coeficiente de Poisson de 0.17. Para a rigidez da conexão ao longo do eixo da viga foi considerada a expressão preconizada por Aribert (1992):

$$S_b = S_{bu} (1 - e^{-C_1 w_u})^{C_2}$$

onde S_b é a força cortante por unidade de comprimento e w_u é o deslizamento. S_{bu} é a resistência última do conector por unidade de comprimento, que pode ser obtida por teste ou

através de expressões definidas em códigos que associa essa resistência última à resistência de corte do conector e à resistência de esmagamento do concreto que o envolve o conector. C_1 e C_2 são parâmetros que definem a forma da curva. Para este exemplo, Aribert (1992) recomenda $C_1 = 0.7\text{mm}^{-1}$ e $C_2 = 0.56$.

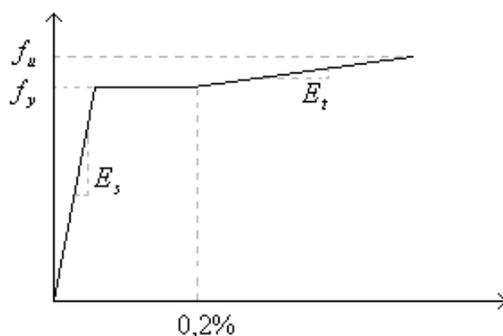


Figura 11: relação tensão-deformação para os aços

Nas direções transversal e vertical ao eixo da viga são considerados trechos lineares com rigidez muito grande, sendo, portanto, desconsiderada a possibilidade de separação vertical na interface e de deslizamento na direção transversal ao eixo da viga. Outros dados como dimensões, quantidade de barras de reforço e de conectores podem ser vistos na Figura 10.

A mostra o resultado numérico (Nie) e experimental (Teste) obtidos em Nie et al (2008), e o resultado numérico obtido neste trabalho (Souza e Silva). Na análise numérica de Nie et al (2008) foi usado o programa ANSYS com a placa de concreto discretizada por elementos cúbicos, o perfil de aço por elementos de casca e a conexão foi simulada por elementos de molas. A figura mostra que os elementos implementados neste trabalho produzem resultados satisfatórios. A diferença entre os tipos de elementos usados para discretizar o problema da Figura 10 é o principal motivo para a diferença entre os resultados numéricos deste trabalho e de Nie et al (2008).

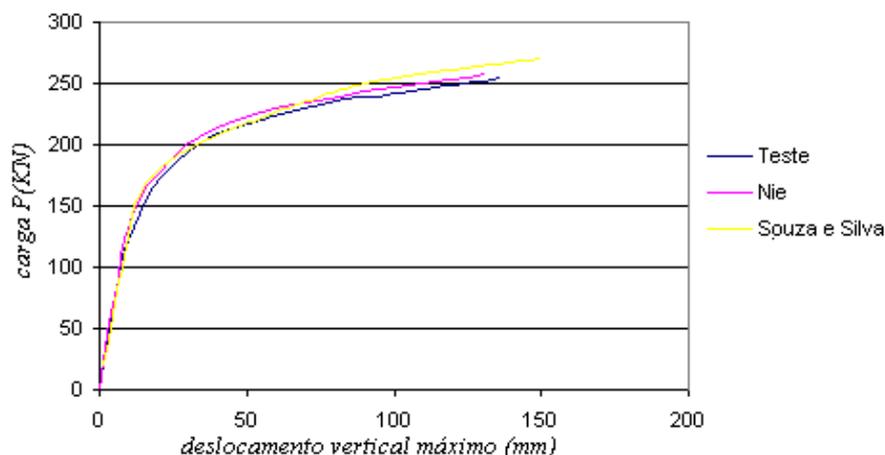


Figura 12: resultados laje mista exemplo 1

6 CONCLUSÕES

Neste trabalho foi apresentada uma formulação para a análise numérica de vigas mistas de aço e concreto. Elementos finitos de placa foram implementados para considerar a laje de concreto, enquanto o perfil metálico foi representado por um elemento de viga. A conexão entre os elementos foi simulada com o emprego de elementos de interface especialmente desenvolvidos para representar o deslizamento no plano de contato bem como a separação vertical entre os elementos.

Em geral, a literatura recente aconselha o emprego dos elementos de viga para a representação das vigas mistas com interação parcial. Embora esta solução seja eficiente e de baixo custo computacional, a possibilidade de representação das lajes como placas permite uma análise mais rigorosa dos estados de tensão em pavimentos compostos por vigas mistas de aço e concreto.

O esquema desenvolvido permitiu simular o comportamento de pavimentos de vigas mistas, e os resultados obtidos obtiveram boa precisão comparados com resultados numéricos tridimensionais e resultados experimentais.

REFERÊNCIAS

- Aribert J. M. Slip and uplift measurements along the steel and concrete interface of various types of composite beams. In: *Proceedings of the international workshop on needs in testing metals: Testing of metals for structures*. London: E. & FN Spon; p. 395–407, 1992.
- Huang Z., Burgess I.W., Plank R.J. Modelling Membrane Action of Concrete Slabs in Composite Buildings in Fire. Part I: Theoretical Development. *Journal of Structural Engineering, ASCE*. 129 (8), 1093-1102, 2003a.
- Huang, Z., Burgess, I.W., Plank, R.J. (2003b) Modelling Membrane Action of Concrete Slabs in Composite Buildings in Fire. Part II: Validations. *Journal of Structural Engineering, ASCE*. 2003, 129 (8), pp 1103-1112.
- Huang, Z., Burgess, I. W., and Plank, R. J. (1999). Non-linear analysis of reinforced concrete slabs subjected to fire. *ACI Struct. J.*, 96(1), 127–135.
- Nie J-G., Tiana C-Y, Caib C.S. Effective width of steel–concrete composite beam at ultimate strength state. *Engineering Structures* 30, 1396–1407, 2008.
- Sousa Jr. J. B. M., Silva A. R. Nonlinear analysis of partially connected composite beams using interface elements. *Finite Elements in Analysis and Design*, 43, 954-964, 2007.
- Silva A. R., Sousa Jr., J. B. M. A family of interface elements for the analysis of composite beams with interlayer slip. *Finite Elements in Analysis and Design*, 45, 305-314, 2009.
- Sousa Jr., J. B. M., Oliveira, C. E. M., Silva A. R. Displacement-based nonlinear finite element analysis of composite beam columns with partial interaction. *Journal of Constructional Steel Research* 66:772 -779, 2010.
- Sousa Jr., J.B.M., Caldas R.B. (2005) Numerical analysis of composite steel-concrete columns of arbitrary cross-section, *J. Struct. Eng.* 131 (11) (2005) 1721–1730.
- Zienkiewicz, O.C., and Taylor, R.L., *The finite element method*, volume II. McGraw Hill, 1991.