

SOGDE 3D: CODIGO PARA ELASTOPLASTICIDAD CON GRANDES DEFORMACIONES 3D

Claudio Careglio^{*}, Carlos García Garino^{*†} y Anibal Mirasso^{‡*}

^{*}LAPIC, Instituto Tecnológico Universitario, Universidad Nacional de Cuyo,
Casilla de Correo 947, 5500 Mendoza, Argentina.
e-mail: ccareglio@uncu.edu.ar, cgarcia@itu.uncu.edu.ar

[‡]Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Cuyo,
Centro Universitario, Parque San Martín, 5500 Mendoza, Argentina
e-mail: aemirasso@uncu.edu.ar

[†]Miembro de la Carrera del Investigador de CONICET

Palabras Clave: Grandes Deformaciones, Plasticidad, Elementos Finitos.

Resumen. *Este trabajo presenta la extensión a 3D del código SOGDE, programa de Elementos Finitos que resuelve problemas elastoplásticos con grandes deformaciones en 2D, el cual está basado en trabajos previos de García Garino. La extensión incluye la modificación de la estructura del código para adaptarlo al caso 3D, y se han implementado elementos relativamente simples como resultan el hexaedro lineal (H1) y el bien conocido hexaedro lineal con presión constante (H1/P0), elemento mixto que resulta una extensión al caso 3D del elemento mixto Q1/P0. También se ha incluido una interfaz para postprocesar los resultados con el programa GID. En el trabajo se presentan varios problemas de validación cuyos resultados se contrastan con resultados disponibles en la literatura y otros resueltos previamente con SOGDE2D.*

1. INTRODUCCIÓN

Ambos códigos se basan en un modelo teórico y la correspondiente implementación numérica, descritos en trabajos previos de García Garino.¹⁻³ Entre otras características el modelo se basa en la descomposición multiplicativa del tensor gradiente de la deformación, las tensiones se calculan a partir de un potencial hiperelástico y la implementación numérica se basa en un esquema predictor elástico, corrector plástico.

Para extender SOGDE al caso 3D, se ha mantenido la estructura de SOGDE2D, se han adecuado todos los arreglos al caso 3D y se ha debido implementar el elemento mixto H1/P0, hexaédro lineal con presión constante, que conjuntamente con el hexaédro lineal H1 son los elementos disponibles actualmente en el programa. Para facilitar el postproceso gráfico se ha incluido una interfaz para el programa GID.

En la sección 2 se discute el Modelo Teórico y en la sección 3 se presenta el esquema numérico. En ambos casos solamente se muestran los resultados más importantes ya que los detalles pueden consultarse en las referencias del trabajo.

En la sección 4 se discuten dos ejemplos de validación que concuerdan muy bien con los resultados disponibles y finalmente se presentan las conclusiones del caso.

2. MODELO TEÓRICO

SOGDE3D se basa en un modelo elastoplástico con efectos de grandes deformaciones propuesto por García Garino y Oliver.¹⁻³ La cinemática del modelo se basa en la bien conocida descomposición multiplicativa del tensor gradiente de la deformación. Las tensiones se derivan de un potencial hiperelástico y los efectos de plasticidad se tienen en cuenta mediante la teoría de variables internas. De esta manera el modelo es consistente con la termodinámica de los sólidos irreversibles.

2.1. Cinemática

La cinemática del problema se define introduciendo la configuración intermedia, como se muestra en la figura 1 y que conduce a la clásica descomposición multiplicativa del tensor gradiente de la deformación \mathbf{F} en sus componentes elástica y plástica.⁴

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^e \mathbf{F}^p \quad (1)$$

La cinemática se puede plantear en cualquiera de las tres configuraciones, pero dado que la implementación computacional del modelo se realiza en la configuración deformada ${}^t\Omega$, es suficiente introducir el tensor de Almansi \mathbf{e} , así como sus componentes elástica y plástica \mathbf{e}^e y \mathbf{e}^p , respectivamente. La componente elástica del tensor de Almansi se define como $\mathbf{e}^e = \frac{1}{2}(\mathbf{g} - \mathbf{b}^{e-1})$, donde \mathbf{g} es el tensor métrico espacial, y el tensor de Finger elástico se calcula mediante $\mathbf{b}^{e-1} = \mathbf{F}^{e-T} \mathbf{F}^{e-1}$. El tensor velocidad de deformación \mathbf{d} se obtiene calculando la derivada de Lie L_v ⁵ del tensor de Almansi. El tensor velocidad de deformación también admite una descomposición aditiva en sus componentes elástica y plástica $\mathbf{d} = \mathbf{d}^e + \mathbf{d}^p$.

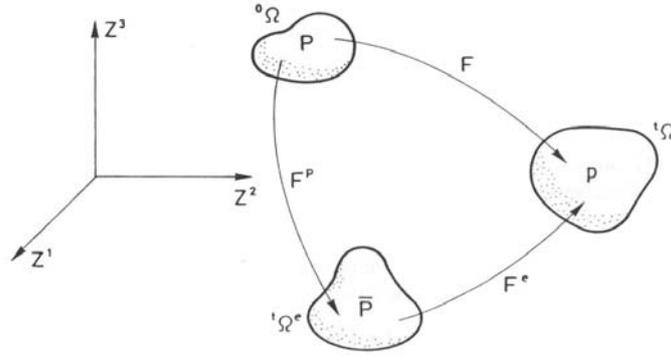


Figura 1: Configuraciones del sólido

2.2. Modelo Constitutivo

En este punto se resumen las características más importantes del modelo constitutivo que utiliza SOGDE3D, basado en trabajos previos de García Garino,¹⁻³ el cual está escrito en el marco de las ideas propuestas por Simo y Ortiz.⁶⁻⁸ Los efectos de plasticidad se tienen en cuenta mediante la teoría de variables internas⁹ y el modelo es completamente consistente con la termodinámica de los sólidos irreversibles.

La deducción del modelo se realiza en la configuración intermedia, sin embargo a los fines de este trabajo es suficiente presentar las ecuaciones que definen el modelo en la configuración deformada ${}^t\Omega$.

$$\mathbf{e} = \mathbf{e}^e + \mathbf{e}^p \quad (2)$$

$$\mathbf{d} = \mathbf{d}^e + \mathbf{d}^p \quad (3)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \psi^e(\mathbf{e}^e, \mathbf{b}^{e-1})}{\partial \mathbf{e}^e} \quad (4)$$

$$\dot{\gamma} \geq 0 \quad f \leq 0 \quad \dot{\gamma} f = 0 \quad (5)$$

$$\mathbf{d}^p = \dot{\gamma} \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\tau}} \quad (6)$$

$$\mathcal{D}^p = \boldsymbol{\tau} : \mathbf{d}^p + \mathbf{p} : \dot{\boldsymbol{\alpha}} \geq 0 \quad (7)$$

Para el caso de los metales las deformaciones elásticas son muy pequeñas. luego el tensor \mathbf{F}^e tiende a la identidad y, consecuentemente, el tensor \mathbf{b}^{e-1} tiende al tensor métrico espacial \mathbf{g} y la configuración intermedia tiende a la configuración deformada.

Para el caso de deformaciones elásticas pequeñas, la componente elástica de la energía libre puede escribirse como una forma cuadrática del tensor elástico de Almansi \mathbf{e}^e y de las constantes del material λ y μ , como se muestra en la ecuación (8).

$$\psi^e = \frac{1}{\rho_o} \left[\frac{1}{2} \lambda \text{tr}(\mathbf{e}^e)^2 + \mu (\mathbf{e}^e : \mathbf{e}^e) \right] \quad (8)$$

La plasticidad se tiene en cuenta mediante una regla de flujo asociada, la función de fluencia es el bien conocido criterio de Von Mises o J2 para metales. Actualmente solo se ha codificado endurecimiento isótropo lineal en SOGDE3D, que se escribe en función de la deformación plástica efectiva \bar{e}^p en la ecuación (9).

$$\psi^p = \psi^p(\bar{e}^p) \quad (9)$$

3. IMPLEMENTACIÓN NUMÉRICA

En esta sección se discute el algoritmo numérico para implementar el modelo teórico. El esquema resultante se basa en descomponer el problema en un predictor elástico seguido de un corrector plástico.

3.1. Problema Elástico

En este problema las variables internas permanecen fijas: (${}^{t+\Delta t} \mathbf{F}^{pTR} = {}^t \mathbf{F}^p$). El predictor de la componente elástica del tensor gradiente de la deformación resulta:

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{F}^{eTR} = {}^{t+\Delta t} \mathbf{F} ({}^{t+\Delta t} \mathbf{F}^{pTR})^{-1} = \mathbf{f} {}^t \mathbf{F} ({}^t \mathbf{F}^p)^{-1} = \mathbf{f} {}^t \mathbf{F}^e \quad (10)$$

donde \mathbf{f} es el tensor gradiente de deformación incremental. EL predictor de la componente elástica del tensor de Finger ${}^{t+\Delta t} \mathbf{b}^{e-1TR}$ resulta:

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{b}^{e-1TR} = \left({}^{t+\Delta t} \mathbf{F}^{e-T} {}^{t+\Delta t} \mathbf{F}^{e-1} \right)^{TR} = \mathbf{f}^{-T} {}^t \mathbf{b}^{e-1} \mathbf{f}^{-1} \quad (11)$$

Finalmente a partir del predictor de la componente elástica del tensor de Almansi. ${}^{t+\Delta t} \mathbf{e}^{eTR} = \frac{1}{2} ({}^{t+\Delta t} \mathbf{g} - {}^{t+\Delta t} \mathbf{b}^{e-1TR})$, se calcula el predictor del tensor de tensiones σ^{TR} se calcula utilizando la ecuación (4).

Surge del algoritmo obtenido que el problema elástico se reduce al cálculo de una expresión explícita, evitando así la integración numérica en el tiempo del predictor.

3.2. Problema Plástico

En este caso permanece fija la configuración deformada y se actualizan las variables internas con el fin de satisfacer la ecuación constitutiva. Simo⁷ propuso integrar la regla de flujo en la configuración original:

$$\dot{\mathbf{C}}^p = 2 \phi^* \mathbf{d}^p = 2 \dot{\lambda} \phi^* \mathbf{n} = 2 \dot{\lambda} \mathbf{N} \quad (12)$$

donde \mathbf{C}^p es la componente plástica del tensor de Cauchy Green derecho, ϕ^* indica el operador pull-back⁵ y $\mathbf{n} = \frac{\partial f}{\partial \sigma}$, y f representa el criterio de fluencia.

La ecuación (12) se integra utilizando un esquema de Backward-Euler:

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{C}^p - {}^t\mathbf{C}^p = 2 \lambda \quad {}^{t+\Delta t}\mathbf{N} \quad (13)$$

Transportando la ecuación (13) a la configuración deformada se obtiene el tensor de Finger actualizado:

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{b}^{e-1} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{b}^{e-1TR} + 2 \lambda \quad {}^{t+\Delta t}\mathbf{n} \quad (14)$$

El factor $2 \lambda \quad {}^{t+\Delta t}\mathbf{n}$ se calcula utilizando el algoritmo de retorno radial.

3.3. Discusión del Esquema Numérico

En el Cuadro 1 se resumen los resultados del esquema predictor corrector con el fin de discutir el algoritmo resultante desde el punto de vista de la implementación computacional.

Dados los desplazamientos ${}^{t+\Delta t}\mathbf{u}$ y las variables internas ${}^t\mathbf{b}^{e-1}$, y ${}^t\mathbf{q}$, almacenadas en la base de datos del código para un estado ${}^n t$:

1. Actualizar la geometría y calcular el tensor \mathbf{f} .
2. Actualizar la componente elástica del tensor de Finger:

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{b}^{e-1TR} = \mathbf{f}^{-T} \quad {}^t\mathbf{b}^{e-1} \quad \mathbf{f}^{-1}$$
3. Calcular la componente elástica del tensor de Almansi y el tensor de tensiones de Cauchy:

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{e}^{eTR} = \frac{1}{2} ({}^{t+\Delta t}\mathbf{g} - {}^{t+\Delta t}\mathbf{b}^{e-1TR})$$

$${}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \psi({}^{t+\Delta t}\mathbf{e}^e)}{\partial {}^{t+\Delta t}\mathbf{e}^e}$$
4. Verificar el criterio de fluencia y calcular el corrector plástico si es necesario:

$$f({}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\sigma}, {}^{t+\Delta t}\mathbf{q}) \leq 0$$
5. Corregir la componente elástica del tensor de Finger:

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{b}^{e-1} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{b}^{e-1TR} + 2 \lambda \quad {}^{t+\Delta t}\mathbf{n}$$
6. Corregir la componente elástica del tensor de Almansi y el tensor de tensiones de Cauchy y almacenarlos en la base de datos del código.

Cuadro 1: Esquema numérico del código

Este esquema posee una ventaja importante ya que no es necesario calcular *explícitamente* la descomposición multiplicativa del tensor gradiente de la deformación, de esta forma se ahorran operaciones a nivel de punto de integración de los elementos.

Es importante destacar que es suficiente almacenar en la base de datos del código, para un paso de tiempo dado t , los desplazamiento globales más las variables libre e interna del problema ${}^t\mathbf{b}^{e-1}$ and ${}^t\mathbf{q}$, respectivamente. No es necesario almacenar las tensiones que se pueden obtener facilmente a partir de la ecuación constitutiva. En este sentido los requerimientos de memoria son similares a los de un código para resolver problemas de plasticidad con deformaciones infinitesimales.

4. EJEMPLOS

4.1. Ménsula elastoplástica en deformación plana

La viga en mensula de la figura 2, cuya geometría y datos del material se muestran en la tabla de la figura 3, esta sometida a la acción de un desplazamiento impuesto en el extremo libre, hasta alcanzar una deformación igual al canto de la viga.

La viga se modela con 48 elementos mixtos H1/P0, hexaédro lineal con presión constante, extensión al caso 3D del bien conocido cuadrilátero Q1/P0. Se han impedido los desplazamientos perpendiculares al plano de la viga con el fin de simular un estado de deformación plana, ya que en la literatura existen resultados disponibles para dicho caso 2D (ver García Garino^{1,3} y las referencias allí indicadas).

El desplazamiento final $u = 1\text{mm}$ se ha impuesto en 80 incrementos de carga iguales. Se utilizó un esquema de Newton Raphson para resolver el problema iterativo dentro de cada incremento de carga y para una norma de fuerzas residuales del 0,1 % fueron necesarias 89 iteraciones de equilibrio, lo que sugiere que se pueden emplear incrementos mayores. En este caso sin embargo el énfasis se ha puesto en la validación del código y no en la velocidad de convergencia.

Las figuras 4,5, 6 y 7, muestran las mallas deformadas y los contornos de deformación plástica efectiva para desplazamientos $u = 0,5\text{mm}$ y $u = 1\text{mm}$ respectivamente.

El problema estudiado, como se ha señalado, esta bien documentado para el caso 2D, ya que se disponen de resultados numéricos para las componentes de las tensiones y la deformación plástica efectiva en diferentes puntos de la viga, los cuales se han indicado en la figura 8.

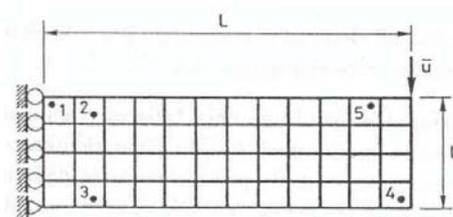


Figura 2: Ménsula elastoplástica: geometría y malla de elementos finitos

L	=	3 mm
h=u	=	1 mm
ν	=	0.3
E	=	20000 daN/mm ²
σ_y	=	40 daN/mm ²
H	=	100 daN/mm ²

Figura 3: Geometría y Datos del Material.

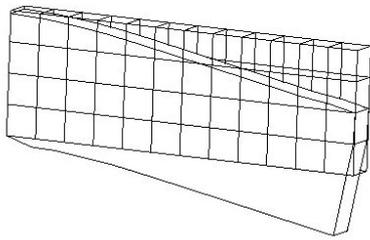


Figura 4: Deformada para $u = 0,5$ mm

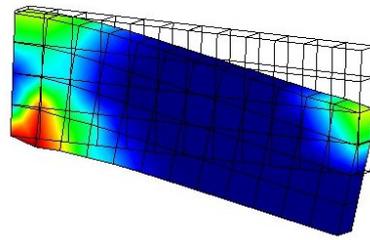


Figura 5: Contornos de \bar{e}^p para $u = 0,5$ mm

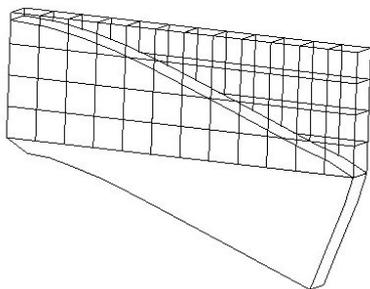


Figura 6: Deformada para $u = 1$ mm

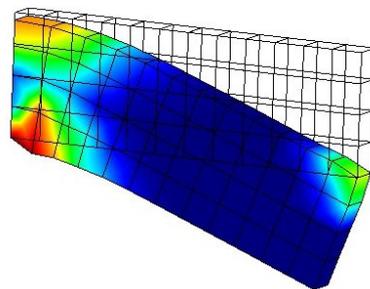


Figura 7: Contornos de \bar{e}^p para $u = 1$ mm

Los puntos para los cuales se comparan resultados se han escogido para comprobar el funcionamiento del código y el modelo para diferentes casos: en el punto 1 se observan grandes deformaciones y pequeñas rotaciones; los puntos 2 y 3 presentan grandes deformaciones y rotaciones moderadas, el punto 4 posee grandes rotaciones y pequeñas deformaciones y el punto 5 grandes deformaciones y rotaciones. Los resultados obtenidos concuerdan muy bien con los disponibles, y cabe destacar que las variables medidas están asociadas a las derivadas del campo primario, que en general poseen mayor error de aproximación.

4.2. Conformado de un disco cilíndrico

En este problema se estudia el aplastamiento de un disco cilíndrico. Los datos del material y de la geometría se muestran en la figura 10. Tomando en cuenta la simetría del problema se ha modelado un octavo del disco utilizando 1500 elementos mixtos H1/P0.

El proceso se ha simulado imponiendo desplazamientos en la cara superior del disco para lograr los efectos que produce un punzon que entra en contacto con dicha cara. Para ello se impiden los desplazamientos radiales en la cara superior (condición de contacto sin deslizamiento) y se aplican desplazamientos verticales hasta alcanzar $u = 0,32$ mm.

La figura 9 muestra la geometría original y la deformada final del disco en la misma escala y la figura 11 presenta los contornos de deformación plástica efectiva superpuesta a la geometría deformada. Para alcanzar la configuración final se han impuesto 32 incrementos de carga iguales, se utilizó un esquema de Newton Raphson y fueron necesarias 41 iteraciones de

Gauss Point	CODIGO	σ_x	σ_y	σ_z	σ_{xy}	ϵ_p
1	Este trabajo	68,58	-3,71	32,61	5,81	0,2341
	Garcia Garino	68,58	-3,66	32,66	5,80	0,2337
	Ponthot	68,93	-3,72	32,66	5,78	0,2372
	Dubois	68,67	-3,71	32,69	5,82	0,2349
	Cao	66,19	-3,69	31,42	5,70	0,2559
2	Este trabajo	60,26	-0,12	30,67	11,57	0,1601
	Garcia Garino	60,33	-0,06	30,69	11,61	0,1650
	Ponthot	60,49	-0,01	30,74	11,71	0,1619
	Dubois	60,34	-0,03	30,67	11,64	0,1604
	Cao	57,92	0,52	29,29	11,75	0,1646
3	Este trabajo	-66,18	-0,58	-25,86	-16,47	0,2402
	Garcia Garino	-66,28	-0,77	-25,97	-16,71	0,2399
	Ponthot	-65,92	-1,04	-25,78	-16,71	0,2367
	Dubois	-66,22	-0,70	-25,90	-16,54	0,2401
	Cao	-60,98	-2,24	-27,35	-15,72	0,2543
4	Este trabajo	-4,48	-1,34	-1,03	1,76	0,0000
	Garcia Garino	-4,49	-1,33	-1,01	1,75	0,0000
	Ponthot	-4,42	-1,31	-1,03	1,75	0,0000
	Dubois	-4,48	-1,34	-1,02	1,76	0,0000
	Cao	-3,71	-1,06	18,55	1,03	0,0000
5	Este trabajo	28,07	4,37	-2,56	-9,30	0,0481
	Garcia Garino	27,83	4,67	-2,55	-9,43	0,0492
	Ponthot	28,78	3,13	-2,72	-8,61	0,0482
	Dubois	28,18	4,32	-2,55	-9,27	0,0486

Figura 8: Comparación de resultados para componentes del tensor de tensiones y deformación plástica efectiva

equilibrio para una norma de fuerzas residuales del 1.0%. Como se observa en la figuras 9 y 11 el volumen del disco se mantiene dando lugar al conocido efecto de *abarrilamiento* que se manifiesta a través de los desplazamientos radiales del disco.

En el gráfico de la figura 12 se muestra, en línea llena, la evolución de la carga aplicada en la cara superior en función de los desplazamientos de la misma. Los resultados obtenidos se han comparado con otros disponibles en la literatura debidos a Nagtegaal y de Jong,¹⁰ Ponthot,¹¹ Simo⁷ y García Garino.³ Como surge de la figura los resultados obtenidos concuerdan muy bien con los disponibles.

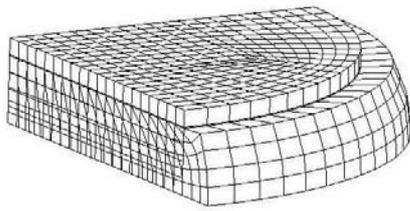


Figura 9: Geometrías original y deformada del disco para $u = 0,32$ mm

R	=	6 mm
h	=	1,5 mm
ν	=	0.3
E	=	1000 Mpa
σ_y	=	1 Mpa
H	=	3 Mpa

Figura 10: Geometría y Datos del Material.

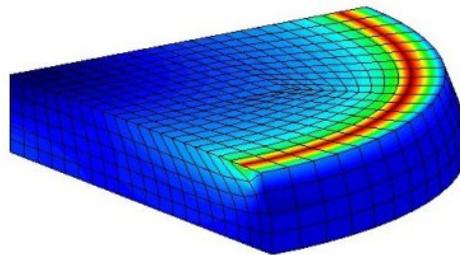


Figura 11: Contornos de \bar{e}^p para $u = 0,32$ mm

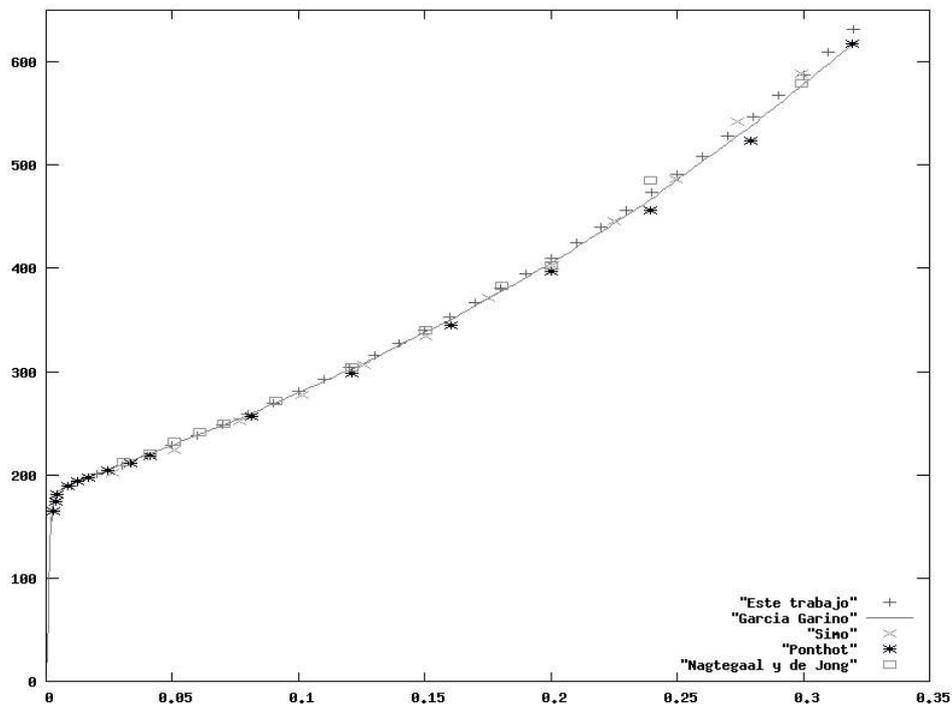


Figura 12: Aplastamiento del Disco: evolución de la carga aplicada en función de los desplazamientos de la cara superior

5. CONCLUSIONES

Se ha desarrollado un código elastoplástico con efectos con grandes deformaciones para el caso tridimensional, SOGDE3D, a partir del código SOGDE2D, disponible para problemas bidimensionales y con simetría de revolución.

Con este propósito se ha extendido el bien conocido elemento mixto Q1/P0, cuadrilátero lineal con presión constante, al caso 3D, para lo cual se ha implementado el Hexaédro lineal con presión constante H1/P0.

La herramienta desarrollada se ha validado contrastando los resultados con dos ejemplos bien documentados, tanto en curvas carga-desplazamiento, como en valores de las componentes del tensor de tensiones. La respuesta del código concuerda muy bien con los resultados disponibles en la literatura.

6. AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen la ayuda financiera recibida de la Agencia Nacional de Promoción Científica y Tecnológica, ANPCyT, a través del proyecto PICTR 184 del FONCyT.

REFERENCIAS

- [1] C. García-Garino. *Un modelo numérico para el análisis de sólidos elastoplásticos sometidos a grandes deformaciones*. PhD thesis, E.T.S. Ingenieros de Caminos. Universidad Politécnica de Catalunya, Barcelona, (1993).
- [2] C. García Garino and J. Oliver. Un modelo constitutivo para el análisis de sólidos elastoplásticos sometidos a grandes deformaciones: Parte i formulación teórica y aplicación a metales. *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, **11**, 105–122 (1995).
- [3] C. García Garino and J. Oliver. Un modelo constitutivo para el análisis de sólidos elastoplásticos sometidos a grandes deformaciones: Parte ii implementación numérica y ejemplos de aplicación. *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, **12**, 147–169 (1996).
- [4] E.H. Lee. Elastic-plastic deformation at finite strains. *Journal of Applied Mechanics*, **36**, 1–6 (1969).
- [5] E.J. Marsden and T.J.R. Hughes. *Mathematical Foundations of Elasticity*. Prentice-Hall, (1983).
- [6] J.C. Simó. A framework for finite strains elastoplasticity based on maximum plastic dissipation and the multiplicative decomposition. part i: Continuum formulation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **66**, 199–219 (1988).
- [7] J.C. Simó. A framework for finite strains elastoplasticity based on maximum plastic dissipation and the multiplicative decomposition. part ii: Computational aspects. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **68**, 1–31 (1988).
- [8] J.C. Simó and M. Ortiz. A unified approach to finite deformation analysis based on the use of hyperelastic constitutive equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and*

Engineering, **49**, 222–235 (1985).

- [9] J. Lubliner. *Plasticity Theory*. Macmillan Publishing Company, (1990).
- [10] J.C. Nagtegaal and J.E. de Jong. Some computational aspects of elastic-plastic large strain analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **17** (1981).
- [11] J.P. Ponthot. *Traitement unifié de la mécanique des milieux continus solides en grandes transformations par le méthode des éléments finis*. PhD thesis, Universidad de Lieja, Bélgica, (1994).